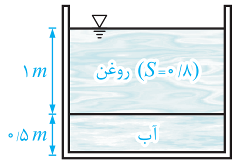
فهرست

بررسی یک نکته مهم

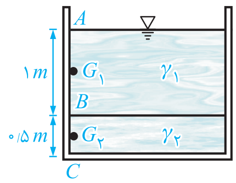
برخی مواقع سطحی که می‌خواهید نیروی هیدرواستاتیک وارد بر آن را محاسبه کنید، در تماس با دو یا چند نوع سیال مختلف قرار دارد. در این حالت چون γ سیال‌ها متفاوت است، بنـابراین بایـستی بـرای محاسـبهٔ نیروی وارد بر سطح، آن را به‌صورت دو یا چند صفحهٔ کوچکتر در نظـر گرفـت، بـه‌طوریکـه هـر یـک از ایـن صفحاتِ کوچکتر فقط در تماس با یک سیال باشند. در چنین شرایطی نیروی برآیند وارد بر کل صفحه برابـر مجموع نیروی وارد بر هر یک از صفحات کوچک خواهد بود.

$$F_{\text{کل}} = \sum F_i = \sum P_{G_i} A_i$$

تمرین ۸: مخزن شکل مقابل که محتوی آب و روغن است، دارای قاعـده‌ای مربعی به ضلع $۲m$ می‌باشد. نیروی وارد بر دیوارهٔ قائم این مخزن را تعیـین نمایید.



حل: همانطور که گفته شد، چون جداره‌های قائم مخزن در تماس با دو نوع سیال مختلف هستند، بنابراین هر جـداره را بـه دو قسمت تقسـیم کـرده و نیروی وارد بر هر قسمت را می‌یابیم.



بعد عمود بر صفحه

سطح AB در تماس با روغن (با ابعاد m $\boxed{۲}$ $\times ۱m$):

$$\begin{cases} F_۱ = P_{G_۱} A_۱ \\ P_{G_۱} = \gamma_۱ \bar{h}_۱ = (۰/۸\times۱۰)(۰/۵) = ۴\ kPa \end{cases} \Rightarrow F_۱ = (۴)(۱\times۲) = ۸\ kN$$

بعد عمود بر صفحه

سطح BC در تماس با آب (با ابعاد m $\boxed{۲}$ $\times ۰/۵\ m$):

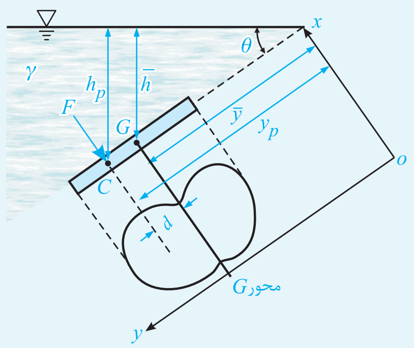
$$\begin{cases} F_۲ = P_{G_۲} A_۲ \\ P_{G_۲} = \gamma_۱ h_۱ + \gamma_۲ h_{G_۲} = (۰/۸\times۱۰)(۱) + (۱۰)(۰/۲۵) = ۱۰/۵\ kPa \end{cases} \Rightarrow F_۲ = (۱۰/۵)(۰/۵\times۲) = ۱۰/۵\ kN$$

در نهایت کل نیروی وارد بر جداره برابر است با:

$$F_{\text{کل}} = F_۱ + F_۲ = ۸ + ۱۰/۵ = ۱۸/۵\ kN$$

بررسی یک نکته پرکاربرد

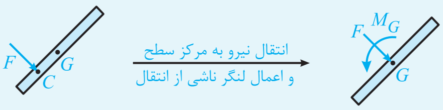
برای یک طرف سطح تختی که به طور کامل در مایعی بـه وزن مخصـوص γ فـرو رفتـه اسـت، **لنگـر نیـروی هیدرواستاتیک حول محور افقی گذرنده از مرکز سـطح** (محور G یا همان محور $x = \bar{x}$)، به صورت گفته شـده در صفحه بعد قابل محاسبه است:



$$\begin{cases} M_G = F \times d = F \times (y_p - \bar{y}) \\ F = \gamma \bar{h} A \\ y_p - \bar{y} = \dfrac{I_G}{A \boxed{\bar{y}}} = \dfrac{I_G \sin\theta}{A \bar{h}} \end{cases} \Rightarrow M_G = (\gamma \bar{h} A)(\frac{I_G \sin\theta}{A \bar{h}}) \Rightarrow M_G = \gamma I_G \sin\theta$$

$$\bar{y} \rightarrow (\frac{\bar{h}}{\sin\theta})$$

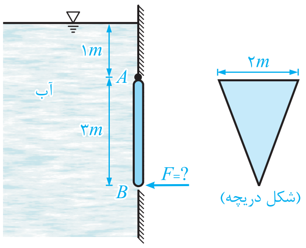
حال که محاسبهٔ لنگر M_G را یاد گرفتیم، برای حل مسائلی که در آنها محاسبهٔ لنگر نیروی هیدرواستاتیک لازم است، از یک **روش میانبر** استفاده می‌کنیم. روش میانبر به‌این‌صورت است که نیروی F را به مرکز سطح صفحه (که جای آن معلوم است) منتقل کرده و لنگر ناشی از این انتقال را (M_G) به صفحه وارد می‌کنیم. نحوهٔ اعمال لنگر هم بایستی به گونه‌ای باشد که نیمهٔ پایینی صفحهٔ مورد نظر، توسط لنگر MG تحت فشار قرار بگیرد.



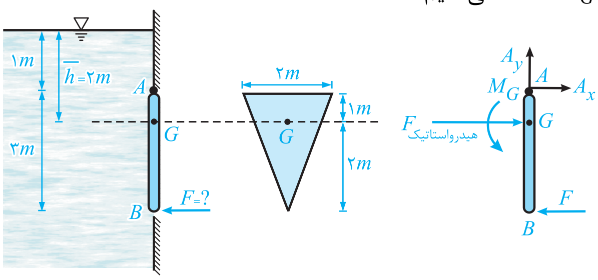
$$F = P_G A$$
$$M_G = \gamma I_G \sin\theta$$

در ادامه با حل چند تمرین متنوع، کاربرد نکتهٔ فوق را بهتر درک می‌کنیم.

تمرین ۹: یک دریچهٔ قائم به‌صورت نشان داده شده، در محور A لولا شده و توسط نیروی F بسته نگهداشته می‌شود. مقدار نیروی F چند kN می‌باشد؟



● حل: برای یافتن نیروی F، دیاگرام جسم آزاد دریچه را در نظر گرفته و نیروهای وارد بر آن را روی شکل نشان می‌دهیم. در این حالت نیروی هیدرواستاتیکی را به‌صورت نیروی $F_{\text{هیدرواستاتیک}}$ روی مرکز سطح دریچه وارد کرده و اثر لنگر ناشی از این انتقال را نیز به‌صورت M_G لحاظ می‌کنیم.



$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow F \times ۳ = F_{\text{هیدرواستاتیک}} \times ۱ + M_G$$

$$F_{\text{هیدرواستاتیک}} = P_G A = \gamma \bar{h} A = (۱۰)(۲)(\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۳) = ۶۰ \ kN$$

$$M_G = \gamma I_G \sin\theta = (۱۰)(\frac{۲ \times ۳^۳}{۳۶})(\sin ۹۰^\circ) = ۱۵ \ kN.m$$

حال مقادیر به‌دست آمده برای $F_{\text{هیدرواستاتیک}}$ و M_G را در رابطهٔ تعادل $\sum M_A = 0$ جایگذاری کـرده و مقـدار F را به‌صورت زیر می‌یابیم:

$$F \times 3 = 60 \times 1 + 15 \;\Rightarrow\; F = 25\, kN$$

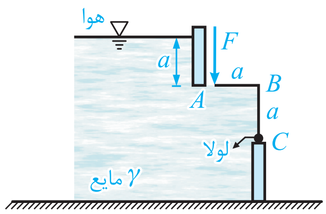
تمرین ۱۰: در مخزن نشان داده شده در شکل، نیروی لازم برای بسته نگهداشتن دریچه با ابعـاد داده شـده از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟ (عرض دریچه واحد است.) (سراسری - ۸۳)

۱) $F = \gamma a^2$

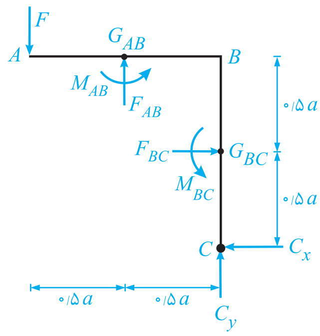
۲) $F = \dfrac{7}{6}\gamma a^2$

۳) $F = \dfrac{1}{2}\gamma a^2$

۴) $F = \dfrac{2}{3}\gamma a^2$



حل: دریچهٔ ABC از دو قسمت AB (افقی $\theta = 0$) و BC (قائم $\theta = 90^\circ$) تشکیل شده است. با ترسـیم دیـاگرام جسم آزاد دریچه و مشخص کردن نیروها و لنگرهای وارد بر هر قسمت از این دریچه خواهیم داشت:



$$\sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; F_{AB} \times 0/5\,a + F_{BC} \times 0/5\,a$$

$$= F \times a + M_{AB} + M_{BC}$$

$$F_{AB} = P_{G_{AB}} \times A_{AB} = (\gamma a)(a \times 1) = \gamma a^2$$

$$F_{BC} = P_{G_{BC}} \times A_{BC} = (\gamma \times 1/5\,a)(a \times 1) = 1/5\,\gamma a^2$$

$$M_{AB} = \gamma I_G \sin\theta \xrightarrow{\theta = 0} M_{AB} = 0$$

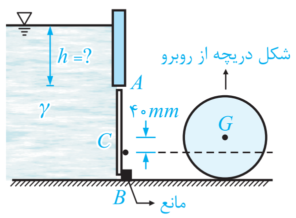
$$M_{BC} = \gamma I_G \sin\theta \xrightarrow{\theta = 90^\circ} M_{BC} = (\gamma)\left(\frac{a^3 \times 1}{12}\right)(1) = \frac{\gamma a^3}{12}$$

حال با جایگذاری مقادیر فوق در رابطهٔ تعادل $\sum M_C = 0$، نیروی F را می‌یابیم:

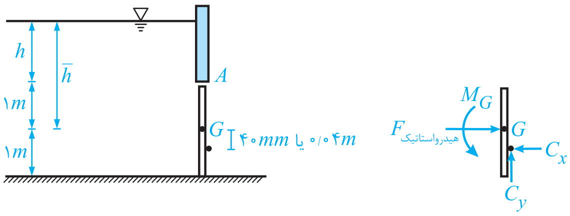
$$\gamma a^2 \times 0/5\,a + 1/5\,\gamma a^2 \times 0/5\,a = F \times a + 0 + \frac{\gamma a^3}{12} \;\Rightarrow\; F = \frac{7}{6}\gamma a^2$$

بنابراین گزینهٔ (۲) پاسخ صحیح این تست است.

تمرین ۱۱: دریچهٔ AB به قطر ۲ متر، مطابق شکل زیر در C لولا شده است و نقطهٔ C بـه فاصـلهٔ ۴۰ میلـی‌متـر پایین‌تر از مرکز سطح دریچه قرار دارد. حداکثر مقدار h که به ازای آن دریچه بسته بماند، چند متر است؟



حل: برای بسته باقی ماندن دریچه، در حالت حدی باید نیروها و لنگرهـای وارد بـر آن، روابـط تعـادل را ارضـا کنند تا h حداکثر بەدست آید. بەمنظور بررسی این مطلب و یافتن ارتفاع h حداکثر، دیاگرام جسم آزاد دریچه را در نظر گرفته و می‌نویسیم:



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow F_{\text{هیدرواستاتیک}} \times 0/04 = M_G$$

$$F_{\text{هیدرواستاتیک}} = P_G A = \gamma \bar{h} A = \gamma (h+1)(\frac{\pi \times 2^2}{4}) = \gamma \pi (h+1)$$

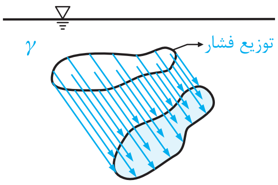
$$M_G = \gamma I_G \sin\theta = (\gamma)(\frac{\pi \times 2^4}{64})(1) = \frac{\gamma \pi}{4}$$

حال با جایگذاری مقادیر فوق در رابطهٔ تعادل $\sum M_C = 0$، مقدار h حداکثر بەدست می‌آید:

$$\gamma \pi (h+1) \times 0/04 = \frac{\gamma \pi}{4} \Rightarrow h = 5/25\ m$$

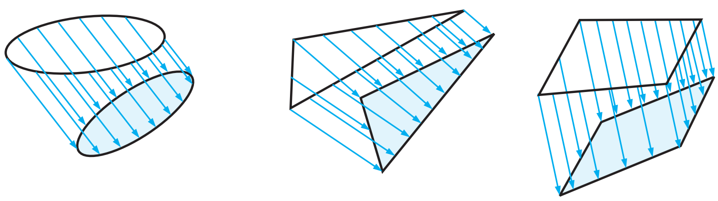
روش ترسیم منشور فشار

در فصل دوم دیدیم که در یک مایع با وزن مخصوص ثابت γ، فشار نسبی در عمق h از رابطهٔ $P = \gamma h$ بەدسـت می‌آید. این رابطه نشان می‌دهد که تغییرات فشار در عمق مایع بەصورت خطی است که اصـطلاحاً بـه آن فـشار هیدرواستاتیکی گفته می‌شود.

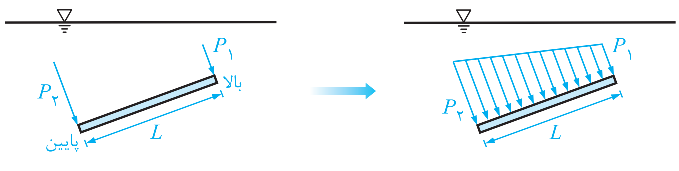


حال اگر یک صفحهٔ تخت را مطابق شکل روبرو درون یک مـایع سـاکن قـرار دهیم، در آن‌صورت برای نمایش فشارهای وارد بر این صفحه از نمودار توزیع فشار بەصورت نشان داده شده در شکل استفاده می‌شود کـه بـه آن **منـشور فشار** می‌گوییم.

جالب است بدانید صفحات پرکاربرد در مکانیک سیالات (اکثراً دریچه‌ها) بەصورت سطوح مـنظم و شـناخته شـده مثل مثلث، دایره و مستطیل هستند که در شکل‌های زیر منشور فشار آنها را بەصورت شماتیک نشان داده‌ایم:



در بین صفحات مذکور، تنها صفحهٔ مستطیلی است که ما به راحتی می‌توانیم خصوصیاتی مثل حجم، مرکز حجم و ... از منشور فشار آن را به‌دست آوریم. برای ترسیم منشور فشار در صفحات مستطیلی کافیست آن را به‌صورت دو بُعدی رسم کنیم، به این ترتیب که ابتدا فشار در نقاط بالا و پایین سطح مستطیلی را مشخص کرده و سپس منشور فشار را به‌صورت خطی ترسیم می‌کنیم:



مشخص کردن فشارهای P_1 و P_2 در بالا و پایین صفحه   رسم منشور فشار

حال اگر بعد عمود بر صفحه (عرض صفحهٔ مستطیلی) را برابر B در نظر بگیریم، در آن‌صورت حجم منشور فشار برابر است با:

بعد عمود بر صفحه × مساحت ذوزنقه توزیع فشار = حجم منشور فشار

$$=(\frac{P_1+P_2}{2}\times L)(B)=\boxed{(\frac{P_1+P_2}{2})}\ \boxed{BL}=\boxed{P_G}\ \boxed{A}=F$$

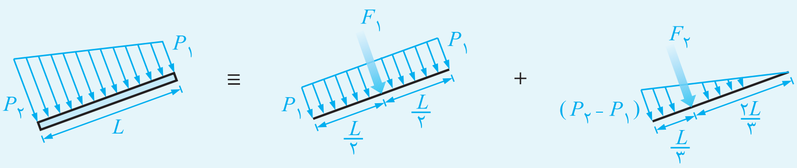
میانگین فشار وارد بر صفحه = فشار در مرکز سطح صفحه

بنابراین به‌طور خلاصه می‌توان نتیجه گرفت که:

F = حجم منشور فشار

بررسی یک نکته پرکاربرد

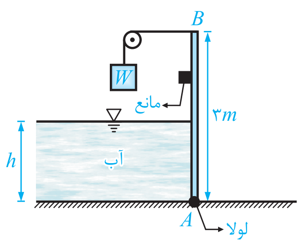
استفاده از روش ترسیم منشور فشار در مواقعی مفید است که بحث لنگرگیری از نیروی هیدرواستاتیک برای یک سطح مستطیلی مطرح است. در این شرایط با توجه به مشخص بودن محل اثر نیروی هیدرواستاتیک، به‌راحتی می‌توان لنگر ناشی از آن حول هر نقطهٔ دلخواه را به‌دست آورد.



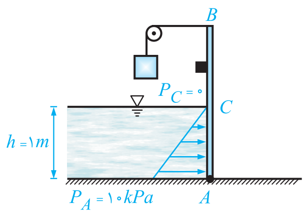
تمرین ۱۲: دریچهٔ AB با طول عمود بر صفحهٔ $2m$ توسط وزنهٔ W با وزن $3/75\ kN$ بسته نگهداشته شده است. در این‌صورت با فرض $\gamma_w=10\ kN/m^3$؛

الف) اگر $h=1m$ باشد، چه نیرویی از سمت آب به دریچه وارد می‌شود؟

ب) حداکثر مقدار h چقدر باشد تا دریچه بسته باقی بماند؟



حل:



الف) از آنجاکه دریچهٔ نشان داده شده در شکل، مستطیلی است (با ارتفاع h و عرض $۲m$ عمود بر صفحهٔ شکل)، بنابراین برای محاسبهٔ نیروی هیدرواستاتیک وارد بر می‌توان از روش منشور فشار استفاده کرد. برای این کار ابتدا باید منشور فشار (یا همان توزیع فشار) وارد بر دریچه (صفحه مستطیلی) را با یافتن فشار در نقاط بالا و پایین دریچه، به‌صورت مقابل ترسیم می‌کنیم.

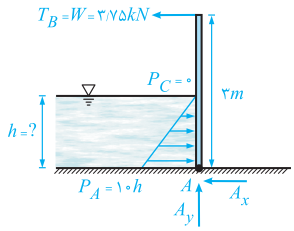
$P_C = \gamma h_C = ۰$ (فشار در بالای دریچه)

$P_A = \gamma h_A = ۱۰ \times ۱ = ۱۰\, kPa$ (فشار در پایین دریچه)

حال همانطور که گفته شد، نیروی هیدرواستاتیک وارد بر صفحه، حجم منشور فشار رسم شده می‌باشد که مقدار آن برابر است با:

$$F = \text{حجم منشور فشار} = \underbrace{(\frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۱)}_{\text{سطح منشور فشار}} \; \underbrace{(۲)}_{\text{بُعد عمود بر صفحه}} = ۱۰\, kN$$

ب) برای آنکه دریچه بسته باقی بماند، باید تعادل نیروها و لنگرها برقرار باشد. از این‌رو دیاگرام جسم آزاد دریچه را رسم کرده و اثر نیروی هیدرواستاتیک را با منشور فشار نمایش می‌دهیم. توجه کنید که در آستانهٔ باز شدن دریچه در جهت ساعتگرد (حول لولای A)، هیچ نیرویی از جانب مانع به آن وارد نمی‌شود.

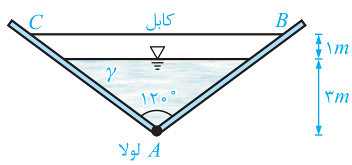


$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow T_B \times ۳ = F_{\text{هیدرواستاتیک}} \times \frac{h}{۳}$$

در رابطهٔ بالا، $\frac{h}{۳}$ فاصلهٔ مرکز حجم منشور فشارِ مثلثی رسم شده (محل اثر نیروی هیدرواستاتیک) تا محل لنگرگیری یعنی A می‌باشد. حال در ادامه با جایگذاری مقادیر T_B و $F_{\text{هیدرواستاتیک}}$ در رابطه $\sum M_A = ۰$، مقدار h را می‌یابیم:

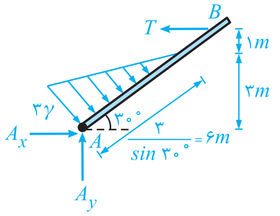
$$۳/۷۵ \times ۳ = [\underbrace{(\frac{۱}{۲} \times ۱۰ h \times h)}_{\text{سطح مثلثی منشور فشار}} \; \underbrace{(۲)}_{\text{بُعد عمود بر صفحه}}] \times \frac{h}{۳} \Rightarrow h^۳ = \frac{۲۷}{۸} \Rightarrow h = \frac{۳}{۲} = ۱/۵ m$$

تمرین ۱۳: دو صفحهٔ مستوی در نقطهٔ A لولا شده و مخزنی مطابق شکل را ایجاد کرده‌اند. صفحات در بالا توسط کابل BC به هم متصل شده‌اند. در صورتی‌که در هر متر عرض مخزن، دو کابل برای نگهداری صفحات به کار رفته و مخزن تا ارتفاع ۳ متری از سیال با وزن مخصوص γ پر شده باشد، نیروی کشش وارد بر هر کابل چقدر است؟ (سراسری - ۹۱)



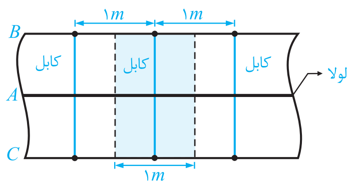
۱) ۳γ
۲) $۲/۲۵\gamma$
۳) $۴/۵\gamma$
۴) ۹γ

● حل: برای یافتن نیروی کابل $BC\,(T)$، دیاگرام جسم آزاد یکی از سطوح مایل (مثلاً AB) را در نظر می‌گیریم که چون AB یک سطح مستطیلی مایل است، می‌توان اثر نیروی هیدرواستاتیک را به‌صورت منشور فشار نشان داد. در ادامه با نوشتن رابطهٔ تعادل $\sum M_A = 0$، مقدار T به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



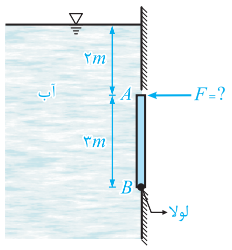
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow T\times 4 = \underbrace{\left[\left(\frac{1}{2}\times 3\gamma\times 6\right)(1)\right]}_{\text{نیروی هیدرواستاتیک}} \times \underbrace{\left[\frac{1}{3}\times 6\right]}_{\text{بازوی نیروی هیدرواستاتیک نسبت به نقطه } A}$$

$$\Rightarrow T = 4.5\,\gamma$$

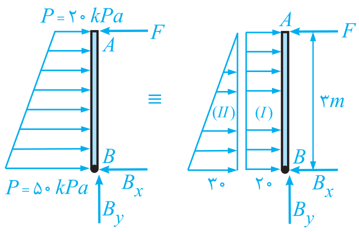


پس گزینهٔ (۳) پاسخ صحیح این تست است. دقت شود که در این مسأله سطح پوشش هر کابل به‌گونه‌ای است که بعد عمود بر صفحهٔ آن برابر ۱ متر می‌باشد. برای درک بهتر این موضوع از بالا به مخزن موردنظر نگاه می‌کنیم که شکل آن به‌صورت مقابل است.

تمرین ۱۴: جهت بسته نگهداشتن دریچهٔ مستطیلی شکل AB، از نیروی F استفاده می‌شود. با توجه به عمق آب داخل مخزن، حداقل F لازم برای بسته باقی ماندن دریچه چند kN است؟ (عرض دریچه واحد است)



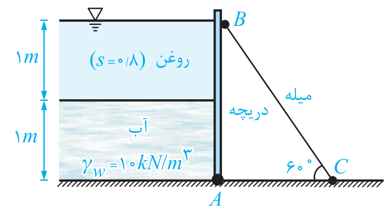
● حل: مشابه با تمرین قبل، در اینجا نیز منشور فشار وارد بر دریچه را رسم کرده و برای یافتن F از رابطهٔ تعادل $\sum M_B = 0$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که چون منشور فشار به شکل ذوزنقه است، بایستی طبق مطالب گفته شده، آن را به یک مثلث و یک مستطیل تفکیک نماییم.



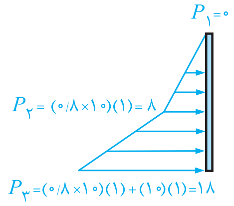
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F\times 3 = \underbrace{M_I + M_{II}}_{\text{لنگر ناشی از منشور فشارهای } (I) \text{ و } (II) \text{ حول } B}$$

$$F\times 3 = \underbrace{[(20\times 3)(1)]}_{F_I\ \text{نیروی هیدرواستاتیک}} \times \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)}_{F_I\ \text{بازوی نیروی}} + \underbrace{\left[\left(\frac{1}{2}\times 30\times 3\right)(1)\right]}_{F_{II}\ \text{نیروی هیدرواستاتیک}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{3}\times 3\right)}_{F_{II}\ \text{بازوی نیروی}} \Rightarrow F = 45\,kN$$

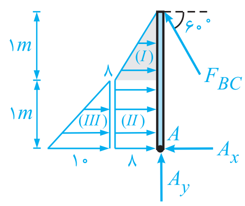
تمرین ۱۵: برای نگهداشتن دو لایه روغن و آب به ارتفاع‌های $۱m$، از دریچهٔ AB و میلهٔ BC مطابق شکل استفاده شده است. در این صورت نیروی ایجاد شده در میلهٔ BC چند kN است؟ (عرض دریچه یک متر است)



● حل: از آنجاکه دریچه در تماس با دو نوع سیال مختلف است، بایستی برای هر لایه یک منشور مجزا رسم شود.
در ادامه با به‌دست آوردن مقادیر فشار در بالا و پایین لایه‌های سیال، این منشورهای فشار به‌صورت مقابل قابل ترسیم می‌باشند:



همچنین دیاگرام جسم آزاد دریچه را به‌صورت مقابل رسم کرده و نیروی F_{BC} را نیز روی آن نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که منشور فشار ذوزنقه‌ای در قسمت پایینی دریچه (قسمتی که در تماس با آب است) را به یک مثلث و یک مستطیل تفکیک نموده‌ایم.



حال با نوشتن رابطهٔ تعادل لنگرها حول A خواهیم داشت:

$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow F_{BC} \cos ۶۰^\circ \times ۲ = M_I + M_{II} + M_{III}$$

M_I، M_{II} و M_{III} لنگر ناشی از منشورهای فشار (I)، (II) و (III) حول لولای A می‌باشند که به تفکیک آنها را می‌یابیم:

$$\begin{cases} M_I = [(\frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۱)(۱)](۱ + \frac{۱}{۳} \times ۱) = \frac{۱۶}{۳} \; kN.m \\ M_{II} = [(۸ \times ۱)(۱)](\frac{۱}{۲} \times ۱) = ۴ \; kN.m \\ M_{III} = [(\frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۱)(۱)](\frac{۱}{۳} \times ۱) = \frac{۵}{۳} \; kN.m \end{cases}$$

در نهایت با جایگذاری مقادیر فوق در رابطهٔ تعادل $\sum M_A = ۰$، مقدار F_{BC} به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_{BC} \times \underbrace{\boxed{\frac{۱}{۲}}}_{\cos ۶۰^\circ} \times ۲ = \frac{۱۶}{۳} + ۴ + \frac{۵}{۳} \Rightarrow F_{BC} = ۱۱ \; kN$$

جمع‌بندی مطالب مربوط به نیروی هیدرواستاتیک سطوح تخت

تا اینجا، با دو روش مهم برای **محاسبهٔ نیروی هیدرواستاتیکِ** وارد بر سطوح تخت آشنا شدیم و دیدیم که وقتی وزن مخصوص مایع ثابت است (γ ثابت)، می‌توان نیروی ناشی از فشار هیدرواستاتیک آن را با **روش فرمول** و **روش منشور فشار** به‌دست آورد.

حال برای اینکه بدانید از چه روشی در کجا باید استفاده شود، توصیه می‌کنیم تا به جمع‌بندی زیر توجه کنید:

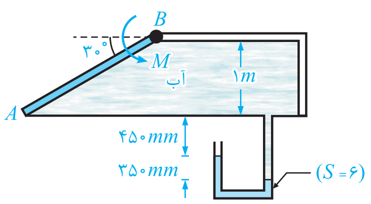
۱. اگر در حل مسأله فقط مقدار نیروی هیدرواستاتیک موردنیاز باشد و محل اثر نیرو را نخواهیم، در این‌صورت صرف‌نظر از شکل سطح موردنظر، از روش فرمول ($F = P_G\,A$) استفاده می‌کنیم. (مثل تمرین‌های ۳، ۴ و ۵)

۲. اگر در حل مسأله محاسبهٔ لنگر نیروی هیدرواستاتیک هم موردنیاز باشد، لازم است تا محل اثر نیرو نیز مورد توجه قرار گیرد. در این حالت بسته به شکل سطح موردنظر، از دو راهکار زیر استفاده می‌شود:

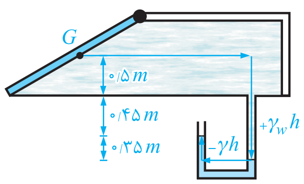
- چنانچه صفحه موردنظر غیرمستطیلی باشد، حتماً از روش فرمول ($F = P_G\,A$) استفاده می‌کنیم و پس از محاسبهٔ نیرو، آن را به مرکز سطح صفحه منتقل کرده و اثر لنگر ناشی از این انتقال ($M_G = \gamma I \sin\theta$) را نیز اعمال می‌کنیم (مثل تمرین‌های ۹ و ۱۱)
- اگر صفحهٔ مورد نظر مستطیلی باشد، علاوه بر روش فرمول و انتقال نیرو به مرکز سطح، می‌توان از روش منشور فشار نیز استفاده کرد. (مثل تمرین‌های ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۵)

در ادامه می‌خواهیم بحث لنگرگیری در صفحات مستطیلی را با بررسی دو تمرین و به‌کارگیری هر دو روش فرمول و منشور فشار به شما نشان دهیم تا خودتان راه حل مناسب در حل اینگونه مسائل را انتخاب کنید.

تمرین ۱۶: در شکل مقابل اولاً نیروی وارده از طرف آب به دریچه چقدر است؟ ثانیاً گشتاور M حول B حداقل چقدر باشد تا دریچه بسته نگه داشته شود؟ (عرض دریچه ۲ متر است و از وزن آن صرف‌نظر می‌شود.)



● حل: در قسمت اول این سؤال فقط نیروی هیدرواستاتیک خواسته شده است، بنابراین با استفاده از روش فرمول خواهیم داشت:

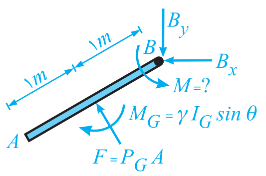


$$P_G + \gamma_w\, h_w - \gamma h = P_{atm} = ۰$$
$$P_G + (۱۰)(۰/۵ + ۰/۴۵ + ۰/۳۵) - (۶\times۱۰)(۰/۳۵) = ۰$$
$$\Rightarrow\ P_G = ۸\ kPa$$
$$F = P_G A = (۸)(\frac{۱}{\sin ۳۰}\times ۲) = ۳۲\ kN$$

اما برای به‌دست آوردن M (گشتاور لازم جهت بسته نگهداشتن دریچه)، لازم است تا محل اثر این نیروی هیدرواستاتیک را نیز بدانیم. از آنجاکه سطح موردنظر مستطیلی است، لذا می‌توان از هر دو روش فرمول و منشور فشار استفاده نمود.

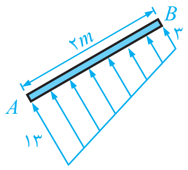
حل با روش استفاده از فرمول:

دیاگرام جسم آزاد دریچه را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم که در آن نیروی هیدرواستاتیک F به مرکز سطح دریچهٔ مستطیلی (وسط آن) منتقل شده و لنگر M_G ناشی از این انتقال را نیز لحاظ کرده‌ایم.



$$\begin{cases} \sum M_B = ۰\ \Rightarrow\ M = F\times۱ + M_G \\ M_G = \gamma I_G \sin\theta = (۱۰)(\frac{۲\times۲^۳}{۱۲})(\sin۳۰^\circ) \simeq ۶/۶۷\ kN.m \end{cases}$$
$$\Rightarrow\ M = ۳۲\times۱ + ۶/۶۷ = ۳۸/۶۷\ kN.m$$

حل با روش ترسیم منشور فشار:

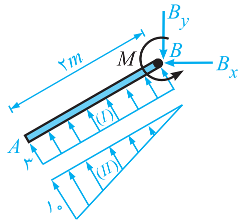


ابتدا با یافتن فشار در بالا و پایین دریچهٔ مستطیلی، منشور فشار را رسم می‌نماییم که چون فشار در مرکز دریچه $P_G = ۸\ kPa$ به‌دست آمده است، می‌توان گفت:

$$P_A = P_G + \gamma_w \times ۰/۵ = ۸ + ۱۰ \times ۰/۵ = ۱۳\ kPa$$

$$P_B = P_G - \gamma_w \times ۰/۵ = ۸ - ۱۰ \times ۰/۵ = ۳\ kPa$$

همانطورکه ملاحظه می‌کنید منشور فشار حاصل، ذوزنقه‌ای شکل بوده و به همین علت آن را به یک مثلث و مستطیل تقسیم می‌کنیم. در ادامه نیز با نوشتن رابطه تعادل $\sum M_B = ۰$، مقدار M را به‌صورت زیر می‌یابیم:

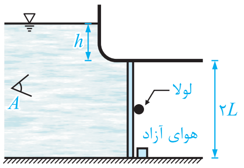


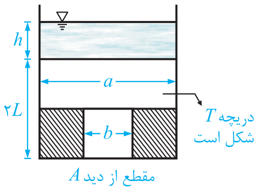
$$\sum M_B = ۰ \;\Rightarrow\; M = M_I + M_{II}$$

$$M = [(۳\times۲)(۲)](\frac{۱}{۲}\times۲) + [(\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۲)(۲)](\frac{۲}{۳}\times۲)$$

$$\Rightarrow\; M = ۳۸/۶۷\ kN.m$$

تمرین ۱۷: شکل زیر دریچه‌ای که با بالا آمدن سطح آب به‌طور خودکار باز می‌شود را از دو جهت نشان می‌دهد. لولایی که باعث چرخش دریچه می‌شود، در وسط آن قرار دارد. عرض دریچه در بالای لولا a و در پایین آن b است. نسبت $\frac{a}{b}$ چقدر باشد تا وقتی $h \geq L$ شود، دریچه باز شود؟ (سراسری – ۸۶)





۱) $\frac{a}{b} \geq \frac{۳}{۲}$

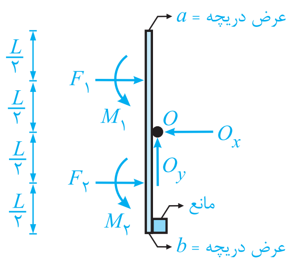
۲) $\frac{a}{b} \leq ۲$

۳) $\frac{a}{b} \geq ۲$

۴) $\frac{a}{b} \leq \frac{۳}{۲}$

حل: لنگر ناشی از نیروهای هیدرواستاتیکی وارد بر دریچه حول لولا، باعث باز شدن دریچه می‌شود. بنابراین علاوه بر مقدار نیروهای هیدرواستاتیک، محل اثر آنها (جهت محاسبهٔ لنگر حول لولا) نیز مورد نیاز می‌باشد. از طرفی دریچهٔ داده شده، از دو قطعهٔ مستطیلی (با عرض‌های a و b و ارتفاع‌های مساوی L) تشکیل شده است، لذا می‌توان از هر دو روش فرمول و منشور فشار، مسأله را حل کرد.

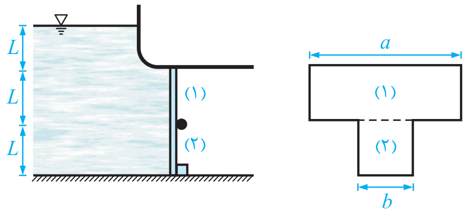
حل سؤال با روش استفاده از فرمول:



نیروهای هیدرواستاتیک و لنگرهای ناشی از انتقال آنها به مرکز سطح که بر قطعه‌های بالایی (قطعهٔ ۱) و پایینی (قطعهٔ ۲) دریچه وارد می‌شوند، مطابق شکل روبرو (دیاگرام جسم آزاد) می‌باشند. با توجه به مانع قرار گرفته در پایین شکل،دریچه نمی‌تواند به‌صورت پادساعتگرد حول لولا دوران کند (چرا؟)، بنابراین هنگامی دریچه باز می‌شود که لنگر ساعتگرد حول لولای O (ناشی از $F_۱$) از لنگرهای پادساعتگرد حول این لولا (ناشی از $F_۲$، $M_۱$ و $M_۲$) بیشتر شود. از این‌رو می‌نویسیم:

شرط باز شدن دریچه : $F_۱ \times \frac{L}{۲} \geq F_۲ \times \frac{L}{۲} + M_۱ + M_۲$

حال به ازاء $h=L$ (طبق صورت سؤال که h را بزرگتر یا مساوی L می‌داند)، خواهیم داشت:



$$F_۱=(P_G A)_۱=[(\gamma_w)(L+\frac{L}{۲})](L\times a)=\frac{۳}{۲}\gamma_w L^۲ a$$

$$F_۲=(P_G A)_۲=[(\gamma_w)(۲L+\frac{L}{۲})](L\times b)=\frac{۵}{۲}\gamma_w L^۲ b$$

$$M_۱=(\gamma I_G \sin\theta)_۱=(\gamma_w)(\frac{aL^۳}{۱۲})(۱)=\frac{۱}{۱۲}\gamma_w L^۳ a$$

$$M_۲=(\gamma I_G \sin\theta)_۲=(\gamma_w)(\frac{bL^۳}{۱۲})(۱)=\frac{۱}{۱۲}\gamma_w L^۳ b$$

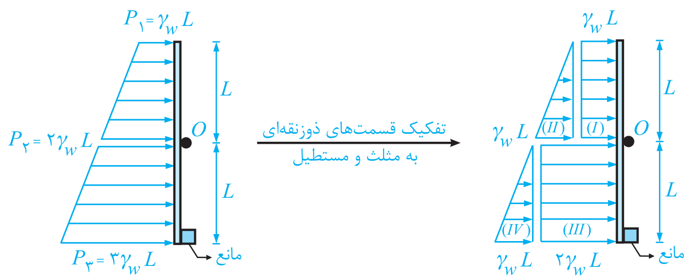
که با جایگذاری مقادیر فوق در رابطهٔ شرط باز شدن دریچه، مقدار $\frac{a}{b}$ حداقل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{۳}{۲}\gamma_w L^۲ a\times\frac{L}{۲}\ge\frac{۵}{۲}\gamma_w L^۲ b\times\frac{L}{۲}+\frac{۱}{۱۲}\gamma_w L^۳ a+\frac{۱}{۱۲}\gamma_w L^۳ b \Rightarrow ۲\gamma_w L^۳ a\ge ۴\gamma_w L^۳ b \Rightarrow \frac{a}{b}\ge ۲$$

بنابراین گزینهٔ (۳) پاسخ صحیح این تست است.

حل سؤال با روش ترسیم منشور فشار:

ابتدا به ازاء $h=L$، منشور فشار وارد بر قسمت‌های بالایی و پایینی دریچهٔ داده شده را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:



همانطور که گفته شد، لنگرهای ساعتگرد حول لولا (ناشی از منشور فشارهای I و II) باید از لنگرهای پادساعتگرد (ناشی از منشور فشارهای III و IV) بزرگتر شوند تا دریچه باز شود، بنابراین در ادامه می‌نویسیم:

$$M_I+M_{II}\ge M_{III}+M_{IV}$$

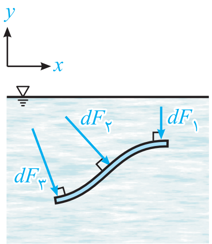
$$[(\gamma_w L\times L)(a)](\frac{L}{۲})+[(\frac{۱}{۲}\gamma_w L\times L)(a)](\frac{L}{۳})\ge[(۲\gamma_w L\times L)(b)](\frac{L}{۲})+[(\frac{۱}{۲}\gamma_w L\times L)(b)](\frac{۲L}{۳})$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}\gamma_w L^۳ a\ge\frac{۴}{۳}\gamma_w L^۳ b \Rightarrow \frac{a}{b}\ge ۲$$

توجه: حالت مساوی در رابطهٔ نامساوی لنگرها مربوط به حالت حدی و آستانهٔ باز شدن دریچه است.

قسمت دوم: نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح منحنی

مقدمه



شکل روبرو یک سطح منحنی را نشان می‌دهد که جزء نیروهای عمودی فشار (dF)، در برخی نقاط آن مشخص شده‌اند. همانطور که می‌بینید چون جهت dFها در نقاط مختلف سطح منحنی متفاوت است، بنابراین نمی‌توان آنها را به سادگی جمع نموده و F کل را به‌دست آورد.

در این شرایط بایستی برای محاسبهٔ نیروی هیدرواستاتیک و نیز تعیین محل اثر آن از روش‌های دیگری استفاده شود که در این قسمت به این موضوع خواهیم پرداخت. بخش‌های مختلف این قسمت به شرح زیر می‌باشند:

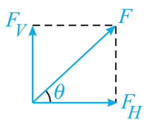
محاسبه نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح منحنی
- محاسبهٔ مؤلفه‌های بردار نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطح منحنی
- خاصیت ویژهٔ سطوح دایروی و کروی در محاسبهٔ نیروی هیدرواستاتیک

B-۱- محاسبه مؤلفه‌های بردار نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطح منحنی

همانطور که گفتیم، برای تعیین نیروی هیدرواستاتیکِ وارد بر یک سطح منحنی نمی‌توان جزء نیروهای وارد بر این سطح را با هم جمع جبری نمود. در این حالت لازم است تا ابتدا هر یک از جزء نیروها را به مؤلفه‌های افقی (dF_H) و قائم (dF_V) تجزیه کرده و سپس از جمع جبری آنها در دو امتداد افقی و قائم، به‌ترتیب مؤلفه‌های افقی و قائم بردار نیرو یعنی F_H و F_V را به‌دست آوریم. در نهایت نیز بردار نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطح منحنی مذکور، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{F} = F_H \hat{i} + F_V \hat{j}$$

حال اگر بزرگی (اندازه) این بردار و نیز امتداد آن با افق مورد نظر باشد، در آن‌صورت به‌سادگی می‌توان نوشت:



$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{F_V}{F_H}$$

همانطورکه ملاحظه می‌کنید با به‌دست آوردن مؤلفه‌های نیرویی F_H و F_V، می‌توان تمامی اطلاعات مربوط به بردار نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک سطح منحنی را به‌دست آورد. ما در ادامه می‌خواهیم شما را با نحوهٔ به‌دست آوردن هر یک از این مؤلفه‌ها آشنا کنیم.

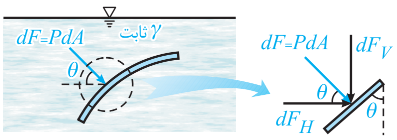
زیر شاخه‌های قسمت دوم

B-۱- محاسبهٔ مؤلفه‌های بردار نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطح منحنی

B-۲- خاصیت ویژهٔ سطوح دایروی و کروی در محاسبهٔ نیروی هیدرواستاتیک

تعیین مؤلفه افقی نیروی هیدرواستاتیک (F_H)

طبق آنچه گفته شد، جهت تعیین F_H لازم است تا مؤلفه‌های افقی جزء نیروهای هیدرواستاتیکی، یعنی dF_Hها را با هم جمع کنیم. برای این منظور ابتدا جزء نیروی dF را که بر یک نقطه از سطح منحنیِ شکل زیر وارد مـی‌شـود، در نظر بگیرید. در فصل دوم دیدید که $dF = P\,dA$ است، پس برای به‌دست آوردن مؤلفهٔ افقی این جزء نیرو، ابتـدا آن را در دو امتداد افقی و قائم تصویر کرده و سپس مؤلفهٔ افقی جزء نیرو را مدنظر قرار می‌دهیم:

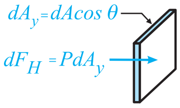


$$dF_H = dF\cos\theta = (P\,dA)\cos\theta = P\,(dA\cos\theta)$$

عبارت $dA\cos\theta$ در واقع تصویر قائم جـزء سـطح dA (متنـاظر بـا dF) اسـت کـه آن را بـا dA_y نـشان داده و می‌نویسیم:

$$dF_H = PdA_y$$

یعنی برای محاسبهٔ هر جزء نیروی هیدرواستاتیکی افقی روی المان سطح (dF_H) کـافی اسـت تـا تـصویر قـائم المان سطح را در فشار روی این المان (فشار در نقطه‌ای که المان قرار دارد) ضرب کنیم.

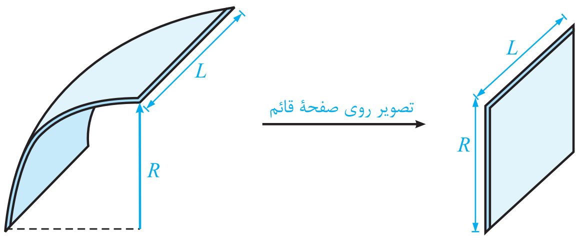


حال اگر بخواهیم F_H کل را به‌دست آوریم، با جمع جبری dF_Hها و فرض ثابت بودن γ مایع، خواهیم داشت:

$$F_H = \int_{A_y} dF_H = \int_{A_y} PdA_y = \gamma\int_{A_y}\gamma h dA_y = \gamma\int_{A_y} h dA_y = \gamma\bar{h}A_y \Rightarrow \boxed{F_H = \gamma\bar{h}A_y = P_G A_y}$$

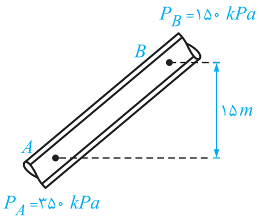
که در رابطهٔ بالا، A_y مساحت تصویر قائم سطح منحنی و $\bar{h}$ فاصلهٔ مرکز سطح آن تا سطح آزاد اسـت. P_G نیـز فشار در مرکز سطح تصویر قائم منحنی (مرکز سطح A_y) می‌باشد.

مثال: یک سطح ربع استوانه‌ای به شعاع R و طول L را مطابق شکل زیر در نظر بگیریـد. اگـر بخـواهیم مؤلفـهٔ افقی نیروی هیدرواستاتیک وارد بر این سـطح را بیـابیم، ابتـدا بایـستی آن را روی راسـتای قـائم تـصویر کـنیـم. ملاحظه می‌کنید که در این حالت تصویر حاصل یک سطح تخت مستطیلی قائم با ابعاد $R\times L$ می‌باشد.



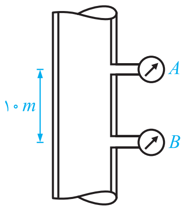
حال در ادامه، سطح مستطیلی به‌دست آمده را مدنظر قرار داده و براسـاس مطالـب گفتـه شـده در قـسمت اول، نیروی هیدرواستاتیک وارد بر آن را تعیین می‌کنیم. نیروی به‌دست آمده، همان مؤلفهٔ F_H وارد بر سطح منحنـی ربع استوانه‌ای است.

۱۱-سیالی با وزن مخصوص ۱۵ kN/m^3 در لولهٔ یکنواختی جریان دارد. در شکل فشار در مقطع‌های A و B با اختلاف ارتفاع ۱۵ متر نشان داده شده است. در مورد جهت جریان چه می‌توان گفت؟



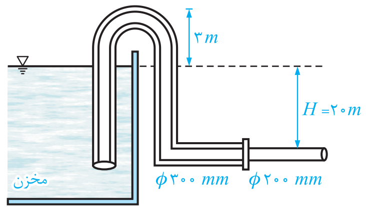
۱) آب در لوله ساکن است.
۲) جهت جریان از A به‌طرف B است.
۳) جهت جریان از B به‌طرف A است.
۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

۱۲- فشار در نقطهٔ A، ۱۰ kPa و در نقطهٔ B، ۱۱/۵ kPa است. جهت جریان: (سراسری – ۸۶)



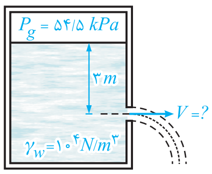
۱) جریانی وجود ندارد.
۲) به‌سمت پایین است.
۳) به‌سمت بالا است.
۴) به دلیل کافی نبودن اطلاعات لازم، تعیین آن ممکن نیست.

۱۳- در شکل، جریان سیالی از یک مخزن بزرگ توسط یک سیفون برقرار است. با صرف‌نظر کردن از افت‌های طولی و موضعی، سرعت و دبی جریان خروجی به‌ترتیب برابرند با: $(\pi = 3 ، g = 10\ m/s^2)$ (سراسری–۷۹)



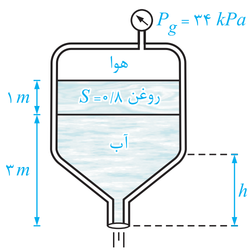
۱) $V = 20\ m/s$ و $Q = 600\ lit/s$
۲) $V = 25\ m/s$ و $Q = 750\ lit/s$
۳) $V = 25\ m/s$ و $Q = 600\ lit/s$
۴) $V = 20\ m/s$ و $Q = 750\ lit/s$

۱۴- مخزنی مسدود تحت فشار ۵۴/۵ kPa قرار دارد. در وضعیت نشان داده شده در شکل، سرعت جریان در روزنهٔ خروجی با صرف‌نظر کردن از تمامی افت‌ها برابر چند m/s است؟ $(g = 10\ m/s^2)$ (سراسری – ۷۷)



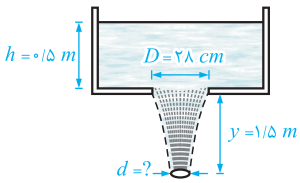
۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۳

۱۵- یک مخزن استوانه‌ای مطابق شکل زیر محتوی هوا، آب و روغن است. فشار ۳۴ kPa توسط هوا بر روغن اعمال می‌شود. اگر از اصطکاک در تمام نقاط و نیز انرژی جنبشی سیال در بالای ارتفاع h صرف‌نظر کنیم، سرعت آب خروجی چقدر است؟ $(g = 10\ m/s^2 ، \gamma_w = 10\ kN/m^3)$



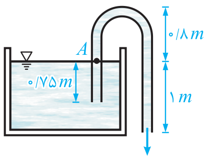
۱) ۷/۲ m/s
۲) ۸/۶ m/s
۳) ۹ m/s
۴) ۱۲ m/s

۱۶- در شکل زیر قطر جت خارج شده از روزنه در فاصله ۱/۵ متری از کف مخزن تقریباً چقدر است؟ قطر روزنه تعبیه شده در کف مخزن ۲۸ cm است و از تلفات صرف‌نظر شده است. $(\sqrt{۲} \simeq ۱/۴)$



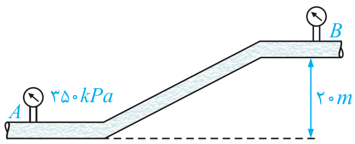
۱) ۱۴ cm
۲) ۲۰ cm
۳) ۷ cm
۴) ۱۰ cm

۱۷- مایعی در سیفون نشان داده شده در شکل، جریان دارد. با صرف‌نظر کردن از هرگونه افت انرژی در مسیر، فشار مطلق در نقطهٔ A برابر کدام‌یک از مقادیر زیر است؟ فشار هوا در محل برابر P_a پاسکال و وزن مخصوص مایع γ نیوتن بر هر متر مکعب است. قطر سیفون ثابت است. (سراسری - ۸۳)



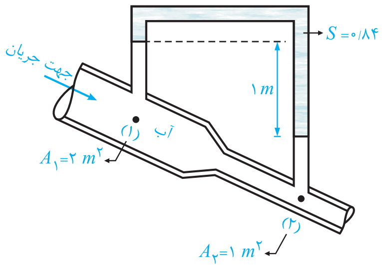
۱) $P_a - \gamma$
۲) $۰/۸\gamma$
۳) $P_a - ۰/۷۵\gamma$
۴) $P_a + ۰/۸\gamma$

۱۸- جریان دائمی آب در سیستم لوله‌گذاری روی سطح افق که در آن قطر لوله ثابت است، مطابق شکل از A به B برقرار می‌باشد. اگر افت انرژی در طول لوله بین نقاط A و B معادل ۵ m ارتفاع آب باشد، مقدار فشار در نقطهٔ B چند kPa خواهد بود؟ $(\gamma_w = ۱۰\ kN/m^۳)$



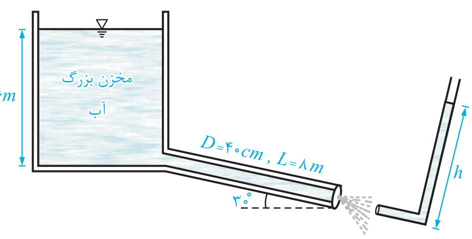
۱) ۱۰۰
۲) ۲۰۰
۳) ۳۰۰
۴) ۱۵۰

۱۹- در شکل زیر افت انرژی بین نقاط (۱) و (۲) برابر $۰/۲\frac{V_۱^۲}{۲g}$ است. دبی جریان را بر حسب $m^۳/s$ محاسبه کنید. $(g = ۱۰\ m/s^۲)$



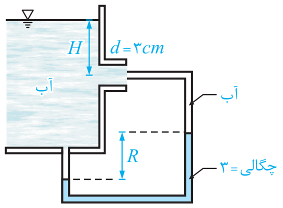
۱) ۴
۲) ۳/۲
۳) ۲
۴) ۱/۶

۲۰- جهت انتقال آب از یک مخزن بزرگ به پایین‌دست، از لوله‌ای با قطر ۴۰cm استفاده می‌شود. طول لوله ۸ متر و افت انرژی در اثر اصطکاک در واحد طول آن $۰/۵\frac{V^۲}{۲g}$ می‌باشد. اگر یک لولهٔ پیتو برای اندازه‌گیری دبی داخل لوله در انتهای آن قرار داشته باشد، ارتفاع بالا روی آب در لوله پیتو (h) چقدر خواهد بود؟ (از تلفات موضعی صرف‌نظر کنید.)



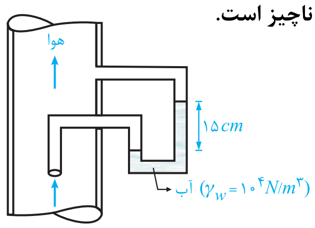
۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ متر
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ متر
۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ متر
۴) $۲\sqrt{۳}$ متر

۲۱- در شکل مقابل، اگر افت انرژی مربوط به خروج آب از ســوراخ معــادل H ۰/۱ باشد، اختلاف سطح مانومتر (R) بر حسب H چقدر است؟ (سراسری – ۷۹)



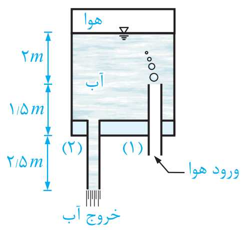
۱) ۰/۱
۲) ۰/۰۳۳
۳) ۰/۰۵
۴) صفر

۲۲- در شکل زیر اختلاف ارتفاع آب توسط مانومتر برابر $15\ cm$ نشان داده شده است. ســرعت هــوا در لولــه تقریبــاً چند m/s است؟ جرم مخصوص هوای درون لوله $1/2\ kg/m^3$ بوده و تلفات ناچیز است.



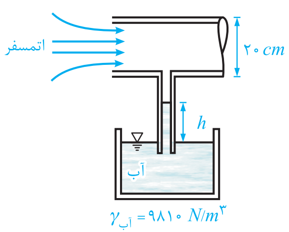
۱) ۱۵/۸
۲) ۵۰
۳) ۳۵/۴
۴) ۲۵

۲۳- در شکل زیر هوا از طریق لوله ۱ به درون محفظه وارد می‌شود و جریان آب از طریق لوله ۲ خارج مــی‌شــود. ســرعت جریان آب خروجی چقدر است؟ (g شتاب ثقل و چگالی هوا ناچیز و سطح محفظه بزرگ فرض می‌شود.) (سراسری – ۹۳)



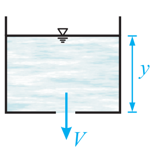
۱) $\sqrt{2g}$
۲) $2\sqrt{3g}$
۳) $2\sqrt{2g}$
۴) $3\sqrt{2g}$

۲۴- در نزدیکی دهانهٔ ورودی یک کمپرسور هوا، مانومتری مطــابق شــکل بــرای اندازه‌گیری دبی هوای ورودی به کمپرسور تعبیه شده است. اگر ارتفاع مایع مانومتر $h = 25\ cm$ و وزن مخصوص هوا $\gamma_{air} = 10\ N/m^3$ باشد، دبی هوای مکیــده شــده توســط کمپرســور چنــد lit/sec اســت؟ ($\pi = 3$ و $g = 10\ m/s^2$) (سراسری – ۷۷)



۱) ۱۴۰۰
۲) ۲۱۰۰
۳) ۲۸۰۰
۴) ۵۶۰۰

۲۵- آب از سوراخی به قطر d در کف یک مخزن کوچک به‌طول L و عرض B به خارج تخلیه مــی‌گــردد. اگــر از افــت انرژی صرف‌نظر کنیم، معادله حاکم بر عمق آب $y(t)$ چه می‌باشد؟ V سرعت متوسط خروجی می‌باشــد. (انــرژی جنبشی حرکت سطح آب ناچیز است). (سراسری – ۹۳)



۱) $y = (\frac{\pi d^2}{4BL} t)^2 2g$
۲) $\frac{dy}{dt} = \frac{2BL}{\pi d^2}\sqrt{2gy}$
۳) $\frac{dy}{dt} + \frac{4BL}{\pi d^2} V = 0$
۴) $\frac{dy}{dt} = -\frac{\pi d^2}{4BL}\sqrt{2gy}$

۱۱- (۳)

می‌دانیم در غیاب پمپ جهت جریان با استفاده از هد کل (H) مشخص می‌شود، به این ترتیب که جهت جریان همواره از انرژی کل بیشتر به‌سمت انرژی کل کمتر است. در این مسأله داریم:

$$\begin{cases} H_A = \overbrace{z_A}^{\text{نقطهٔ پایین‌تر } (z_A=0)} + \dfrac{P_A}{\gamma} + \dfrac{V_A^2}{2g} = \dfrac{350}{15} + \dfrac{V^2}{2g} = \dfrac{70}{3} + \dfrac{V^2}{2g} = 23/3 + \dfrac{V^2}{2g} \\ H_B = \underbrace{z_B}_{\text{نقطهٔ بالاتر } (z_B=\Delta z_{AB}=15\,m)} + \dfrac{P_B}{\gamma} + \dfrac{V_B^2}{2g} = 15 + \dfrac{150}{15} + \dfrac{V^2}{2g} = 25 + \dfrac{V^2}{2g} \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنید که $H_B > H_A$ بنابراین جهت جریان از B به‌طرف A است.

۱۲- (۴)

همان‌طور که در متن درس اشاره شد، در یک لولهٔ جریان با مقطع ثابت، چون سرعت ثابت است جهت جریان با استفاده از جملات $(\frac{P}{\gamma}+z)$ مشخص می‌شود، به این ترتیب که جریان همواره از نقطه‌ای که دارای انرژی هیدرولیکی بیشتر است به‌سمت نقطه‌ای که انرژی هیدرولیکی کمتری دارد، حرکت می‌کند. در این سؤال داریم:

$$\begin{cases} (\dfrac{P}{\gamma}+z)_A = \dfrac{10}{\gamma} + 10 = 10(\dfrac{1}{\gamma}+1) \\ (\dfrac{P}{\gamma}+z)_B = \dfrac{11/5}{\gamma} + 0 = \dfrac{11/5}{\gamma} \end{cases}$$

برای مقایسه دو عبارت فوق حتماً بایستی مقدار γ مشخص باشد، بنابراین اطلاعات مسأله برای تعیین جهت جریان کافی نمی‌باشد.

۱۳- (۱)

چون هیچ تلفاتی نداشته و در سطح مخزن $P=0$ است، بنابراین طبق رابطهٔ توریچلی می‌نویسیم:

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times10\times20} = 20\,m/s$$

$$Q = VA = (V)(\frac{\pi D^2}{4}) = (20)(\frac{3\times0/2^2}{4}) \times \underbrace{10^3}_{\text{تبدیل } m^3/s \text{ به } lit/s} = 600\,lit/s$$

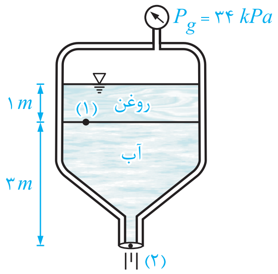
۱۴- (۴)

با فرض این که نقطهٔ واقع بر روزنه خروجی روی سطح مبنا قرار گرفته است، معادلهٔ برنولی را بین این نقطه (۲) و نقطه‌ای که روی سطح مایع قرار دارد (۱) می‌نویسیم و از آنجا سرعت جریان در روزنه خروجی را به‌دست می‌آوریم:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow 3 + \frac{54/5}{10} + 0 = 0 + 0 + \frac{V_2^2}{2\times10} \Rightarrow V_2 = 13\,m/s$$

۱۵- (۴)

معادلهٔ برنولی را بین نقطهٔ (۱) در سطح آب و نقطهٔ (۲) در محل خروجی جریان نوشته و با جایگذاری مقادیر ترم‌های معلوم آن، مقدار سرعت خروجی را به‌صورت زیر می‌یابیم:



$$\begin{cases} z_1 + \dfrac{P_1}{\gamma} + \dfrac{V_1^2}{2g} = z_2 + \dfrac{P_2}{\gamma} + \dfrac{V_2^2}{2g} \\ z_2 = 0 \ , \ z_1 = \Delta z = 3\ m \\ P_1 = P_g + (\gamma h)_{\text{روغن}} = 34 + (0.8 \times 10)(1) = 42\ kPa \ , \ P_2 = 0 \\ \dfrac{V_1^2}{2g} = 0 \ \text{(داخل مخزن)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3 + \frac{42}{10} + 0 = 0 + 0 + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow V_2^2 = 144 \Rightarrow V_2 = 12\ m/s$$

۱۶- (۲)

رابطهٔ توریچلی را یک‌بار برای روزنه (نقطهٔ ۱) و بار دیگر برای فاصله y از روزنه (نقطهٔ ۲) می‌نویسیم:

$$\begin{cases} V_1 = \sqrt{2gh} \\ V_2 = \sqrt{2g(h+y)} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{h+y}{h}}$$

از طرفی طبق رابطهٔ پیوستگی جریان، داریم:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_1\left(\frac{\pi \times D_1^2}{4}\right) = V_2\left(\frac{\pi \times D_2^2}{4}\right) \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

حال با مقایسه روابط به‌دست آمده، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{h+y}{h}\right) = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 \Rightarrow D_2 = \frac{D_1}{\sqrt[4]{1+\left(\frac{y}{h}\right)}} = \frac{28}{\sqrt[4]{1+\left(\frac{1.5}{0.5}\right)}} = \frac{28}{\sqrt{2}} \simeq \frac{28}{1.4} = 20\ cm$$

۱۷- (۱)

با نوشتن معادلهٔ برنولی بین نقطهٔ A و نقطهٔ خروجی در انتهای لولهٔ سیفون (B)، خواهیم داشت:

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} \xrightarrow{V_A = V_B} 1 + \frac{P_A}{\gamma} = 0 + \frac{P_a}{\gamma} \Rightarrow P_A = P_a - \gamma$$

توجه: طبق خواستهٔ صورت سؤال، مقادیر فشار در معادلهٔ برنولی را مطلق در نظر گرفته‌ایم.

۱۸- (۳)

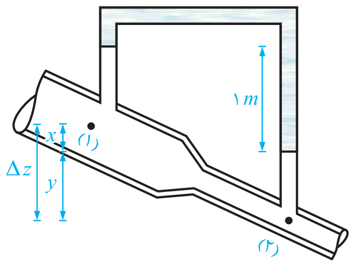
چون سطح مقطع لوله در تمام طول جریان ثابت است، بنابراین با توجه به رابطهٔ پیوستگی جریان می‌توان نتیجه گرفت که سرعت در کلیه مقاطع یکسان است $(V_A = V_B)$. از طرفی مجموعه روی سطح افقی قرار داشته و لذا $z_A = z_B$ می‌باشد. در این شرایط با نوشتن معادلهٔ برنولی بین این دو نقطه خواهیم داشت:

$$\cancel{z_A} + \frac{P_A}{\gamma} + \cancel{\frac{V_A^2}{2g}} = \cancel{z_B} + \frac{P_B}{\gamma} + \cancel{\frac{V_B^2}{2g}} + \Delta H_{(AB)} \Rightarrow \frac{350}{10} = \frac{P_B}{10} + 5 \Rightarrow P_B = 300\ kPa$$

۱۹- (۳)

برای حل این تست ابتدا معادلهٔ برنولی را بین دو نقطهٔ (۱) و (۲) که در شکل زیر نشان داده شده‌اند می‌نویسیم و سپس با توجه به مطالب خوانده شدهٔ قبلی و نیز اطلاعات صورت سؤال، ترم‌های قابل تعیین این معادله را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} z_۱+\dfrac{P_۱}{\gamma}+\dfrac{V_۱^۲}{۲g}=z_۲+\dfrac{P_۲}{\gamma}+\dfrac{V_۲^۲}{۲g}+\Delta H_{(۱-۲)} \\ z_۲=۰ \ ، \ z_۱=\Delta z \\ P_۱-(\gamma_w)(۱-x)+(۰/۸۴\,\gamma_w)(۱)+(\gamma_w)(y)=P_۲ \\ \Rightarrow \dfrac{P_۱-P_۲}{\gamma_w}=۰/۱۶-(x+y)=۰/۱۶-\Delta z \\ V_۱A_۱=V_۲A_۲ \ \Rightarrow V_۱\times ۲=V_۲\times ۱ \Rightarrow V_۲=۲V_۱ \end{cases}$$



در ادامه با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده و نیز قرار دادن $\Delta H=۰/۲\dfrac{V_۱^۲}{۲g}$ در معادلهٔ برنولی، به‌صورت زیر مقدار سرعت در مقطع (۱) را می‌یابیم:

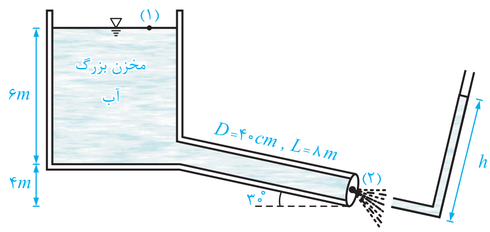
$$\Delta z+\underbrace{\boxed{(۰/۱۶-\Delta z)}}_{\left(\frac{P_۱-P_۲}{\gamma_w}\right)}+\frac{V_۱^۲}{۲g}=۰+\frac{(۲V_۱)^۲}{۲g}+۰/۲\frac{V_۱^۲}{۲g} \ \Rightarrow \ ۳/۲\frac{V_۱^۲}{۲g}=۰/۱۶ \ \Rightarrow \ V_۱=۱\,m/s$$

و درنهایت مقدار دبی برابر می‌شود با:

$$Q=V_۱A_۱=۱\times ۲=۲\,m^۳/s$$

۲۰- (۳)

ابتدا معادله برنولی را بین نقطهٔ (۱) در بالای مخزن و نقطهٔ (۲) در خروجی لوله به اتمسفر نوشته و به‌صورت زیر، هد سرعت خروجی از لوله را می‌یابیم:



$$z_۱+\frac{P_۱}{\gamma}+\frac{V_۱^۲}{۲g}=z_۲+\frac{P_۲}{\gamma}+\frac{V_۲^۲}{۲g}+\Delta H_{۱-۲} \ \Rightarrow \ ۱۰+۰+۰=۰+۰+\frac{V^۲}{۲g}+۸\times ۰/۵\frac{V^۲}{۲g} \ \Rightarrow \ \frac{V^۲}{۲g}=۲$$

از طرفی می‌دانیم در دهانهٔ لولهٔ پیتو، هد سرعت به ارتفاع سیال داخل این لوله تبدیل می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{V^۲}{۲g}=\text{ارتفاع قائم سیال در لولهٔ پیتو}=h\cos ۳۰^\circ \ \Rightarrow \ ۲=h\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} \ \Rightarrow \ h=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\,m$$

سوالات آزمون سراسری ۹۸

۱- هنگامی‌که دو برابر کردن دبی جریان درون یک لوله، تلفات را ۴ برابر می‌کند، تلفات انرژی چگونه با سرعت V تغییر می‌نماید و جریان از چه نوعی است؟

۱) ۲ برابر $V^{۲}$ و جریان از نوع آشفته

۲) ۴ برابر $V^{۲}$ و جریان از نوع آشفته

۳) ۲ برابر $V^{۲}$ و جریان از نوع آرام

۴) ۴ برابر $V^{۲}$ و جریان از نوع آرام

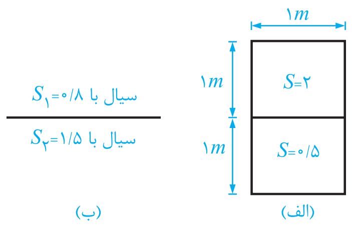
۲- پیستونی با دانسیته $۸\ gr/cm^{۳}$ به طول $۱۰\ cm$ و قطر $۱۰\ cm$ در داخل یک سیلندر با سرعت ثابت $۲۰\ cm/s$ به سمت پایین حرکت می‌کند. اگر مابین سیلندر و پیستون روغنی با ضخامت $۰/۱\ mm$ پرشده باشد، ویسکوزیتهٔ این روغن چند $kg/m.s$ است؟ (از اثرات هوا صرف‌نظر نمایید و $g = ۱۰\ m/s^{۲}$)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۱/۰ ۴) ۱/۱

۳- یک مخزن استوانه‌ای قائم روباز به ارتفاع ۱ متر پر از آب بوده و تحت تأثیر نیروی جاذبهٔ زمین با شتاب ثقل سقوط می‌کند. اگر در کف مخزن سوراخی ایجاد شود، سرعت خروجی آب از کف مخزن (برحسب متر بر ثانیه) چقدر است؟ (شتاب ثقل $g = ۱۰\ m/s^{۲}$)

۱) صفر ۲) ۲/۴۷ ۳) ۳/۱۶ ۴) ۴/۴۷

۴- مکعب مستطیلی به طول ضلع مقطع $۱m$ و سطح مقطع قائم $۲ \times ۱m^{۲}$ مطابق شکل (الف) داخل مجموعه‌ای از دو سیال با چگالی نسبی $S_۱ = ۰/۸$ و $S_۲ = ۱/۵$ (شکل ب) قرار می‌گیرد. باتوجه به اینکه مکعب مستطیل از دو بخش با چگالی‌های نسبی ۲ و ۰/۵ تشکیل شده است، کدام گزینه شرایط تعادل آن را به‌درستی بیان می‌کند؟



۱) فصل مشترک دو نیمه به میزان $\frac{۵}{۷}$ متر پایین‌تر از سطح جدایی سیالات قرار می‌گیرد.

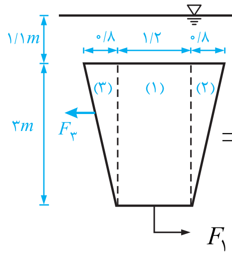
۲) فصل مشترک دو نیمه به میزان $\frac{۳}{۷}$ متر پایین‌تر از سطح جدایی سیالات قرار می‌گیرد.

۳) تمامی نیمهٔ بالایی مکعب و بخشی از نیمهٔ پایینی آن در سیال با چگالی $S_۱$ قرار گرفته و بخش دیگر نیمهٔ پایینی مکعب در سیال $S_۲$ قرار می‌گیرد.

۴) تنها بخشی از نیمهٔ بالایی مکعب داخل سیال با چگالی $S_۱$ قرار گرفته و بخش دیگر این نیمه و کل نیمهٔ پایینی مکعب داخل سیال با چگالی $S_۲$ قرار می‌گیرد.

۱۱- (۳)

برای محاسبهٔ نیروی وارد بر سطح داده شده، آن را به سطوح کوچکتر تفکیک کرده و پس از محاسبهٔ نیروی وارد بر هر قسمت، از جمع آنها نیروی کل وارد بر دریچه را می‌یابیم.

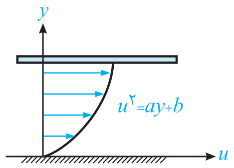


$$\Rightarrow F_۲ = F_۳ = \gamma \bar{h}_۲ A_۲ = (۱)(۱/۱+۱)\left(\frac{۰/۸\times ۳}{۲}\right) = ۲/۵۲\ ton$$

$$F_۱ = \gamma_۱ \bar{h}_۱ A_۱ = (۱)\,(۱/۱+۱/۵)\,(۱/۲\times ۳) = ۹/۳۶\ ton$$

کل $F = F_۱ + F_۲ + F_۳ = ۹/۳۶ + ۲/۵۲ + ۲/۵۲ = ۱۴/۴\ ton$

۱۲- (۱)



$$\Rightarrow \begin{cases} y = ۰ \rightarrow u = ۰ \;\Rightarrow\; b = ۰ \\ y = h \rightarrow u = V \;\Rightarrow\; a = \dfrac{V^۲}{h} \end{cases} \Rightarrow u^۲ = \left(\frac{V^۲}{h}\right) y \;\text{ یا }\; u = \left(\frac{V}{\sqrt{h}}\right)\sqrt{y}$$

$$\tau = \mu\left(\frac{du}{dy}\right) = \mu \times \frac{V}{\sqrt{h}}\left(\frac{۱}{۲\sqrt{y}}\right) = \frac{\mu V}{۲\sqrt{hy}} \begin{cases} y \rightarrow ۰ \;\Rightarrow\; \tau \rightarrow \infty \\ y = h \;\Rightarrow\; \tau = \dfrac{\mu V}{۲h} \end{cases} \Rightarrow$$