مقدمه و راهنمای مطالعهٔ این کتاب:

انگار همین دیروز بود، معلم ما وارد کلاس شد و با یک گچ زرد رنگ بر روی تخته سیاه نوشت «درس ریاضی». به دنبال آن با صدای بلند گفت: درس ریاضی اصلی‌ترین و سخت‌ترین درس شماست که باید خیلی آن را جدی بگیرید، وگرنه در امتحان مردود می‌شوید. شما برای قبول شدن در این درس باید تلاش کنید، در کلاس به هیچ‌وجه حرف نزنید، تمرین‌های کتاب را تک‌تک حل کنید و... .

همین عباراتِ جدی بگیرید، حرف نزنید، تمرین زیاد حل کنید و...، که بارها تا پایان دوره دبیرستان و با کمی تغییر لحن در دانشگاه نیز آن را شنیده‌ایم ترس از یاد نگرفتن مفاهیم ریاضی را در بسیاری از ما نهادینه کرده است. این در حالی است که اصلی‌ترین مشکل دانشجویان در یادگیری درس شیرین ریاضی، مراجع (کتاب‌ها، جزوات و ...) آن است که با بی‌چهارچوبی و نامرتب‌بودن، انگیزه افراد را از بین می‌برند. البته گاهاً شیوه تدریس اشتباه معلمان و اساتید نیز بر آن می‌افزاید. ما معتقدیم درک ریاضی نیاز به استعداد و هوش ندارد و هر کسی در هر سطحی با شیوه آموزش درست و کمی تلاش می‌تواند این درس را به‌خوبی یاد بگیرد.

در این کتاب که در حدود ۲ سال نگارش آن زمان برده است، با عشق و علاقه، کلیه مراجع و منابع جدید این درس را، که در بهترین دانشگاه‌های دنیا تدریس می‌شوند، در کنار تجربیات خود قرار دادیم و تلاش کردیم تا نشان دهیم که ما می‌توانیم به جذاب‌ترین شکل ممکن ریاضی را به شما بیاموزیم و ترس از این درس را از بین ببریم. برای استفاده هر چه بهتر از این کتاب به موارد زیر توجه کنید:

۱ در اولین قدم برای بهتر شدن روند یادگیری شما عزیزان، هر فصل را به چند قسمت کوچکتر تقسیم کرده‌ایم تا هم تفکیک مطالب در ذهن شما بهتر انجام شود و هم از مطالعه یک فصل طولانی خسته نشوید. همچنین می‌توانید در هر بار مطالعه، یک قسمت از هر فصل را به‌خوبی بخوانید.

۲ برای چیدمان تمرین‌ها ساعت‌ها فکر کرده‌ایم و تمرین‌ها را با یک روند آموزشی بسیار منظم آورده‌ایم. همچنین در لابه‌لای تمرین‌ها مطالبی از قبیل کمی خلاقیت، کمی دقت و ... گنجانده‌ایم تا شما را به ریاضی علاقه‌مندتر کنیم.

۳ در دومین قدم بعد از مطالعه دقیق درسنامه‌های هر فصل، بخشی تحت عنوان افزایش مهارت و تسلط بیشتر را در کتاب قرار دادیم که با مطالعه دقیق آن به جرأت می‌توان گفت هیچ تستی باقی نمی‌ماند که ایده اصلی آن برای شما آشنا نباشد.

۴ در قدم بعد بخش جذاب توصیه‌نامه را در کتاب قرار داده‌ایم تا بعد از مطالعه کامل هر فصل، یک‌بار دیگر نکات مهم و کاربردی آن را با هم مرور کنیم.

۵ اگر موارد فوق را به‌خوبی انجام داده باشید، قادر خواهید بود که تست‌های انتهای هر فصل را خودتان حل کنید. از سوی دیگر در نظرسنجی که از تعداد زیادی از دانشجویان انجام دادیم، متقاعد شدیم که به‌جای حل تشریحی، پاسخ کلیدی سوالات را در انتهای هر فصل کتاب ارائه کنیم(پاسخ تشریحی کامل‌تر را می‌توانید در سایت www.serieomomi.ir مشاهده کنید).

جالب است بدانید بعد از گذشت فقط یک سال از چاپ اول، ویرایش جدید کتاب را برای شما عزیزان فراهم آوردیم تا از یک سو با برطرف کردن نقاط ضعف و تقویت نقاط قوت کتاب و از سوی دیگر با به روزرسانی مسائل در درسنامه هر فصل، بتوانیم در این مسیر پرپیچ و خم همراه شایسته‌ای برای شما باشیم.

همزمان با ویرایش جدید کتاب، سایت www.serieomomi.ir نیز به شکل فعال‌تر، با تیم قدرتمندتر و در سطح بسیار وسیع‌تری، بعد از شناسایی تمامی نیازهای شما آماده خدمات رسانی به دانشجویان عزیز است. خدمات ارائه شده در سایت سری عمومی عبارت است از:

۱- پاسخ دهی به سوالات شما عزیزان و رفع اشکال به صورت روزانه

۲- ارائه برنامه مطالعه کتاب به صورت هفتگی

۳- برگزاری آزمون به صورت ماهانه

۴- مشاوره تخصصی درس ریاضیات

۵- ارائه پاسخ تشریحی سوالات کنکور سراسری در رشته‌های مختلف

۶- بودجه‌بندی سؤالات کنکور رشته‌های مختلف

۷- نمایش فیلم‌های آموزشی کوتاه

امیدواریم که به نوعی بزرگترین کلاس درس ریاضی را با کمک شما دانشجویان عزیز تشکیل داده و تا رسیدن به سطح عالی ریاضیات با شما همراه باشیم.

 تجربه نشان داده است، کسانی‌که ریاضی را با این شیوه نوین یاد می‌گیرند، قادر خواهند بود آن را با کیفیت خوبی تدریس کنند. از اینرو صمیمانه از شما تقاضا داریم بعد از مطالعه این کتاب، مباحث جدیدی که یاد گرفته‌اید را به دوستان خود نیز بیاموزید تا این مفاهیم ناب ریاضی در سراسر این مرز و بوم، حتی دورترین و محروم‌ترین نقاط کشور نیز انتشار یابد.

در این قسمت ابتدا از خانواده‌های صبورمان که در تمامی مراحل تهیه این کتاب پا به پای ما، فشار این کار را تحمل کردند، نهایت تشکر و قدردانی را داریم. در ادامه از دوست ارجمند، دکتر محمد آهنگر که در لحظه لحظه تألیف این کتاب ما را یاری کرده و از نظرات ارزشمندشان بهره بردیم، تشکر می‌کنیم. لازم است از جناب آقای دکتر شریفیان مدیریت محترم انتشارات، که تمام امکانات لازم جهت هر چه بهتر انجام شدن این پروژه را در اختیار ما گذاشته‌اند و همچنین ویراستاران این اثر، سرکار خانم مهندس الهام طاهرشمس و سرکار خانم مهندس فریبا محمدی‌منش نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشیم.

علیرغم تلاش‌های فراوانی که برای بازبینی این کتاب شده است، وجود اشکال در آن ممکن بوده و از اساتید گرانقدر و دانشجویان عزیز تقاضا می‌شود، پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق سایت www.serieomomi.ir مطرح نمائید.

محمد صادق معتقدی – مسعود مهدیان – مجید فرقانی

فهرست

سری عمومی ارشد

فصل اول:

حد

مروری بر آنچه خواهیم خواند:

مفهوم حد یکی از مفاهیم بنیادی در ریاضیات است که شالوده و اساس بسیاری از مباحث مهم دیگر ریاضی نظیر پیوستگی، مشتق‌پذیری، دنباله، سری و ... می‌باشد. درواقع به کمک حد، می‌توان رفتار یک تابع در اطراف یک نقطه را بررسی کرد و سپس در مورد پیوستگی یا مشتق‌پذیری آن نظر داد.

از سوی دیگر مبحث حد از جمله مباحث مهم درس ریاضی در کنکور کارشناسی ارشد نیز به‌شمار می‌آید، به طوریکه در سال‌های اخیر، تست‌های زیادی در رشته‌های مختلف به‌صورت مستقیم و غیرمستقیم از بحث حد مطرح شده است.

در این فصل انواع سؤالات حد را با یک طبقه‌بندی مناسب به‌گونه‌ای از هم تفکیک کرده‌ایم که بعد از مطالعهٔ آن، قادر خواهید بود که هر نوع مسئله حد را با اندکی دقت در بخش موردنظر جای داده و سپس با کمک دستورالعمل مربوط به حل آن، به‌سادگی به جواب صحیح برسید.

در این فصل ابتدا بر روی مفاهیم اولیه و حدهای بدون ابهام بحث کرده و سپس شیوهٔ تحلیل حدهای مبهم را به شما یاد می‌دهیم. مطالب این فصل به‌صورت زیر ارائه شده است:

- حد
  - مفاهیم و حدود بدون ابهام
    - A – بررسی مفاهیم اولیه حد
    - B – حد با جواب قابل پیش‌بینی
  - حد با جواب مبهم
    - C – حالت‌های مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$
    - D – حالت‌های مبهم $\infty-\infty$ و $0\times\infty$
    - E – حالت‌های مبهم نمایی

قسمت اول (بررسی مفاهیم اولیه حد)

زیر شاخه‌های قسمت اول

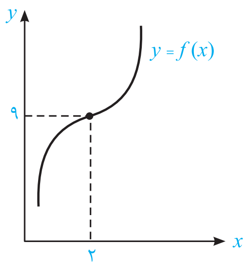
A-۱ - تعریف حد

A-۲- بررسی مفهوم همسایگی در حد و مفاهیم حد چپ و راست

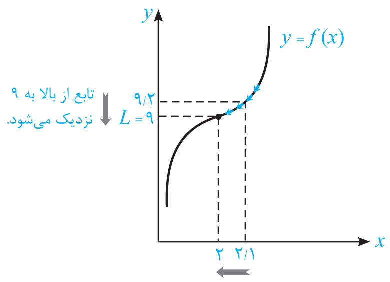
A-۱- تعریف حد

به‌طور کلی یک حد را به شکل $\lim_{x \to x_\circ} f(x) = L$ نشان می‌دهیم و بر طبق آن می‌گوییم **حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت $x_\circ$ میل می‌کند، برابر L است.** مفهوم حد فوق این است که هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم $f(x)$ را به سمت L نزدیک کنیم، در صورتیکه x به اندازهٔ کافی به نقطهٔ $x_\circ$ نزدیک شده باشد (اما x برابر با $x_\circ$ نشده باشد).

برای درک بهتر این مفهوم، به نمودار مقابل توجه کنید. با کمی دقت در این نمودار می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

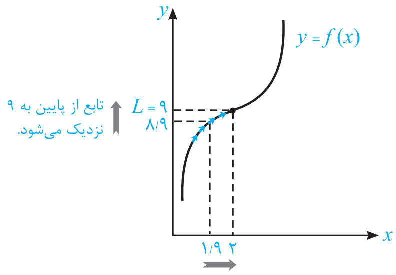


۱- در این نمودار با نزدیک شدن از سمت راست به عدد $x_\circ = ۲$ بر روی محور x (مثلاً از ۲/۱ به سمت ۲ حرکت می‌کنیم)، مقدار تابع $f(x)$ نیز بر روی محور y از بالا به عدد $L = ۹$ نزدیک می‌شود (مثلاً از ۹/۲ به ۹ نزدیک می‌شود).



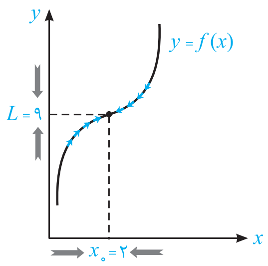
از سمت راست در راستای x به ۲ نزدیک می‌شویم.

۲- اگر از سمت چپ بر روی محور x به سمت عدد $x_\circ = ۲$ نزدیک شویم (مثلاً از ۱/۹ به سمت ۲ حرکت کنیم)، می‌توان مشاهده کرد که مقدار تابع بر روی محور y از پایین به عدد $L = ۹$ نزدیک می‌شود (مثلاً از ۸/۹ به ۹ نزدیک می‌شود).



از سمت چپ در راستای x به ۲ نزدیک می‌شویم.

دانشجویان عزیز توجه کنید که آخرین فصل کتاب، فصلی به نام پیوست است که در آن مفاهیم ریاضیات دوران دبیرستان را دوره کرده‌ایم. درصورتی‌که این مفاهیم را فراموش کرده‌اید، ابتدا نگاهی گذرا بر روی آن فصل بیاندازید.

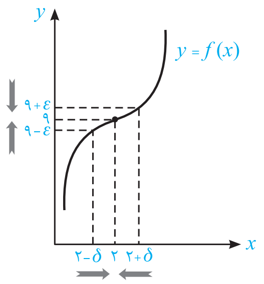


۳- حال از دو طرف در راستای محور x به عدد ۲ = $x_۰$ نزدیک می‌شویم و مشاهده می‌کنیم که تابع $f(x)$ در راستای y از بالا و پایین به عدد ۹ = L نزدیک می‌شود و این همان تعریف سادهٔ حد است که برای این مثال به‌صورت زیر بیان می‌شود:

هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم $f(x)$ را به ۹ نزدیک کنیم، در صورتیکه x را به اندازهٔ کافی به ۲ نزدیک کرده باشیم.

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۹ \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to x_۰} f(x)=L$$

A-۲- بررسی مفهوم همسایگی در حد و مفاهیم حد چپ و راست



در ادامهٔ بحث، با توجه به نمودار مقابل مشاهده می‌کنیم که با نزدیک شدن x به عدد ۲، $f(x)$ به عدد ۹ نزدیک می‌شود. با کمی توجه در این شکل می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- فرض کنید بخواهیم $f(x)$ به اندازه‌ای به عدد ۹ نزدیک شود که در بازهٔ $(۹-\varepsilon, ۹+\varepsilon)$ قرار گیرد، یعنی به‌ازای یک عدد کوچک دلخواه دادهٔ شدهٔ $\varepsilon>۰$، $f(x)$ عضو بازهٔ $(۹-\varepsilon, ۹+\varepsilon)$ باشد. این موضوع یعنی فاصلهٔ مقدار تابع از ۹ کمتر از ε باشد $(|f(x)-۹|<\varepsilon)$ و به بیان ریاضی می‌توان نوشت:

$$^{*}\forall \varepsilon>۰ \;,\; ۹-\varepsilon<f(x)<۹+\varepsilon \;\Leftrightarrow\; |f(x)-۹|<\varepsilon \qquad (۱)$$

۲- در این‌صورت همانطور که از شکل پیداست، می‌توان عدد کوچکی مانند $\delta>۰$ را به‌گونه‌ای یافت که وقتی x در بازهٔ $(۲-\delta, ۲+\delta)$ قرار گیرد، آنگاه $f(x)$ در بازهٔ $(۹-\varepsilon, ۹+\varepsilon)$ باشد و می‌توان نوشت:

$$x\in(۲-\delta, ۲+\delta) \;\Leftrightarrow\; ۲-\delta<x<۲+\delta \;\Leftrightarrow\; |x-۲|<\delta \qquad (۲)$$

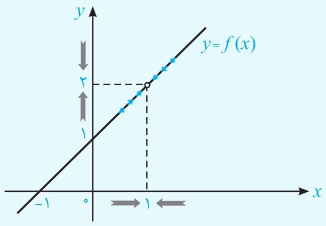
۳- بنابراین با استفاده از روابط (۱) و (۲) می‌توان مفهوم حد $\lim_{x\to ۲} f(x)=۹$ را به بیان ریاضی به‌صورت زیر نوشت:

$$\forall \varepsilon>۰ \quad \exists \delta>۰ \;\text{بطوریکه}\; |x-۲|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-۹|<\varepsilon$$

بنابراین برای اثبات وجود حد $\lim_{x\to ۲} f(x)=۹$، کافی است برای هر $\varepsilon>۰$ دلخواه، عدد $\delta>۰$ را به‌گونه‌ای تعیین کنیم که بتوان از نامساوی $|x-۲|<\delta$، نامساوی $|f(x)-۹|<\varepsilon$ را نتیجه گرفت (معمولاً δ را برحسب ε تعیین می‌کنند).

* آشنایی با چند علامت ساده در تعاریف ریاضی $\Leftarrow$ $\forall$: به‌ازای هر، $\exists$: وجود دارد

بررسی چند نکته مفهومی



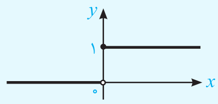
۱) نمودار یک تابع مطابق شکل مقابل را درنظر بگیرید. می‌خواهیم با توجه به نمودار تابع $f(x)$، درمورد حد آن در نقطهٔ $x=1$ اظهارنظر کنیم:

همانطور که در شکل مقابل مشاهده می‌کنیم، اگر روی نمودار $f(x)$ در راستای محور xها به عدد ۱ نزدیک شویم، مقدار تابع در راستای محور yها به عدد ۲ نزدیک می‌شود. پس می‌توان نوشت: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

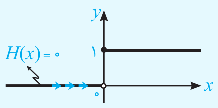
این در حالی است که مقدار تابع در $x=1$ تعریف نشده است. بنابراین می‌توان دریافت که در محاسبهٔ حد، کاری به مقدار تابع در آن نقطه نداریم بلکه کافی است تابع در یک همسایگی محذوف نقطهٔ موردنظر تعریف شده باشد. همسایگی که نقطهٔ x_0 از آن حذف شده باشد را **همسایگی محذوف** x_0 می‌نامند.

۲) تابع هوی‌ساید که به افتخار آقای اولیور هوی‌ساید، مهندس الکترونیک هلندی نام‌گذاری شده است، برای نشان دادن جریان الکتریکی هنگام زدن کلید در زمان $t=0$ به‌کار می‌رود، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

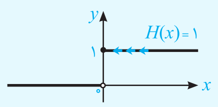
$$H(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$



نمودار این تابع را در شکل فوق درنظر گرفته و به موارد زیر توجه کنید:



الف) وقتی x از سمت چپ به صفر میل می‌کند (نزدیک می‌شود)، مقدار تابع $H(x)$ در نزدیکی صفر برابر صفر است و در اصطلاح می‌گوییم حد چپ تابع در نقطهٔ صفر، برابر است با: $\lim\limits_{x \to 0^-} H(x) = 0$: حد چپ



ب) زمانی‌که x از سمت راست به عدد صفر نزدیک می‌شود، مقدار تابع $H(x)$ برابر یک است و می‌گوییم که حد راست تابع در نقطهٔ صفر، برابر است با: $\lim\limits_{x \to 0^+} H(x) = 1$: حد راست

تذکر: احتمالاً متوجه شده‌اید که $x \to 0^-$ یعنی x از طرف اعداد کوچکتر از صفر (سمت چپ) به صفر میل می‌کند (به‌طور مثال $-0/01$). بنابراین می‌توان گفت که صفر منفی (0^-)، یک عدد منفی بسیار نزدیک به صفر و به همین ترتیب، صفر مثبت (0^+) یک عدد مثبت بسیار نزدیک به صفر است.

۳) شرط لازم و کافی برای آنکه تابع در یک نقطه حد داشته باشد، آن است که اولاً حد چپ و راست وجود داشته و ثانیاً مقدار این دو حد با هم برابر باشند. با توجه به این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که تابع هوی‌ساید $H(x)$ در نقطهٔ صفر حد ندارد.

۴) توابع چند جمله‌ای، توانی، مثلثاتی، هایپربولیک، کسری، لگاریتمی و معکوسشان در دامنهٔ تعریف خود، همواره دارای حد می‌باشند و حدشان با مقدارشان برابر است. پس در اینگونه توابع با قرار دادن نقطهٔ موردنظر در ضابطهٔ تابع، جواب حد آنها به سادگی قابل محاسبه است.

مثال: $\lim\limits_{x \to 0} (2x^2+3x-1) = 2\times 0^2 + 3\times 0 - 1 = -1$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 1} \sinh x = \lim_{x \to 1} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^1 - e^{-1}}{2}$$

در ادامه با چند تمرین، مفاهیم ارائه شده را برای شما بیشتر بررسی می‌کنیم.

تمرین ۱: برای اثبات حد تابع $f(x)=4x^2+4x$ در همسایگی $x_0=-\frac{1}{2}$ با انتخاب $\varepsilon=\frac{1}{64}$، حداکثر δ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{64}$ ۴) $\frac{1}{128}$ (صنایع - ۸۷)

حل: با توجه به مفهوم ریاضی حد، می‌توان نوشت:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \text{ بطوری که } |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

با جایگذاری $x_0=-\frac{1}{2}$ و $L=f(-\frac{1}{2})=4\times(-\frac{1}{2})^2+4\times(-\frac{1}{2})=-1$ در رابطهٔ بالا به‌دست می‌آید:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \text{ بطوری که } |x-(-\frac{1}{2})|<\delta \Rightarrow |f(x)-(-1)|<\frac{1}{64}$$

معمولاً در چنین مواقعی برای محاسبهٔ δ، از عبارت دوم ($|f(x)-L|<\varepsilon$) شروع می‌کنیم و با ساده کردن آن تلاش می‌کنیم به عبارت اول ($|x-x_0|<\delta$) برسیم و به این ترتیب δ به‌دست می‌آید، پس داریم:

$$|f(x)-L|<\frac{1}{64} \Leftrightarrow |4x^2+4x-(-1)|<\frac{1}{64} \Leftrightarrow |4x^2+4x+1|<\frac{1}{64} \Leftrightarrow |(2x+1)^2|<\frac{1}{64}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین جذر می‌گیریم}} |2x+1|<\frac{1}{8} \xrightarrow{\text{طرفین را به ۲ تقسیم می‌کنیم}} |x+\frac{1}{2}|<\frac{1}{16} \quad (1)$$

یک‌بار دیگر مفهوم حد را می‌نویسیم:

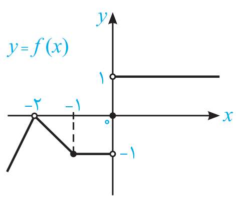
$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \text{ بطوری که } |x+\frac{1}{2}|<\delta \Rightarrow |f(x)+1|<\frac{1}{64} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |x+\frac{1}{2}|<\frac{1}{16}$$

پس می‌توان نوشت:

$$|x+\frac{1}{2}|<\frac{1}{16} \xrightarrow{\text{معادل است با}} |x+\frac{1}{2}|<\delta \Rightarrow \delta\le\frac{1}{16}$$

بنابراین حداکثر δ برابر است با $\frac{1}{16}$ و درنتیجه گزینهٔ (۲) صحیح است.

تمرین ۲: با توجه به شکل زیر، جواب حدهای زیر را درصورت وجود بیابید.



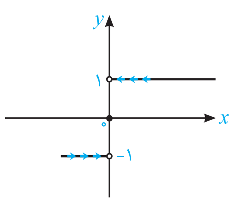
الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

حل: در این سؤال می‌خواهیم مفهوم حد چپ و راست را کمی بهتر درک کنیم. به همین منظور بـه توضیحات داده شده توجه کنید:

الف) برای محاسبهٔ حد تابع $f(x)$ در نقطهٔ صفر، باید حد چپ و راست را جداگانه در آن نقطه محاسبه کرد. بـا توجه به شکل، حد راست $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ برابر ۱ و حد چپ آن برابر -1 است:

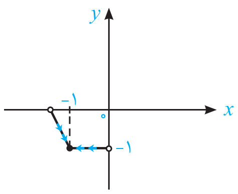


حد راست: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$

بنابراین حد چپ و راست برابر نبوده و درنتیجه تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ حد ندارد.

ب) در راستای محور x، با نزدیک شدن به -1 چه از سمت چپ و چه از سمت راست، نمودار $f(x)$ در راستای محور y نیز به عدد (-1) نزدیک می‌شود:

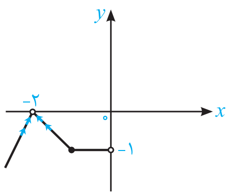


$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -1 \end{cases}$$

بنابراین حد چپ و راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=-1$ برابر -1 بوده و درنتیجه تابع در این نقطه حد دارد و حد آن برابر -1 است.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -1$$

ج) وقتی از سمت چپ و راست روی نمودار $y=f(x)$ به نقطهٔ $x=-2$ نزدیک می‌شویم، تابع به سمت صفر نزدیک می‌شود، پس داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ حد چپ و راست برابرند

بنابراین حد تابع در این نقطه برابر صفر است.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 0$$

تمرین ۳: **در نقطهٔ $x=0$ برای تابع $y=f(x)$ حد چپ برابر A و حد راست برابر B است، حاصل $\lim\limits_{x \to 0} f(x^2 - x^4)$ کدام است؟** (MBA – ۸۸)

۱) A ۲) B ۳) $A+B$ ۴) حد ندارد

حل: با کمی دقت، از صورت سؤال می‌توان فهمید که:

$$\begin{cases} \text{حد چپ}: \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0^-) = A & (1) \\ \text{حد راست}: \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0^+) = B & (2) \end{cases}$$

می‌دانیم که وقتی $0<x<1$ است، هر چه توان x بزرگتر باشد، حاصل آن کوچکتر است. با توجه به این موضوع در نزدیکی صفر (چه از سمت راست و چه از سمت چپ) x^2 از x^4 بزرگتر است و می‌توان نوشت:

$$x \to 0 : x^2 > x^4 \Rightarrow x^2 - x^4 > 0$$

بنابراین در حد بالا داریم:

$$\lim_{x \to 0} f(x^2 - x^4) \xlongequal{x^2 - x^4 > 0} f(0^+) \overset{(2)}{=} B$$ (گزینهٔ ۲)

دقت: وقتی x به سمت صفر میل می‌کند، مثلاً می‌توان فرض کرد که $x=\pm ۰/۰۱$ باشد و مـی‌دانـیم $(\pm ۰/۰۱)$ به توان ۲ از $(\pm ۰/۰۱)$ به توان ۴ بزرگتر است و می‌توان نوشت:

$$x \to ۰ : x=\pm ۰/۰۱ \Rightarrow (\pm ۰/۰۱)^۲ > (\pm ۰/۰۱)^۴ \xrightarrow{x \to ۰} x^۲ > x^۴ \Rightarrow x^۲ - x^۴ > ۰$$

احتمالاً متوجه شدید که هدف از حل این تست، افزایش تسلط شما بر روی مفهوم همسایگی و حد چپ و راست بود.

نکته کاربردی

همانطور که می‌دانید حاصل تقسیم عدد ناصفر بر صفر حدی به سمت بـی‌نهایـت میـل مـی‌کنـد. در چنـین مواردی تعیین نوع بی‌نهایت، (مثبت بی‌نهایت و یا منفی بی‌نهایت)، برای ما بسیار حـائز اهمیـت اسـت. بـرای تعیین این موضوع به جدول زیر توجه کنید:

انواع بی‌نهایت	جواب	مثال
$\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{صفر مثبت}}$	$+\infty$	$\frac{+۲}{+۰/۰۰۰۰۱} = ۲۰۰۰۰۰ \to +\infty$
$\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{صفر منفی}}$	$-\infty$	$\frac{+۲}{-۰/۰۰۰۰۱} = -۲۰۰۰۰۰ \to -\infty$
$\frac{\text{عدد منفی}}{\text{صفر مثبت}}$	$-\infty$	$\frac{-۲}{+۰/۰۰۰۰۱} = -۲۰۰۰۰۰ \to -\infty$
$\frac{\text{عدد منفی}}{\text{صفر منفی}}$	$+\infty$	$\frac{-۲}{-۰/۰۰۰۰۱} = +۲۰۰۰۰۰ \to +\infty$

به‌طور مشابه می‌دانیم حاصل تقسیم عدد ناصفر تقسیم بر بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کنـد، ولـی بعـضی مواقع لازم است نوع صفر مشخص شود (صفر مثبت یا صفر منفی). برای تعیین این موضوع بـه جـدول زیـر توجه کنید:

انواع صفر	جواب	مثال
$\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{مثبت بی‌نهایت}}$	۰^+	$\frac{+۲}{+۲۰۰۰۰۰} = ۰/۰۰۰۰۱ \to ۰^+$
$\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{منفی بی‌نهایت}}$	۰^-	$\frac{+۲}{-۲۰۰۰۰۰} = -۰/۰۰۰۰۱ \to ۰^-$
$\frac{\text{عدد منفی}}{\text{مثبت بی‌نهایت}}$	۰^-	$\frac{-۲}{+۲۰۰۰۰۰} = -۰/۰۰۰۰۱ \to ۰^-$
$\frac{\text{عدد منفی}}{\text{منفی بی‌نهایت}}$	۰^+	$\frac{-۲}{-۲۰۰۰۰۰} = +۰/۰۰۰۰۱ \to ۰^+$

تمرین ۴: تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x-۱}{۲} & x<۱ \\ \frac{۲}{۳} & ۱\le x\le ۲ \\ ۱ & x>۲ \end{cases}$ مفروض است، مقدار $\lim_{n\to +\infty} [\,f(۱-\frac{۱}{n}) - f(۲+\frac{۱}{n})\,]$ را بیابید.

(علوم کامپیوتر ـ ۸۳)

۱) -۱
۲) $-\frac{۲}{۳}$
۳) $-\frac{۱}{۳}$
۴) ۰

حل: برای محاسبهٔ حد داده شده، به موارد زیر توجه کنید:

۱- طبق نکتهٔ قبل می‌دانیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{+\infty}=\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{مثبت بی‌نهایت}}=0^{+}\qquad(1)$$

۲- با جایگذاری 0^{+} در صورت حد داده شده، داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[f\left(1-\frac{1}{n}\right)-f\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]\overset{(1)}{=\!=}f\underbrace{\boxed{(1-0^{+})}}_{\text{کمی کوچکتر از یک}}-f\underbrace{\boxed{(2+0^{+})}}_{\text{کمی بزرگتر از دو}}=f(1^{-})-f(2^{+})\qquad(2)$$

۳- می‌دانیم که مقدار $f(1^{-})$ از ضابطهٔ اول و $f(2^{+})$ از ضابطهٔ سوم به‌دست می‌آید و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\text{ضابطهٔ اول}: f(x)=\dfrac{x-1}{2}\ \Rightarrow\ f(1^{-})=\dfrac{1-1}{2}=0\\ \text{ضابطهٔ سوم}: f(x)=1\ \Rightarrow\ f(2^{+})=1\end{cases}\ \overset{(2)}{\Rightarrow}\ \text{حد}=f(1^{-})-f(2^{+})=0-1=-1$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

کمی تمرین*

اگر در تعریف حد، به‌ازای $0<|x-1|<\delta$ نتیجه بگیریم $\frac{1}{(x-1)^4}>10^8$، آنگاه δ کدام است؟

۱) $\delta\le\frac{1}{10}$ ۲) $\delta\le\frac{1}{100}$ ۳) $\delta\le\frac{1}{1000}$ ۴) $\delta\le\frac{1}{10000}$

راهنمایی: مشابه تمرین (۱) در صفحهٔ ۱۱، با استفاده از تعریف حد جواب سؤال برابر $\delta\le\frac{1}{100}$ است.

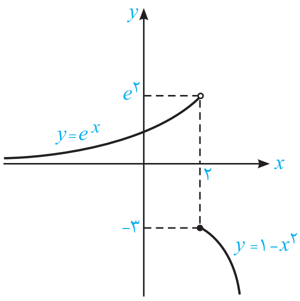
پس از ایجاد درک مناسب از مفهوم حد و همسایگی برای شما عزیزان در قسمت بعد می‌خواهیم شما را با حدهایی با جواب قابل پیش‌بینی آشنا کنیم.

* تا انتهای کتاب بخش‌هایی تحت عنوان کمی تمرین مطرح شده است که بعد از مطالعهٔ درسنامهٔ هر قسمت و با کمک راهنمایی‌های انجام شده باید بتوانید آن را حل کنید.

در این بخش، با گروهی از حدها آشنا می‌شویم که در محاسبهٔ آنها، به حالت مبهمی بر نمی‌خوریم. در این توابع برای یافتن جواب حد و یا تشخیص اینکه حد وجود دارد یا خیر، مجبور به بررسی جداگانهٔ حد چپ و راست هستیم.
به‌طور کلی، این دسته از حدها را می‌توان به سه دستهٔ زیر تقسیم کرد:
۱- حد توابع چندضابطه‌ای؛ ۲- حد توابع شامل قدرمطلق؛ ۳- حد توابع شامل جزء صحیح
در ادامه هر یک از این قسمت‌ها را به‌طور کامل بررسی می‌کنیم.

B-۱- حد توابع چندضابطه‌ای

به منظور آشنایی با توابع چندضابطه‌ای، تابع $f(x)$ در شکل زیر را درنظر گرفته و به موارد زیر توجه کنید:



$$\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} e^x & x<۲ \\ ۱-x^{۲} & x\geq ۲ \end{cases}$$

۱- همانطور که مشاهده می‌کنید تابع $f(x)$، یک تابع دو ضابطه‌ای است که به‌ازای x های کوچکتر از ۲ برابر با e^x و به‌ازای x های بزرگتر یا مساوی ۲، برابر با $۱-x^{۲}$ می‌باشد.

۲- به‌دلیل آنکه در این گروه از توابع، در یک یا چند نقطه ضابطهٔ تابع عوض می‌شود، از این‌رو حاصل حد چپ و راست در این نقاط، از دو ضابطهٔ مختلف به‌دست می‌آید.

۳- با توجه به این موضوع، نکتهٔ اساسی در محاسبهٔ حد توابع چندضابطه‌ای، توجه به حد چپ و راست در نقاط مرزی بین ضابطه‌ها است (همانطور که در تمرین ۴ بخش A دیدیم).

به عنوان مثال، اگر بخواهیم حد تابع $f(x)$ در بالا را در نقطهٔ $x=۲$ بررسی کنیم، داریم:

$$\text{حد راست}: \lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۱-x^{۲})=۱-۴=-۳$$

$$\text{حد چپ}: \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} e^x=e^{۲}$$

از آنجایی‌که حد چپ و راست در نقطهٔ $x=۲$ برابر نیستند، پس این تابع در آن نقطه حد ندارد (این موضوع به سادگی از شکل تابع نیز قابل تشخیص است).

زیر شاخه‌های قسمت دوم

B-۱- حد توابع چندضابطه‌ای

B-۲- حد توابع شامل قدرمطلق

B-۳- حد توابع شامل جزء صحیح

در ادامه برای درک بهتر شما عزیزان، نحوهٔ محاسبهٔ حد توابع چند ضابطه‌ای را در چند تمرین زیر با هم بررسی می‌کنیم.

تمرین ۵: مقادیر a و b را در تابع $f(x)$ طوری تعیین کنید که این تابع در تمام نقاط حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}+1 & x<0 \\ ax^{2}+b & 0\le x<1 \\ 2+\dfrac{1}{x} & x\ge 1 \end{cases}$$

حل: این تابع شامل سه ضابطه است که هر یک در بازهٔ خود، به‌طور جداگانه دارای حد هستند، بنابراین برای آنکه تابع $f(x)$ در همهٔ نقاط حد داشته باشد، باید حد چپ و راست در نقاط مرزی ضابطه‌ها با هم برابر باشند:

۱- شرط وجود حد در نقطهٔ $x=0$:

$$x=0:\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} e^{x}+1=\lim_{x\to 0^+} ax^{2}+b \Rightarrow e^{0}+1=a\times 0+b \Rightarrow b=2$$

۲- شرط وجود حد در نقطهٔ $x=1$:

$$x=1:\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} ax^{2}+b=\lim_{x\to 1^+} 2+\frac{1}{x} \Rightarrow a+b=3 \xrightarrow{b=2} a+2=3 \Rightarrow a=1$$

بنابراین اگر $a=1$ و $b=2$ باشد، تابع $f(x)$ در همهٔ نقاط دارای حد است.

دقت: می‌دانیم 0^- کوچک‌تر از صفر است از این‌رو برای محاسبهٔ حد در 0^-، از ضابطهٔ $e^{x}+1$ استفاده کرده‌ایم.
به‌طور مشابه 1^+ بزرگ‌تر از یک است و برای محاسبهٔ حد در آن، از ضابطهٔ $2+\frac{1}{x}$ استفاده کرده‌ایم.

تمرین ۶: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \sec x\tan x & x\ge 0 \\ \cos x & x<0 \end{cases}$ باشد، آنگاه حد $\lim_{x\to -\infty} f(\frac{1}{x})$ را به‌دست آورید.

حل: برای حل این سؤال ابتدا باید توجه داشت که حد $\frac{1}{x}$ وقتی x به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر با صفر منفی است ($0^-=\frac{\text{عدد مثبت}}{\text{منفی بی‌نهایت}}$)، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to -\infty} f(\frac{1}{x})=f(\frac{1}{-\infty})=f(0^-)$$

پس با نگاهی دیگر می‌توان فهمید که درواقع طراح حد چپ $f(x)$ در $x=0$ را خواسته و درنتیجه باید از ضابطهٔ دوم تابع استفاده کرد:

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} \cos x=1$$

بنابراین جواب حد برابر یک به‌دست می‌آید.

قضیهٔ فشردگی (ساندویچ)

یکی از قضیه‌های جالب در محاسبهٔ حد یک تابع، قضیهٔ فشردگی یا ساندویچ است که در آن به‌جای محاسبهٔ مستقیم حد تابع، از طریق مقایسهٔ آن با دو تابع دیگر که حدشان مشخص است، حد موردنظر را به‌دست می‌آوریم. اولین بار ارشمیدس در محاسبهٔ عدد π، به‌صورت هندسی از این قضیه استفاده کرد و بعدها گاوس آن‌را به‌صورت امروزی بیان کرد.

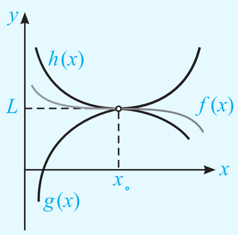
اگر توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ در یک همسایگی (محذوف) از $x = x_\circ$ تعریف شده باشند و در این همسایگی $f(x)$ بین دو تابع $g(x)$ و $h(x)$ قرار داشته باشد $(g(x) \le f(x) \le h(x))$ و همچنین حد دو تابع $g(x)$ و $h(x)$ در نقطهٔ $x_\circ$ یکسان و برابر با L باشد $(\lim\limits_{x \to x_\circ} g(x) = \lim\limits_{x \to x_\circ} h(x) = L)$، آنگاه حد $f(x)$ نیز در آن نقطه برابر با L خواهد بود $(\lim\limits_{x \to x_\circ} f(x) = L)$، یعنی:

$$g(x) \le f(x) \le h(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_\circ} g(x) \le \lim_{x \to x_\circ} f(x) \le \lim_{x \to x_\circ} h(x) \Rightarrow L \le \lim_{x \to x_\circ} f(x) \le L$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیهٔ ساندویچ}} \lim_{x \to x_\circ} f(x) = L$$

نگاهی دیگر

به منظور درک بهتر قضیهٔ فشردگی به نمودار مقابل توجه کنید. همانطور که در شکل مقابل مشاهده می‌کنید، توابع $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ در یک همسایگی محذوف در نقطهٔ $x = x_\circ$ تعریف شده‌اند و $h(x)$ بزرگتر از $f(x)$ و $f(x)$ بزرگتر از $g(x)$ است $(g(x) \le f(x) \le h(x))$ و درست زمانی‌که x به سمت $x_\circ$ میل می‌کند، تابع $h(x)$ از بالا و تابع $g(x)$ از پایین به L نزدیک می‌شوند و به تابع $f(x)$ فشار می‌آورند تا آن‌را مجبور کنند که به سمت L میل کند، پس می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} g(x) \le f(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x \to x_\circ} g(x) = \lim\limits_{x \to x_\circ} h(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to x_\circ} f(x) = L$$

برای درک بهتر قضیهٔ فشردگی به تمرین بعد توجه کنید.

تمرین ۷: اگر در یک همسایگی محذوف $x = \circ$ داشته باشیم $|f(x) - 1| \le \frac{\sin x}{x}$، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x \to \circ^+} x f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۰ ۴) حد وجود ندارد

حل: برای محاسبهٔ حد داده شده، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱- با توجه به رابطهٔ داده شده، محدودهٔ $x f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$|f(x) - 1| \le \frac{\sin x}{x} \Rightarrow -\frac{\sin x}{x} \le f(x) - 1 \le \frac{\sin x}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را با یک جمع می‌کنیم}} 1 - \frac{\sin x}{x} \le f(x) \le 1 + \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{\times x} x - \sin x \le x f(x) \le x + \sin x$$

۲- در ادامه با استفاده از قضیهٔ ساندویچ داریم:

$$\lim_{x \to \circ^+} (x - \sin x) \le \lim_{x \to \circ^+} x f(x) \le \lim_{x \to \circ^+} (x + \sin x) \Rightarrow \circ \le \lim_{x \to \circ^+} x f(x) \le \circ \Rightarrow \lim_{x \to \circ^+} x f(x) = \circ$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست‌های فصل اول

۱- پاسخ عبارت $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x+3}{x+2} \times \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ برابر است با: (مکانیک - آزاد ۸۶)

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۲- حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟ (مکانیک - ۸۰)

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۳- مقدار $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\cos x}{x+\pi}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - آزاد ۸۷)

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) π ۳) صفر ۴) موجود نیست.

۴- مقدار $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{[x^4]-x^4}{[x]-1}$ کدام است؟ (هسته‌ای - آزاد ۸۹)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۵- حد عبارت $\frac{\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x}$ وقتی $x \to 0$ کدام است؟ (کشاورزی - ۹۳)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۶- حد $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ برابر است با: (عمران - آزاد ۸۶)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) -1

۷- حاصل $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\cos 2-\cos 2x}{x^2-|x|}$ برابر است با: (مکانیک - آزاد ۸۴)

۱) $2\sin 2$ ۲) $2\cos 2$ ۳) $\cos 2$ ۴) $-2\sin 2$

۸- به‌ازای چه مقادیری از a، $\lim\limits_{x \to a} \frac{(x-a)^2}{1+\cos(\frac{\pi x}{a})}$ برابر $\frac{2}{\pi^2}$ است؟ (آمار - ۸۷)

۱) $\pm\frac{1}{2}$ ۲) ± 1 ۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) ± 3

۹- اگر $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-\sqrt{x+3}}{x^2+ax+b} = \frac{1}{4}$ باشد، b کدام است؟ (مدیریت و حسابداری - ۹۲)

۱) -6 ۲) -4 ۳) ۴ ۴) ۶

۱۰- اگر $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-4} = \frac{5}{4}$، حاصل ab کدام است؟ (فیزیک پزشکی - ۸۷)

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) -4 ۴) -6

۱۱- حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{-۲x+\sqrt{x^۲+۱۲}}{|x^۲+x-۶|}$ کدام است؟ (آبیاری - ۸۵)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷۵

۱۲- فرض کنید $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x(۱+a\cos x)-b\sin x}{x^۳}=۱$، در این‌صورت مقدار a و b به‌ترتیب کدام است؟ (مدیریت نساجی - ۹۰)

۱) $-\frac{۷}{۲}$ ، $-\frac{۹}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ، $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ، $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$ ، $-\frac{۳}{۲}$

۱۳- مقدار حد $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\frac{۱}{x^۲}}-۱}{\frac{\pi}{۲}-\tan^{-۱}x^۲}$ کدام است؟ (مواد - ۸۹)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ∞

۱۴- مقدار حد $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\log_۲^{(\ln x)}}{x-e}$ کدام است؟ (مکاترونیک - ۸۵)

۱) $\frac{۱}{۲}\log_e^۲$ ۲) $\frac{۱}{۲}\log_۲^e$ ۳) $\frac{۱}{e}\log_e^۲$ ۴) $\frac{۱}{e}\log_۲^e$

۱۵- $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sin x-\arctan x}{x^۲\ln(۱+x)}$ برابر است با: (ریاضی - آزاد ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۶- اگر $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ax-\sqrt{x^۲+۸}}{|x-۱|}=۲$ باشد، حد چپ عبارت مفروض در نقطهٔ $x=۱$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - ۸۶)

۱) $-\frac{۸}{۳}$ ۲) $-\frac{۷}{۶}$ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۶}$

۱۷- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱+۲^{\frac{۱}{x}}}{۳+۲^{\frac{۱}{x}}}$ برابر است با: (مکانیک - آزاد ۸۳)

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) حد موجود نیست.

۱۸- کدام گزینه پاسخ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{۳x+۴}{\sqrt{۲x^۲-۵}}$ است؟ (مکانیک - آزاد ۸۷)

۱) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $+\infty$ ۳) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۷}$ ۴) $-\frac{۳}{\sqrt{۲}}$

۱۹- حاصل حد $\lim\limits_{x\to +\infty} (e^{۳x}-۵x)^{\frac{۱}{x}}$ کدام است؟ (ریاضی - آزاد ۸۸)

۱) $e^۵$ ۲) $e^{\frac{۳}{۵}}$ ۳) $e^{\frac{۵}{۳}}$ ۴) $e^۳$

۵۸- مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx}(1+\frac{x}{n})^{n^2}$ کدام است؟ (ریاضی - ۸۶)

۱) ۱ ۲) $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ۳) $e^{\frac{x^2}{2}}$ ۴) ∞

۵۹- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$ برابر کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی - ۸۴)

۱) صفر ۲) $\sqrt{e}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۴) ۱

پاسخنامه‌ی کلیدی

۱-	۴	۱۰-	۴	۱۹-	۴	۲۸-	۳	۳۷-	۴	۴۶-	۱	۵۵-	۳
۲-	۴	۱۱-	۲	۲۰-	۲	۲۹-	۱	۳۸-	۲	۴۷-	۴	۵۶-	۴
۳-	۳	۱۲-	۲	۲۱-	۲	۳۰-	۱	۳۹-	۳	۴۸-	۲	۵۷-	۳
۴-	۲	۱۳-	۳	۲۲-	۴	۳۱-	۲	۴۰-	۱	۴۹-	۱	۵۸-	۲
۵-	۱	۱۴-	۴	۲۳-	۱	۳۲-	۲	۴۱-	۳	۵۰-	۲	۵۹-	۳
۶-	۲	۱۵-	۲	۲۴-	۴	۳۳-	۲	۴۲-	۳	۵۱-	۲		
۷-	۱	۱۶-	۱	۲۵-	۲	۳۴-	۲	۴۳-	۲	۵۲-	۴		
۸-	۲	۱۷-	۴	۲۶-	۲	۳۵-	۲	۴۴-	۳	۵۳-	۲		
۹-	۱	۱۸-	۴	۲۷-	۲	۳۶-	۱	۴۵-	۲	۵۴-	۴		

پاسخ‌نامهٔ تشریحی تست‌های فصل اول را می‌توانید در سایت www.serieomomi.ir مشاهده نمایید.