فهرست

فهرست

سخن مؤلفان

درس راهسازی یکی از دروس رشته مهندسی عمران است که در چند سال اخیر مجدداً به کنکور کارشناسی ارشد اضافه شده است. در واقع این درس در کنار دروس فولاد و بتن به‌عنوان یکی از دروس بخش طراحی ارائه می‌شود زیرا راهسازی و یا طرح هندسی راه جزو دروسی است که به ما می‌آموزد تا چگونه با کمک ایده‌های خلاقانه بین دو شهر و یا دو نقطه از یک شهر، مسیری بهینه طراحی کنیم و چگونه آنها را با قوس‌های متنوعی به یکدیگر ارتباط دهیم. در مقطع کارشناسی با قوس‌هایی مانند قوس دایره‌ای ساده، قوس دایره‌ای مرکب، قوس دایره‌ای معکوس، قوس قائم و منحنی اتصال کلوتوئیدی آشنا شده‌اید که در این کتاب تمامی این قوس‌ها مورد بررسی و ارزیابی کامل قرار گرفته‌اند.

از ویژگی‌های بارز این کتاب می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- ارائهٔ فصل‌های درس راهسازی به‌صورت زیر بخش‌های مجزا و کوچکتر که باعث افزایش سرعت یادگیری شما می‌شود.
۲- ایجاد یک روند جدید در آموزش مطالب، با کمک پرسیدن چند سؤال مفهومی در شروع هر بحث که درک شما را از مطالب بسیار بالا می‌برد (قسمت بررسی چند سؤال) و این موضوع مطالعهٔ کتاب را بسیار روان کرده است.
۳- تألیف سؤالات بسیار خوب، جامع و متنوع در قسمت‌های مختلف کتاب برای درک و تسلط بیشتر.
۴- استفاده از عکس‌ها و شکل‌های ساده و زیبا برای درک بهتر مطالب.
۵- جمع‌آوری سؤالات کنکور سراسری، آزاد و همچنین سؤالات تألیفی به منظور تکمیل مطالب درسی و همچنین پوشش کامل مطالب مهم نشریهٔ ۴۱۵ و مهمترین مراجع دانشگاهی در ایران.

همین ویژگی‌های کتاب باعث می‌شود تا با مطالعهٔ دقیق آن، بتوانید با تسلط کامل به تمامی سؤالات این درس در آزمون کارشناسی ارشد پاسخ دهید.

در خاتمه لازم است از جناب آقای دکتر شریفیان، مدیریت مؤسسه سری عمران، جناب آقای دکتر آهنگر، جناب آقای مهندس شاکری و عوامل اجرایی مؤسسه جناب آقای فرزانه، سرکار خانم نجفی و ... که تمام تلاش خود را جهت ارائه هر چه بهتر این مجموعه به کار گرفتند، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

در آخر علی‌رغم تلاش فراوانی که برای بازبینی این کتاب انجام شده است، وجود اشکال در آن غیرممکن نبوده و از اساتید گرانقدر و دانشجویان گرامی تقاضا می‌شود، پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق آدرس (serieomran@yahoo.com) مطرح نمایند.

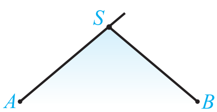
«توفیق رفیق راهتان»

نیما ابراهیمی

فصل دوم:

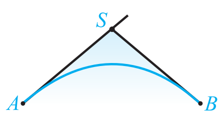
قوس دایره‌ای ساده

مروری بر آنچه خواهیم خواند:



در طراحی یک مسیر، همواره کوتاه‌ترین و اقتصادی‌ترین مسیر بین دو نقطه مبدأ و مقصد، خط مستقیمی است که این دو نقطه را به هم متصل می‌سازد. شکل مقابل که قسمتی از پلان یک مسیر است را در نظر بگیرید:

اگر خود را به‌جای یک راننده فرض کنیم که می‌خواهد از نقطه A به سمت نقطه B حرکت کند، باید از مسیر شکسته نشان داده شده عبور کند. با توجه به شکستگی ایجاد شده در نقطه S، این مسیر چندان مناسب نمی‌باشد. حال سؤال این است که این مشکل را چگونه باید حل کنیم؟



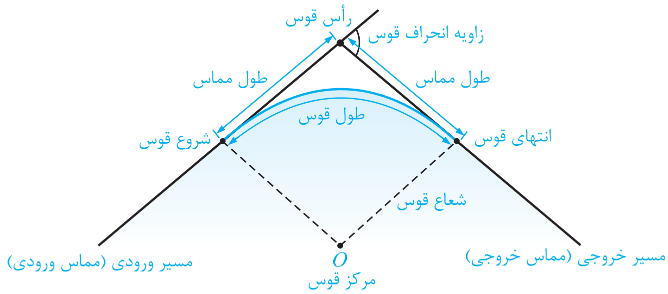
در جواب باید گفت که برای رفع این مشکل، از یک قوس افقی (خط آبی رنگ در شکل مقابل) استفاده می‌کنیم. با این کار عملا راننده به تدریج تغییرات شکستگی مسیر را احساس می‌کند.

در این فصل می‌خواهیم با قوس افقی دایره‌ای ساده و پارامترهای مختلف آن آشنا شویم. برای درک بهتر شما مهندسین گرامی، قسمت‌های اصلی این فصل را مطابق نمودار درختی زیر ارائه می‌کنیم:

قوس دایره‌ای ساده
- قسمت اول: اجزای قوس دایره‌ای ساده
- قسمت دوم: محاسبه کیلومتراژ نقاط در قوس دایره‌ای ساده
- قسمت سوم: روش‌های پیاده کردن قوس دایره‌ای ساده
- قسمت چهارم: بخش تکمیلی

انتشارات سری عمران
www.serieomran.ir

در این فصل، قوس دایره‌ای ساده را با هم بررسی می‌کنیم. این نوع قوس همانطور که از نامش نیز پیداست، کمانی از یک دایره به شعاع (R) است که بر دو مسیر مستقیم (مسیر ورودی و مسیر خروجی) مماس بوده و آنها را به هم متصل می‌کند. در شکل زیر نمای کلی یک نمونه قوس دایره‌ای ساده نشان داده شده است:



قوس‌های دایره‌ای اجزایی دارند که در ادامه با آنها آشنا شده و نحوه محاسبه آنها را یاد خواهیم گرفت.

با کمی دقت متوجه خواهید شد، اجزای قوس دایره‌ای ساده را می‌توان به سه دسته نقاط، زوایا و طول‌ها تقسیم کرد. با آشنایی این سه دسته به تمامی اجزای مهم قوس دایره‌ای مسلط خواهیم شد. در جدول زیر این اجزا به‌صورت کلی معرفی شده‌اند:

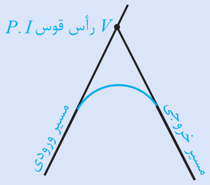
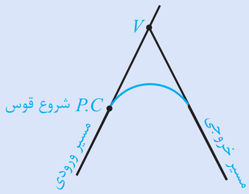
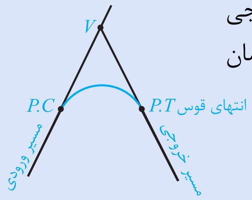
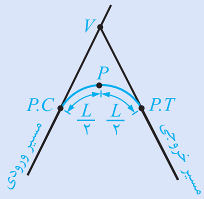
اجزای قوس دایره‌ای		
نقاط قوس دایره‌ای	زوایای قوس دایره‌ای	طول‌های قوس دایره‌ای
رأس قوس نقطه شروع قوس نقطه انتهای قوس نقطه وسط قوس	زاویه انحراف قوس زاویه رأس قوس درجه قوس	طول قوس طول مماس طول وتر قوس فاصله رأس قوس تا وسط قوس

A-۱- نقاط قوس دایره‌ای ساده

در این قسمت می‌خواهیم با نقاط مختلف یک قوس دایره‌ای ساده آشنا شویم. همانطور که در جدول فوق نیز مشاهده کردید نقاط مختلف در یک قوس دایره‌ای عبارتند از:

۱ رأس قوس یا سومه
۲ نقطه شروع قوس
۳ نقطه انتهای قوس
۴ نقطه وسط قوس

این نقاط را در جدول زیر بررسی می‌کنیم:

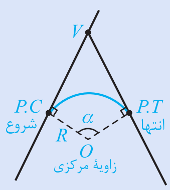
نقاط قوس دایره‌ای ساده	
۱- **رأس قوس یا سومه:** محل تقاطع دو مسیر مستقیم (ورودی و خروجی) در پلان مسیر، رأس قوس یا سومه می‌نامند و با حرف V و یا $P.I$ نمایش داده می‌شود.	
۲- **شروع قوس:** شروع کمان دایره یعنی محل تماس مسیر مستقیم ورودی با قوس دایره‌ای را نقطه شروع قوس می‌نامند و آن را با $P.C$ و یا $T.C$ نمایش می‌دهند.	
۳- **انتهای قوس:** انتهای کمان دایره، یعنی محل تماس مسیر مستقیم خروجی با قوس دایره‌ای را انتهای قوس می‌نامند و آن را با $P.T$ و یا $C.T$ نشان می‌دهند.	
۴- **وسط قوس:** وسط کمان دایره (از $P.C$ تا $P.T$) را نقطه وسط قوس یا میانهٔ قوس می‌نامند و آن را با حرف P نمایش می‌دهند.	

A-۲- زوایای قوس دایره‌ای ساده

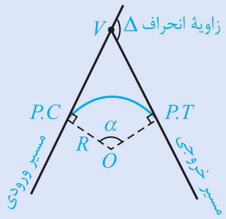
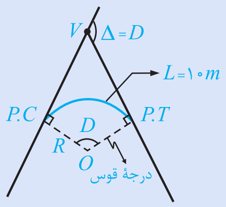
در یک قوس دایره‌ای، سه زاویه اصلی زیر حائز اهمیت است:

۱ زاویه مرکزی قوس　　۲ زاویه انحراف قوس　　۳ درجه قوس

این زوایا را در جدول زیر بررسی می‌کنیم:

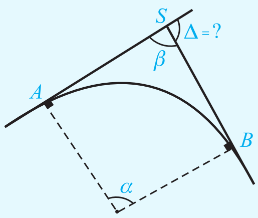
زوایای قوس دایره‌ای ساده	
۱- **زاویه مرکزی قوس:** زاویهٔ روبرو به کمانی از دایره (از شروع تا انتهای قوس) که رأس آن در مرکز قوس دایره واقع شده است را زاویه مرکزی قوس می‌نامند و آن را با α نمایش می‌دهند.	

ادامه جدول صفحهٔ قبل

زوایای قوس دایره‌ای ساده	
۲- زاویه انحراف قوس: میزان زاویهٔ انحراف بین دو مسیر مستقیم ورودی و خروجی را زاویه انحراف قوس (زاویه تقاطع) می‌نامند. این زاویه به‌سادگی از محل تقاطع دو خط در نقطه رأس به‌دست می‌آید که با توجه به شکل برابر $\varDelta$ می‌باشد.	
۳- درجهٔ قوس: اگر طول یک قوس را ۱۰ متر فرض کنیم، زاویه مرکزی روبرو به این کمان را درجهٔ قوس نامیده و آن را با حرف D نمایش می‌دهیم. $$L=۱۰m=R.D^{*} \Rightarrow D^{rad}=\frac{۱۰}{R_m}$$ $$\xrightarrow{۱\ rad=\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}} D^\circ=\frac{۱۰}{R}\times\frac{۱۸۰}{\pi} \Rightarrow D=\frac{۵۷۲/۹۶}{R}\simeq\frac{۵۷۳}{R}$$ * طول یک کمان برابر است با حاصل‌ضرب زاویه مرکزی روبروی کمان در شعاع قوس.	

بررسی یک نکته پرکاربرد

در یک قوس دایره‌ای ساده، زاویه مرکزی قوس (α) با زاویه انحراف قوس ($\varDelta$) برابر است. برای اثبات این موضوع شکل مقابل را در نظر بگیرید:



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\alpha}+\hat{\beta}=۳۶۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}=۹۰^\circ} ۹۰^\circ+۹۰^\circ+\hat{\alpha}+\hat{\beta}=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}+\hat{\beta}=۱۸۰^\circ \quad (I)$$

مجموع زوایای β و $\varDelta$ نیز ۱۸۰° است:

$$\hat{\varDelta}+\hat{\beta}=۱۸۰^\circ \quad (II)$$

بنابراین با توجه به رابطه (I) و (II) داریم:

$$\hat{\alpha}+\hat{\beta}=\hat{\varDelta}+\hat{\beta} \Rightarrow \boxed{\hat{\alpha}=\hat{\varDelta}}$$

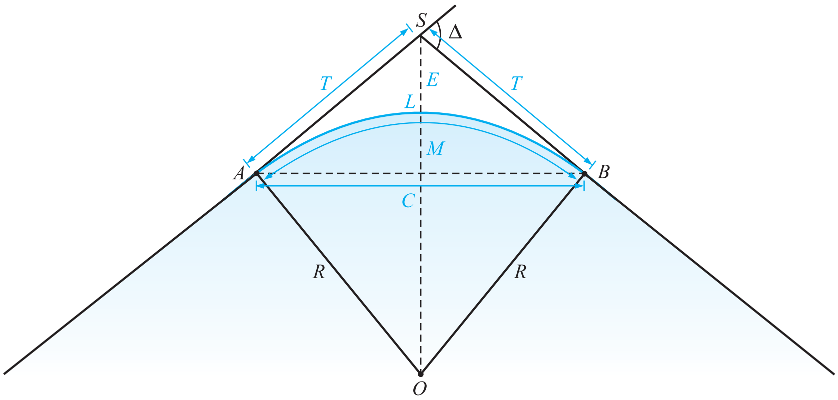
A-۳- طول اجزا در قوس دایره‌ای ساده

پس از آشنایی با نقاط و زوایا در یک قوس دایره‌ای ساده، نوبت آشنا شدن با مبحث بسیار مهم طول اجزا در قوس دایره‌ای ساده می‌رسد. به‌طور کلی هر قوس دایره‌ای ساده دارای دو پارامتر اصلی است:

۱ زاویه انحراف قوس ($\varDelta$)

۲ شعاع قوس (R)

در بخش قبل، با زاویه انحراف (زاویه تقاطع[1]) آشنا شدیم و شعاع قوس را نیز بر روی شکل آن مشاهده کردیم. حال با مشخص بودن این دو پارامتر اصلی، اجزای مربوط به قوس دایره‌ای به‌سادگی قابل محاسبه هستند. لازم به ذکر است که روابط طول‌های اجزای قوس و محاسبه آنها، اصلی‌ترین سؤالات این فصل در کنکور محسوب می‌شود. به شکل زیر توجه نمایید:

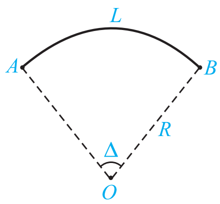


با توجه به شکل رسم شده، منظور از طول در قوس دایره‌ای، مقادیر L، T، C، M و E می‌باشد که هر کدام از این طول‌ها رابطه مخصوص به خود را دارد و این روابط معمولاً به سادگی از هندسه قابل محاسبه است. در اینجا می‌خواهیم با بررسی چند سؤال مهمترین روابط طول‌ها در قوس دایره‌ای را از روش‌های هندسی به شما آموزش دهیم:

بررسی چند سوال

سؤال ۱: طول L در قوس دایره‌ای نشان داده شده از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

پاسخ: شکل مقابل را در نظر بگیرید:



قوس دایره‌ای در واقع کمانی از یک دایره است و به سادگی با کمک رابطه زیر (که از پایه‌ای‌ترین روابط هندسه محسوب می‌شود) به‌دست می‌آید:

زاویه مرکزی کمان قوس × شعاع = طول قوس

$$L = R \times \Delta$$

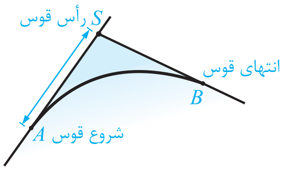
تذکر: دقت شود که در این رابطه، Δ باید برحسب رادیان باشد. اگر Δ را برحسب درجه بخواهیم در رابطه قرار دهیم، باید برای تبدیل واحد آن را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$L = R.\Delta^{rad} \xrightarrow{1\ rad = \frac{180^\circ}{\pi}} \boxed{L = \frac{\pi R \Delta^\circ}{180}}$$

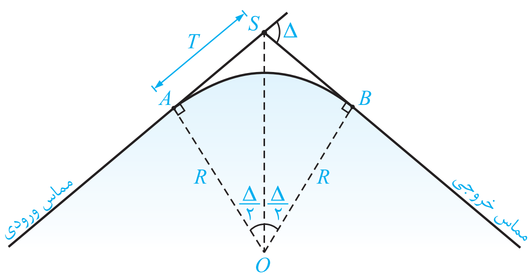
1- *Intersection Angle*

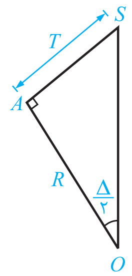
سؤال ۲: فاصله مستقیم نقطه رأس قوس تا نقطه شروع قوس چه نامیده می‌شود و مقدار آن از چه رابطه‌ای محاسبه می‌شود؟

پاسخ: شکل مقابل را در نظر بگیرید:



فاصله A تا S را با T نشان می‌دهند و آن را **طول مماس** می‌نامند که می‌توان از روابط هندسی زیر با توجه به شکل نشان داده شده در زیر به‌دست آورد:



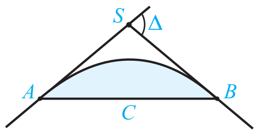


با توجه به مثلث $\overset{\Delta}{OAS}$ داریم:

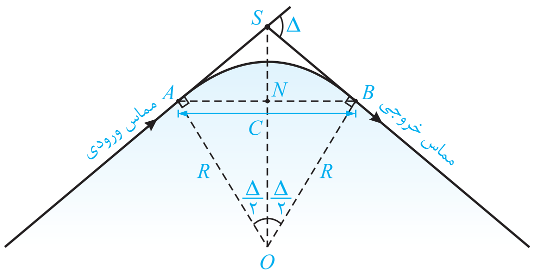
$$tan\,\frac{\Delta}{۲}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{T}{R}\Rightarrow \boxed{T=R\,tan\,\frac{\Delta}{۲}}$$

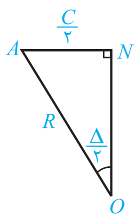
سؤال ۳: اگر بخواهیم نقطه شروع قوس را به‌صورت مستقیم به نقطه پایانی قوس B وصل کنیم، این فاصله چه نامیده می‌شود و مقدار آن از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

پاسخ: شکل مقابل را در نظر بگیرید:



فاصله مستقیم A تا B را با C نمایش می‌دهند و آن را **طول وتر بزرگ** می‌نامند (در واقع این فاصله کوتاه‌ترین فاصله بین A و B می‌باشد). این فاصله را می‌توان به سادگی از روابط هندسی زیر با توجه به شکل نشان داده شده به‌دست آورد:



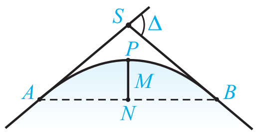


با توجه به مثلث $O\overset{\Delta}{A}N$ داریم:

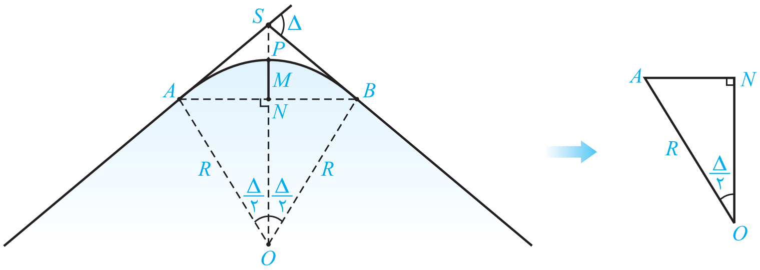
$$\sin\frac{\Delta}{۲}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{AN}{R}=\frac{\frac{C}{۲}}{R}\Rightarrow \boxed{|\overline{AB}|=C=۲R\sin\frac{\Delta}{۲}}$$

سؤال ۴: در یک قوس دایره‌ای ساده فاصله بین وسط قوس (P) تا وسط وتر بزرگ را چه می‌نامند و مقدار آن از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

پاسخ: شکل مقابل را در نظر بگیرید:



فاصله وسط قوس (P) تا وسط وتر بزرگ (N) را با M نمایش می‌دهند و آن را **فاصله درونی** یا **میانی قوس** می‌نامند. برای محاسبه این فاصله ابتدا باید در شکل زیر طول ON را به‌دست آوریم (با کمک مثلث $O\overset{\Delta}{A}N$). سپس طول M که در واقع از تفاضل OP و ON به‌دست می‌آید (OP همان شعاع دایره است) را محاسبه کنیم:



$$\cos\frac{\Delta}{۲}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{ON}{R}\Rightarrow ON=R\cos\frac{\Delta}{۲}$$

$$M=\underbrace{OP}_{R}-ON\Rightarrow M=R-R\cos\frac{\Delta}{۲}\Rightarrow \boxed{M=R(۱-\cos\frac{\Delta}{۲})}$$

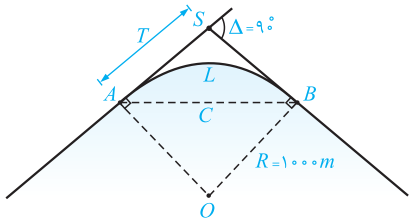
تذکر: دانشجویان عزیز دقت کنند روابط مربوط به طول‌های L، T، C و M را حتماً باید به‌خاطر بسپارید. اگر در حفظ کردن این فرمول‌ها ضعیف هستید تلاش کنید با کمک اثبات‌های هندسی ساده که برایتان انجام دادیم این فرمول‌ها را به سرعت به‌دست آورید. در ادامه با حل چند تمرین برای شما عزیزان، به درک بیشتر این فرمول‌ها کمک خواهیم کرد.

تمرین ۱: برای اتصال دو شاخه مسیری، از قوس افقی به شعاع ۱۰۰۰ متر و زاویه تقاطع ۹۰° استفاده شده است. مطلوبست: $(\sqrt{۳}=۱/۷$ ، $\sqrt{۲}=۱/۴$ و $\pi\simeq۳)$

الف) محاسبه طول قوس

ب) تعیین طول مماس

ج) محاسبه کوتاهترین فاصله بین ابتدا و انتهای قوس



حل: با توجه به روابط طول‌ها در قوس دایره‌ای ساده و در اختیار داشتن دو پارامتر اصلی قوس $(R\ ,\ \Delta)$ در شکل مقابل داریم:

الف) طول قوس (L) از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\widehat{AB}=L=\frac{\pi R\Delta^{\circ}}{۱۸۰}=\frac{\pi\times ۱۰۰۰\times ۹۰}{۱۸۰}=۱۵۰۰\ m$$

ب) طول مماس (T) از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$T=R\ tan\frac{\Delta}{۲}=۱۰۰۰\times tan\frac{۹۰}{۲}=۱۰۰۰\times ۱=۱۰۰۰\ m$$

ج) کوتاهترین فاصله بین ابتدا و انتهای قوس در واقع همان طول وتر بزرگ (C) است، بنابراین داریم:

$$\overline{AB}=C=۲R\ sin\frac{\Delta}{۲}=۲\times ۱۰۰۰\times sin\frac{۹۰}{۲}=۱۴۰۰\ m$$

تمرین ۲: در یک قوس دایره‌ای ساده طول وتر ۲۰۰ متر و طول مماس ۱۲۵ متر است. مقدار زاویه تقاطع (Δ) چند درجه است؟ $\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰/۸\ ,\ \sqrt{۳}=۱/۷\ \text{و}\ \frac{\sqrt{۳}}{۳}=۰/۵۷\right)$ (سراسری - ۸۲)

۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۶۰
۴) ۷۵

حل: در این سؤال مقدار طول وتر (C) و طول مماس (T) داده شده است، بنابراین داریم:

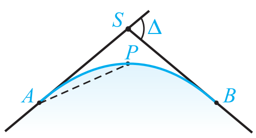
$$\begin{cases} C=۲R\ sin\frac{\Delta}{۲}\ \Rightarrow\ ۲۰۰=۲R\ sin\frac{\Delta}{۲} & (I)\\ T=R\ tan\frac{\Delta}{۲}\ \Rightarrow\ ۱۲۵=R\ tan\frac{\Delta}{۲} & (II)\end{cases}$$

حال اگر رابطه (I) را بر رابطه (II) تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\frac{I}{II}}\ \frac{۲۰۰}{۱۲۵}=\frac{۲R\ sin\frac{\Delta}{۲}}{R\ tan\frac{\Delta}{۲}}\ \Rightarrow\ ۱/۶=۲cos\frac{\Delta}{۲}\ \Rightarrow\ cos\frac{\Delta}{۲}=۰/۸\ \Rightarrow\ \boxed{\Delta=۶۰^{\circ}}$$

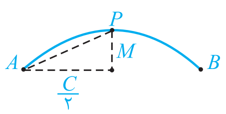
بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

تمرین ۳: با توجه به شکل زیر اگر نقطه P وسط قوس باشد، طول AP برابر است با:



۱) $۲R\ sin\frac{\Delta}{۴}$
۲) $R\ sin\frac{\Delta}{۴}$
۳) $۲T\ sin\frac{\Delta}{۴}$
۴) $T\ sin\frac{\Delta}{۴}$

حل: برای حل این تمرین، قوس را با اجزای آن بیرون می‌کشیم:



با استفاده از قضیه فیثاغورث داریم:

$$AP^2 = M^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 \Rightarrow AP = \sqrt{(M)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2}$$

$$\begin{cases} M = R\left(1-\cos\frac{\Delta}{2}\right) \\ C = 2R\sin\frac{\Delta}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{استفاده از قضایای مثلثاتی}} AP = 2R\sin\frac{\Delta}{4}$$

تذکر: پاره‌خطی که ابتدای قوس یا انتهای قوس را به وسط قوس وصل می‌کند، **طول وتر کوچک قوس** می‌نامند و با حرف P نمایش می‌دهند. $AP = P =$ طول وتر کوچک قوس

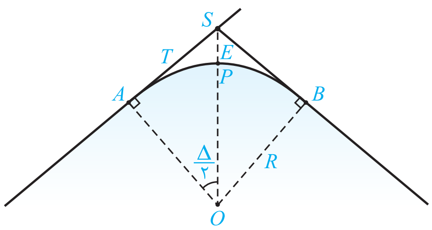
حل با استفاده از ریاضیات

$$AP = \sqrt{\left[R\left(1-\cos\frac{\Delta}{2}\right)\right]^2 + \left[R\sin\frac{\Delta}{2}\right]^2} = R\sqrt{1+\cos^2\frac{\Delta}{2} - 2\cos\frac{\Delta}{2} + \sin^2\frac{\Delta}{2}}$$

$$\xrightarrow[\cos^2\frac{\Delta}{2}+\sin^2\frac{\Delta}{2}=1]{\cos\frac{\Delta}{2}=1-2\sin^2\frac{\Delta}{4}} AP = R\sqrt{2-2\left(1-2\sin^2\frac{\Delta}{4}\right)} = R\sqrt{4\sin^2\frac{\Delta}{4}} = 2R\sin\frac{\Delta}{4}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

تمرین ۴: در طراحی یک مسیر افقی از یک قوس دایره‌ای ساده (مطابق شکل) استفاده شده است. مقدار طول خارجی E با کدام گزینه برابر است؟ (سراسری - ۸۰)

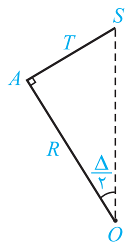


۱) $E = R\left(1-\dfrac{1}{\cos\frac{\Delta}{2}}\right)$

۲) $E = R\left(R-\dfrac{R}{\cos\frac{\Delta}{2}}\right)$

۳) $E = R\left(\dfrac{1}{\cos\frac{\Delta}{2}}-1\right)$

۴) $E = R\left(1-\dfrac{R}{\cos\frac{\Delta}{2}}\right)$



حل: مقدار طول خارجی (E) در اصطلاح، **طول خارجی** و یا **طول بی‌سیکتریس** نامیده می‌شود و آن را با BI هم نمایش می‌دهند. برای به‌دست آوردن این طول، مثلث $A\overset{\Delta}{O}S$ را در نظر بگیرید:

$$\Rightarrow \cos\frac{\Delta}{2} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{R}{OS} \Rightarrow OS = \frac{R}{\cos\frac{\Delta}{2}}$$

اگر در شکل صورت سؤال دقت کنید متوجه خواهید شد که:

$$E = OS - \underbrace{\boxed{OP}}_{R} = \frac{R}{\cos\frac{\Delta}{2}} - R \Rightarrow E = R\left(\frac{1}{\cos\frac{\Delta}{2}}-1\right)$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

کمی خلاقیت

واحد طول خارجی E همانطور که از نامش پیداست، واحد طول است. بنابراین گزینه‌های ۲ و ۴ که یکای آن مجذور طول است، نمی‌تواند جواب این تست باشد. همچنین عبارت $\frac{۱}{cos\frac{\Delta}{۲}}$ همواره بزرگتر از ۱ است، بنابراین عبارت $۱-\frac{۱}{cos\frac{\Delta}{۲}}$ در گزینه ۱، یک عبارت همواره منفی است در حالی‌که طول E، عددی مثبت است، پس اگر به روابط هندسی در راهسازی هم مسلط نباشید، می‌توانستید گزینه ۳ را با کمی فکر کردن به‌عنوان پاسخ صحیح این تست انتخاب کنید.

تمرین ۵: در قوسی به شعاع ۱۵۰ متر و طول قوس ۳۱۴ متر، طول خارجی قوس E = ۱۵۰ متر است. طول میانی قوس چند متر است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۷۵ ۳) ۵۰ ۴) ۱۲۰

حل:

راه حل اول: برای حل این سؤال، ابتدا باید رابطهٔ طول میانی و طول خارجی را پیدا کنیم:

$$E=R(\frac{۱}{cos\frac{\Delta}{۲}}-۱)=R(\frac{۱-cos\frac{\Delta}{۲}}{cos\frac{\Delta}{۲}}) \Rightarrow E\,cos\frac{\Delta}{۲}=\underbrace{R(۱-cos\frac{\Delta}{۲})}_{M} \Rightarrow M=E\,cos\frac{\Delta}{۲}$$

می‌توان گفت نسبت طول میانی به طول خارجی برابر $cos\frac{\Delta}{۲}$ می‌باشد:

$$\boxed{\frac{M}{E}=cos\frac{\Delta}{۲}}$$

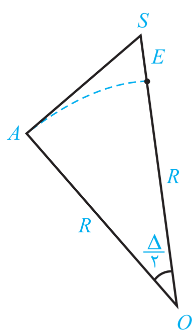
با استفاده از رابطه طول قوس و شعاع قوس، زاویه انحراف (Δ) را به‌دست می‌آوریم:

$$L=R.\Delta \Rightarrow ۳۱۴=۱۵۰\Delta \Rightarrow \Delta=\frac{۳۱۴}{۱۵۰}rad \Rightarrow \Delta=\frac{۳۱۴}{۱۵۰}\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۱۲۰^\circ$$

در نهایت مقدار M برابر است با:

$$M=E\,cos\frac{\Delta}{۲} \Rightarrow M=۱۵۰\times cos\,۶۰^\circ \Rightarrow M=۷۵\,m$$

راه حل دوم: با توجه به شکل تمرین ۴ می‌توان رابطه $cos\frac{\Delta}{۲}$ را در مثلث $A\overset{\Delta}{S}O$ به‌صورت زیر نوشت:



$$\Rightarrow cos\frac{\Delta}{۲}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{R}{R+E}\xrightarrow{\text{در این تست}}cos\frac{\Delta}{۲}=\frac{۱۵۰}{۱۵۰+۱۵۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{۲}=۶۰^\circ \Rightarrow \Delta=۱۲۰^\circ$$

بنابراین مقدار M برابر است با:

$$M=R(۱-cos\frac{\Delta}{۲})=۱۵۰(۱-cos\,۶۰^\circ)=۷۵\,m$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

تمرین ۶: در یک قوس دایره‌ای ساده، کوتاهترین فاصله بین نقطه شروع قوس و انتهای قوس ۲۸۰ متر است. درصورتی‌که درجه این قوس $۲/۸۶^\circ$ باشد، نسبت طول خارجی قوس به طول داخلی قوس چقدر است؟ ($\frac{\sqrt{۲}}{۲} \simeq ۰/۷$)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حل: می‌دانیم که نسبت طول خارجی یک قوس (E) به طول داخلی قوس (M)، برابر است با:

$$\frac{E}{M} = \frac{۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}$$

بنابراین با توجه به داده‌های مسئله اگر مقدار Δ را محاسبه کنیم، عملاً این نسبت به‌دست خواهد آمد، پس داریم:

$$D^\circ = \frac{۵۷۳}{R} \Rightarrow R = \frac{۵۷۳}{۲/۸۶} = ۲۰۰\,m$$

منظور از طول کوتاهترین فاصله بین نقطه شروع قوس و انتهای قوس، طول وتر (C) است، بنابراین:

$$C = ۲R\sin\frac{\Delta}{۲} \Rightarrow ۲۸۰ = ۲\times۲۰۰\sin\frac{\Delta}{۲} \Rightarrow \sin\frac{\Delta}{۲} = ۰/۷ \Rightarrow \frac{\Delta}{۲} = ۴۵ \Rightarrow \Delta = ۹۰^\circ$$

$$\frac{E}{M} = \frac{۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}} = \frac{۱}{\cos ۴۵} = \frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \sqrt{۲}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

بعد از آشنایی کامل شما مهندسین گرامی با اصلی‌ترین مباحث قوس دایره‌ای ساده، در انتها روابط مربوط به اجزای قوس (زوایا - طول‌ها) به‌صورت خلاصه، در جدول زیر آورده شده است:

جمع‌بندی

اجزای قوس	رابطه
درجه قوس	$D^{rad} = \frac{۱۰}{R_m}$, $D^\circ = \frac{۵۷۳}{R_m}$
طول قوس	$L = R.\Delta^{rad}$, $L = \frac{\pi R\Delta^\circ}{۱۸۰}$
طول مماس	$T = R\tan\frac{\Delta}{۲}$
طول وتر بزرگ	$C = ۲R\sin\frac{\Delta}{۲}$
طول درونی (میانی)	$M = R(۱-\cos\frac{\Delta}{۲})$
طول بیرونی (بی‌سیکتریس)	$E = BI = R(\frac{۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}-۱)$

اگر به روابط جدول بالا دقت کنید متوجه می‌شوید که:

۱) با افزایش شعاع دایره (شعاع قوس دایره‌ای)، مقادیر طول‌ها افزایش می‌یابد، یعنی شعاع یک قوس رابطه مستقیم و خطی با تمامی طول‌ها در یک قوس دایره‌ای دارد: $R\uparrow \Rightarrow (L, T, C, M, E)\uparrow$

۲) درجه قوس با شعاع دایره رابطه عکس و غیرخطی دارد: $R\uparrow \Rightarrow D\downarrow$

تست‌های فصل دوم *

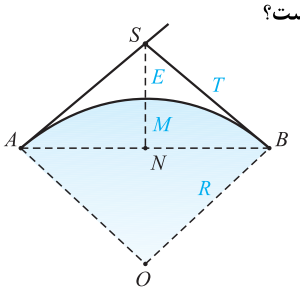
۱- در یک قوس دایره‌ای ساده با زاویه انحراف $\frac{\pi}{۲}$ و درجه قوس $۵/۷۳^\circ$، کوتاهترین فاصله نقطه شروع قوس تا نقطه انتهای قوس و همچنین طول تانژانت مسیر به‌ترتیب چند متر هستند؟

۱) $۱۰۰\sqrt{۲}$ و ۱۰۰ ۲) ۱۰۰ و $۱۰۰\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}$ و ۱۰۰ ۴) $\frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}$ و $۱۰۰\sqrt{۲}$

۲- در طراحی یک جاده، از قوسی با طول وتر بزرگ ۲۴۰ متر و طول تانژانت ۱۵۰ متر استفاده شده است. اگر فاصله رأس قوس تا وسط قوس ۵۰ متر باشد، شعاع قوس چند متر است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۲۷۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۲۰۰

۳- با توجه به شکل زیر کدام‌یک از روابط زیر بین اجزای قوس دایره‌ای صحیح نیست؟

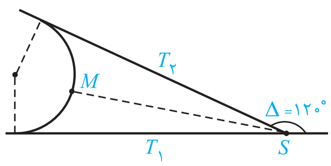


۱) $T > E$
۲) $M > E$
۳) $T > M$
۴) $M < R$

۴- در یک قوس دایره‌ای ساده طول مماس قوس برابر ۲۰۰ متر است. اگر زاویه انحراف قوس ۹۰ درجه باشد، آنگاه طول بیرونی قوس چند برابر طول میانی قوس است؟ $(D = ۲/۸۶^\circ)$

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۵- در پلان مسیر شکل زیر از قوس دایره‌ای به شعاع ۱۲۰ متر استفاده شده است. اندازه فاصله MS چقدر است؟



۱) ۱۲۰ متر
۲) ۱۳۰ متر
۳) ۱۲۵ متر
۴) ۱۱۵ متر

۶- طول خارجی قوس را می‌توان با استفاده از کدام‌یک از گزینه‌های زیر به‌دست آورد؟

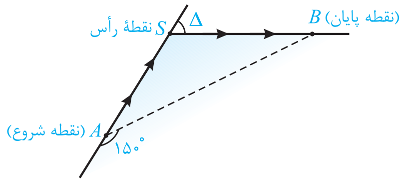
۱) $T \sin \frac{\Delta}{۲}$ ۲) $R \sin \frac{\Delta}{۴}$ ۳) $T \tan \frac{\Delta}{۴}$ ۴) $T \sin \frac{\Delta}{۴}$

۷- شعاع قوس افقی در جاده‌ای ۵۰۰ متر و زاویه خارجی قوس ۶۰° است. کوتاهترین فاصله بین شروع و انتهای قوس برای این جاده چند متر است؟ (سراسری - ۷۳)

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۱۲۰۰ ۴) ۵۰۰

* تست‌هایی که در کنار آنها علامت * زده شده است، تست‌هایی هستند که درجه سختی آنها کمی زیاد است.

۸- در پلان زیر اگر بخواهیم برای رسیدن از A به B از یک قوس دایره‌ای استفاده کنیم، کدام‌یک از گزینه‌های زیر برحسب متر می‌تواند به‌ترتیب بیانگر طول قوس و طول شعاع قوس باشد؟



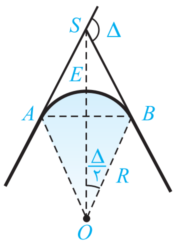
۱) ۲۰۰−۱۵۷

۲) ۱۰۰−۳۱۴

۳) ۳۰۰−۳۱۴

۴) ۳۰۰−۱۵۷

۹- در طراحی یک مسیر افقی از یک قوس دایره‌ای ساده (مطابق شکل) استفاده شده است. مقدار طول خارجی E با کدام گزینه برابر است؟ (سراسری - ۸۰)



۱) $E = R\left(۱-\frac{۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}\right)$

۲) $E = R\left(R-\frac{R}{\cos\frac{\Delta}{۲}}\right)$

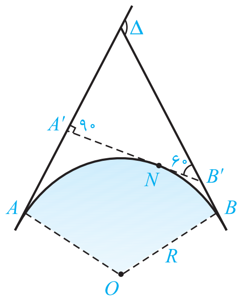
۳) $E = R\left(\frac{۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}-۱\right)$

۴) $E = R\left(۱-\frac{R}{\cos\frac{\Delta}{۲}}\right)$

۱۰- در پلان روبه‌رو با توجه به اطلاعات زیر، شعاع قوس (R) تقریباً چند متر است؟

الف) $A'B'$ در نقطه N بر دایره مماس شده است.

ب) $A'B' = ۱۵۷$



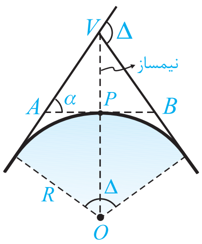
۱) ۳۰۰

۲) ۲۰۰

۳) ۱۰۰

۴) ۵۰

۱۱- خط AB مماس بر قوس ساده دایره‌ای شکل می‌باشد. اندازه زاویه α نسبت به Δ کدام است؟ (آزاد - ۸۴)



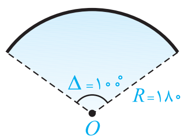
۱) $\alpha = \Delta$

۲) $\frac{۱}{۴}\alpha = \Delta$

۳) $\frac{۱}{۲}\alpha = \Delta$

۴) $۲\alpha = \Delta$

۱۲- اگر قوس ساده دایره‌ای شکل دارای شعاع $R = ۱۸۰\,m$ باشد و زاویه قوس $\Delta = ۱۰۰^\circ$ باشد، طول کمان قوسی چند متر می‌شود؟



۱) $L = ۳۱۴$

۲) $L = ۱۸۰$

۳) $L = ۳۶۰$

۴) $L = ۹۸$

پاسخ تست‌های فصل دوم

۱- (۱)

برای محاسبه هر نوع طولی در یک قوس دایره‌ای، اولین پارامتر مورد نیاز، شعاع قوس دایره‌ای (R) می‌باشد که در این تست می‌توان آن را از رابطه درجه قوس به‌صورت مقابل محاسبه کرد: $R=\frac{۵۷۳}{D^{\circ}}=\frac{۵۷۳}{۵/۷۳}=۱۰۰\,m$

منظور از کوتاهترین فاصله نقطه شروع قوس تا نقطه انتهای قوس، طول وتر بزرگ (C) است، بنابراین داریم:

$$C=۲R\sin\frac{\Delta}{۲}=۲\times۱۰۰\sin\frac{\frac{\pi}{۲}}{۲}=۲۰۰\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۱۰۰\sqrt{۲}\,m$$

منظور از طول تانژانت، طول مماس (T) است، بنابراین داریم: $T=R\tan\frac{\Delta}{۲}=۱۰۰\times\tan\frac{\frac{\pi}{۲}}{۲}=۱۰۰\,m$

۲- (۴)

در این تست می‌توان با به کار بردن یک خلاقیت بین روابط C و T که در متن درس مطرح شده بود، ابتدا زاویه انحراف در جاده را تعیین کنیم، بنابراین داریم:

$$\frac{C}{T}=۲\cos\frac{\Delta}{۲}\Rightarrow\frac{۲۴۰}{۱۵۰}=۲\cos\frac{\Delta}{۲}\Rightarrow\cos\frac{\Delta}{۲}=۰/۸$$

روش اول: فاصله رأس قوس تا وسط قوس را **طول بی‌سیکتریس** می‌نامند که مقدار آن از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$E=R\left(\frac{۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}-۱\right)\Rightarrow ۵۰=R\left(\frac{۱}{۰/۸}-۱\right)\Rightarrow R=۲۰۰\,m$$

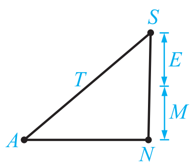
روش دوم: می‌توان با استفاده از رابطهٔ وتر بزرگ قوس (C) مقدار شعاع را به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$\cos\frac{\Delta}{۲}=۰/۸\Rightarrow\sin\frac{\Delta}{۲}=\sqrt{۱-\cos^{۲}\frac{\Delta}{۲}}=\sqrt{۱-(۰/۸)^{۲}}=۰/۶$$

$$C=۲R\sin\frac{\Delta}{۲}\Rightarrow ۲۴۰=۲R\times۰/۶\Rightarrow R=۲۰۰\,m$$

۳- (۲)

با توجه به روابط هر یک از اجزای قوس، تمامی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



گزینه ۱ و ۳: در مثلث $\overset{\Delta}{ANS}$، طول مماس T، وتر مثلث بوده و درنتیجه از سایر اضلاع بزرگ‌تر است:

$$T>SN\Rightarrow\begin{cases}T>E\\T>M\end{cases}$$

گزینه ۲: با توجه به رابطه طول خارجی و داخلی قوس که در متن درس ارائه شد، داریم:

$$\begin{cases}\frac{M}{E}=\cos\frac{\Delta}{۲}\\ ۰\le\cos\frac{\Delta}{۲}\le۱\end{cases}\xrightarrow{\text{بنابراین همواره می‌توان گفت}}E>M$$

گزینه ۴: با توجه به رابطه طول میانی قوس (M) و اینکه $۰\le\cos\frac{\Delta}{۲}\le۱$ است، همواره داریم:

$$۰\le\cos\frac{\Delta}{۲}\le۱\Rightarrow ۰\le۱-(\cos\frac{\Delta}{۲})\le۱\xrightarrow{\times R}۰\le R(۱-\cos\frac{\Delta}{۲})\le R\Rightarrow M<R$$

بنابراین رابطه ارائه شده در گزینه ۲ صحیح نیست.

۴- (۱)

ابتدا می‌توان با استفاده از درجه قوس، شعاع قوس را محاسبه کرد:

$$R = \frac{۵۷۳}{D} \Rightarrow R = \frac{۵۷۳}{۲/۸۶} \simeq ۲۰۰\, m$$

طول میانی قوس برابر است با:

$$M = R\,(۱ - cos\,\frac{\Delta}{۲}) = ۲۰۰\,(۱ - cos\,۴۵) = ۵۸/۵\, m$$

طول خارجی قوس برابر است با:

$$E = R\,(\frac{۱}{cos\,\frac{\Delta}{۲}} - ۱) = ۲۰۰\,(\frac{۱}{cos\,۴۵} - ۱) = ۸۲/۸\, m$$

$$\frac{E}{M} = \frac{۸۲/۸}{۵۸/۵} = ۱/۴۱ \simeq \sqrt{۲}$$

کمی خلاقیت

با کمی خلاقیت، به‌جای استفاده مستقیم از روابط و بدون نیاز به ماشین‌حساب می‌توان به‌صورت زیر نسبت طول بیرونی قوس را به طول درونی قوس محاسبه کرد:

$$\frac{M}{E} = \frac{R\,(۱ - cos\,\frac{\Delta}{۲})}{R\,(\frac{۱}{cos\,\frac{\Delta}{۲}} - ۱)} \Rightarrow \frac{M}{E} = cos\,\frac{\Delta}{۲} \Rightarrow \frac{E}{M} = \frac{۱}{cos\,\frac{\Delta}{۲}} \Rightarrow \frac{E}{M} = \frac{۱}{cos\,۴۵} = \sqrt{۲}$$

۵- (۱)

همانطور که مشاهده می‌شود مقدار MS همان مقدار طول خارجی قوس (بی‌سیکتریس) است که این طول از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$E = R\,(\frac{۱}{cos\,\frac{\Delta}{۲}} - ۱) \Rightarrow E = MS = ۱۲۰\,(\frac{۱}{cos\,۶۰} - ۱) \Rightarrow MS = ۱۲۰\, M$$

۶- (۳)

طول خارجی قوس (بی‌سیکتریس) از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$BI = E = R\,(\frac{۱}{cos\,\frac{\Delta}{۲}} - ۱) = R\,(\frac{۱ - cos\,\frac{\Delta}{۲}}{cos\,\frac{\Delta}{۲}})$$

با استفاده از قضایای مثلثاتی می‌توان نوشت:

$$۱ - cos\,\frac{\Delta}{۲} = ۲sin^{۲}\,\frac{\Delta}{۴} \Rightarrow E = R\,\frac{۲sin^{۲}\,\frac{\Delta}{۴}}{cos\,\frac{\Delta}{۲}}$$