سخـــن مــؤلـف

پس از سـال‌ها تدریس در کلاس‌های کنکور کارشناسـی ارشد (برگزاری بیش از ۱۰۰ دوره کلاس در طـی ۱۰ سـال) در قوی‌تریـن مرکز انتشـاراتی کشـور در زمینه مهندسـی عمران، مسئولیت نگارش کتابی به من سپرده شد که با شیوه‌ای نوین و کاملاً هدفمند، علاوه بر آموزش کامل مطالب درسـی، محیط یک کلاس را برای خواننده تداعی کنم. شـاید گزافه نباشـد که این اثر را فصلی نو در کتاب‌های کنکور کارشناسـی ارشـد بدانیم. این کتاب در دو جلد و ۱۶ فصل به صورت کامل به بیان مطالب می‌پردازد.

از ویژگی‌های این کتاب می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- در شروع هر فصل این کتاب، با یک نمودار درختی و تقسیم‌بندی فصل، روند آموزش برای مهندسین گرامی شرح داده شده است. از نظر مؤلف، دسته‌بندی مطالب این کتاب منحصربه‌فرد است.

۲- در درسنامه‌های کتاب، مطالب با توجه به تجربیات مؤلف از ساده به دشوار بیان شده و در هر قسمت با حل مثال‌های متنوع، دانشجو به درک کامل مطلب می‌رسد.

۳- در روند آموزش از جدول‌های سـاده و هدفمند، اسـتفاده زیادی شـده اسـت که درک مطلب را برای دانشـجو ساده‌تر می‌کند. توجه شـود که این شیوه، در بسیاری از کتاب‌های جدیدالتألیف دنیا کاربرد زیادی دارد.

۴- در این کتاب به ضعف‌های اساسی دانشجویان در درس استاتیک و رسم دیاگرام‌های نیروی برشـی و لنگر خمشـی با نگاه مفهومی پرداخته شـده و شـیوه‌های تستی بسیار جدیدی نیز در کنار مطالب مفهومی بیان شده است.

۵- در تست‌های پایان فصل، از سؤالات کنکورهای سراسری، آزاد، آزمایشی سنجش (تسلط) و برای تکمیل مطالب از تست‌های تألیفی استفاده شده است.

۶- در انتها با آوردن قسـمت یک گام فراتر، برای علاقه‌مندان، تست‌های متنوع‌تری نیز بیان شده است.

در خاتمه لازم می‌دانم از زحمات دوست عزیزم جناب آقای دکتر حسام شریفیان مدیریت محترم مؤسسـه سری عمران و جناب آقای محمد آهنگر که در نگارش کتاب به بنده کمک شایانی فرمودند کمال قدردانی و سپاسگزاری را داشته باشم. بدین‌وسـیله از ویراسـتاران محتـرم ایـن کتـاب آقایـان احمـد جوزدانـی، بهرام گراوند و کیوان افراز تشکر می‌کنم.

علیرغم تلاش فراوانی که برای بازبینی این کتاب شده است وجود اشکال در آن غیرممکن نبوده و از اساتید گرانقدر و دانشجویان گرامی تقاضا می‌شود پیشنهادات و انتقادات خود را بـه آدرس اینترنتی **serieomran@yahoo.com** ارسـال فرمایند.

حسین صباغیان طوسی

جلد ۲

فهرست

فصل ۹: کاربرد روابط حفظی در محاسبهٔ شیب و خیز سازه‌های معین

کسی که دارای عزمی راسخ است، جهان را مطابق میل خویش عوض می‌کند. «گوته»

انتشارات سری عمران
www.serieomran.ir

مقدمه

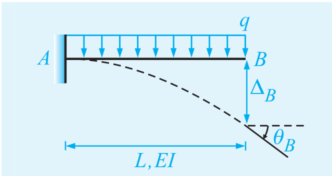
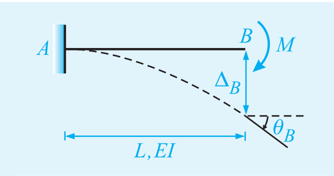
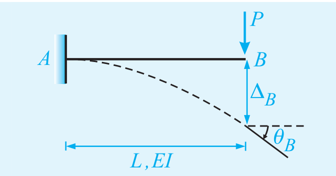
در تعداد قابل ملاحظه‌ای از تست‌های کنکور، خیز و یا شیب ناشی از خمش در نقاطی از سازه پرسیده می‌شود که می‌توان آنها را بدون استفاده از روش‌های کلی محاسبهٔ خیز و شیب، مانند روش کار مجازی و ... ، تنها با به خاطر سپردن خیز و شیب تعدادی از تیرهای ساده و با کمک گرفتن از تکنیک‌های ویژه‌ای که با نگرشی نو در این کتاب به شما آموزش می‌دهیم، با سرعت بالایی حل کرد.

به منظور درک بهتر مهندسین گرامی، این فصل را به بخش‌های زیر تقسیم کرده و در شروع هر بخش، روابط مورد نیاز برای آن بخش را ارائه کرده و در ادامه نحوهٔ استفاده از آن روابط را با حل مسائل متنوعی مورد بررسی قرار می‌دهیم:

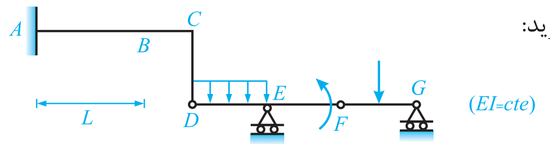
کاربرد روابط رایج خیز و شیب در سازه‌های معین

- A- تحلیل تیرهای کنسولی
- B- تحلیل تیرهای دو سر مفصل
- C- تحلیل تیرهای یک سر مفصل، یک سر لغزنده گیردار
- D- حل مسائل ترکیبی با کمک اصل انطباق‌پذیری

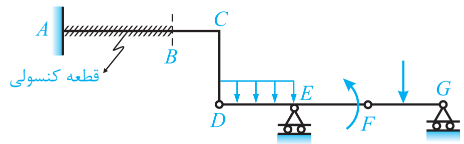
A- تحلیل تیرهای کنسولی

روابطی که باید به خاطر سپرده شوند		
تیر کنسول تحت بار گسترده	تیر کنسول تحت لنگر متمرکز	تیر کنسول تحت بار متمرکز
		
$\theta_B=\frac{qL^3}{6EI}$ ، $\Delta_B=\frac{qL^4}{8EI}$	$\theta_B=\frac{ML}{EI}$ ، $\Delta_B=\frac{ML^2}{2EI}$	$\theta_B=\frac{PL^2}{2EI}$ ، $\Delta_B=\frac{PL^3}{3EI}$

برای شروع این قسمت، سازهٔ معین نشان داده شده در شکل مقابل را درنظر بگیرید:

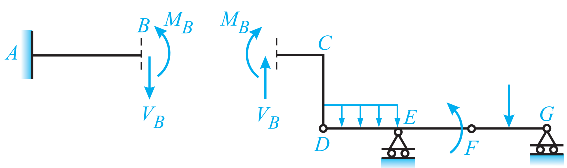


با کمی دقت مشاهده می‌شود که قطعهٔ ABC از این سازه، مانند یک تیر کنسول بوده و می‌خواهیم به شما آموزش بدهیم که چگونه می‌توان شیب و یا خیز هر نقطه دلخواه از آن را با استفاده از روابط فوق به سادگی به‌دست آورد. به همین منظور نقطهٔ دلخواه B را روی این قسمت کنسولی درنظر بگیرید. برای محاسبهٔ خیز و شیب در این نقطه گام‌های زیر باید طی شود:



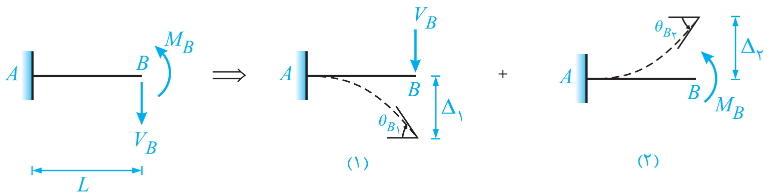
گام ۱: با زدن مقطعی در نقطهٔ B ، سازه را به دو قسمت تقسیم کرده و نیروهای داخلی (برش و خمش) در نقطهٔ B را با استفاده از معادلات تعادل قطعهٔ سمت راست B به‌دست می‌آوریم.

دقت شود با توجه به این که در این فصل می‌خواهیم تنها تغییر شکل‌های خمشی را محاسبه کنیم، نیازی به محاسبهٔ نیروی محوری در B نمی‌باشد (چرا؟).



گام ۲: پس از محاسبهٔ نیروهای داخلی برش و خمش در نقطهٔ B ، قطعهٔ کنسولی AB را به تنهایی درنظر گرفته و با استفاده از روابط ارائه شده، خیز و شیب نقطه B را محاسبه می‌کنیم. توجه کنید که برای محاسبهٔ خیز و شیب، باید یک جهت مثبت قراردادی را درنظر گرفت. در کل این فصل، خیز به سمت پایین برای Δ به عنوان جهت مثبت و دوران در جهت ساعتگرد به عنوان جهت مثبت برای دوران انتخاب شده

است. به طور مثال در شکل مقابل داریم:



شکل (۱) : $\begin{cases} \theta_{B_۱} = +\dfrac{V_B L^۲}{۲EI} & \text{(دوران در جهت ساعتگرد است)} \\ \Delta_۱ = +\dfrac{V_B L^۳}{۳EI} & \text{(خیز } B \text{ به سمت پایین است)} \end{cases}$

شکل (۲) : $\begin{cases} \theta_{B_۲} = -\dfrac{M_B L}{EI} & \text{(دوران در جهت پاد ساعتگرد است)} \\ \Delta_۲ = -\dfrac{M_B L^۲}{۲EI} & \text{(خیز } B \text{ به سمت بالا است)} \end{cases}$

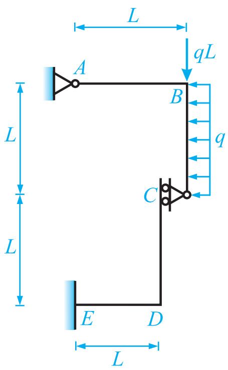
در نهایت خیز و شیب نقطهٔ B در سازهٔ اصلی عبارت است از:

$$\curvearrowright \theta_B = \theta_{B_۱} + \theta_{B_۲} = \frac{V_B L^۲}{۲EI} - \frac{M_B L}{EI}$$

$$\downarrow \Delta_B = \Delta_۱ + \Delta_۲ = \frac{V_B L^۳}{۳EI} - \frac{M_B L^۲}{۲EI}$$

در ادامه با بررسی چند تمرین متنوع، این مطلب را به طور کامل به شما مهندسین عزیز آموزش می‌دهیم.

تمرین ۹-۱: جابه‌جایی قائم گره D در قاب شکل مقابل کدام است؟ (EI ثابت است.)



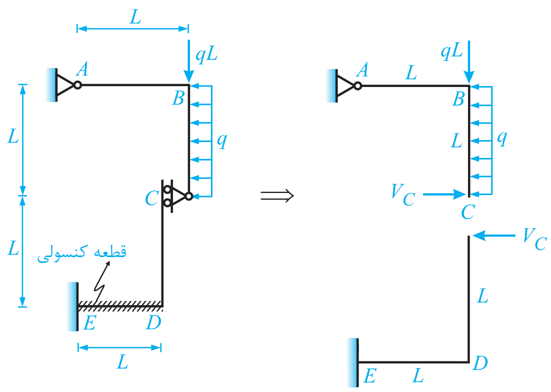
۱) $\frac{۳qL^۴}{۴EI}$ و به سمت بالا

۲) $\frac{qL^۴}{۲EI}$ و به سمت پایین

۳) $\frac{qL^۴}{۲EI}$ و به سمت بالا

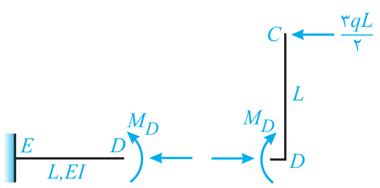
۴) $\frac{۳qL^۴}{۴EI}$ و به سمت پایین

حل: با اندکی دقت، ملاحظه می‌شود که قطعهٔ ED از این قاب معین، یک قطعهٔ کنسولی بوده و می‌توان با روشی که یاد گرفتیم پس از محاسبهٔ برش و لنگر در نقطهٔ D، به سادگی جابه‌جایی قائم آن را محاسبه کرد. برای محاسبهٔ این نیروهای داخلی، ابتدا قاب را از محل اتصال غلتکی در C جدا می‌کنیم:



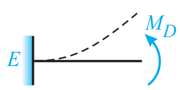
$$ABC \text{ تعادل قطعهٔ} : \sum M_A = ۰ \Rightarrow V_C = \frac{۳qL}{۲}$$

در ادامه با زدن مقطعی در نقطهٔ D، قطعهٔ کنسولی ED را جدا کرده و نیروهای داخلی را در D به‌دست می‌آوریم:



$$CD \text{ تعادل قطعهٔ} : \sum M_D = ۰ \Rightarrow M_D = \frac{۳qL}{۲} \times L = \frac{۳qL^۲}{۲}$$

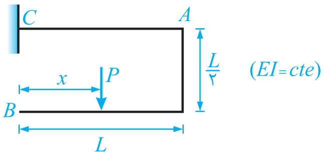
دقت شود که با توجه به تعادل در راستای قائم، برش D صفر می‌باشد و تغییر مکان قائم D عبارت است از:



$$\downarrow \Delta_{D_y} = -\frac{M_D L^۲}{۲EI} = -\frac{۳qL^۴}{۴EI}$$

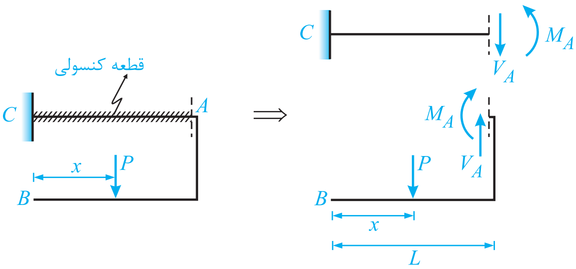
توجه کنید که علامت منفی، یعنی نقطهٔ D به اندازهٔ $\frac{۳qL^۴}{۴EI}$ و به سمت بالا جابه‌جا می‌شود و در نتیجه گزینهٔ (۱) صحیح است.

تمرین ۹-۲: با توجه به شکل مقابل، بار P در چه فاصله‌ای از انتهای B اثر کند تا تغییر مکان قائم نقطهٔ A صفر شود؟ ($x = ?$) (سراسری ۸۱)



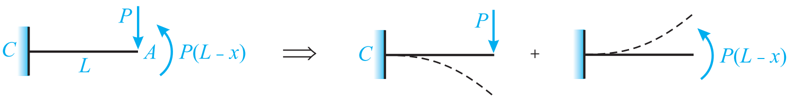
۱) $x = L$
۲) $x = \frac{L}{3}$
۳) $x = \frac{L}{2}$
۴) $x = \frac{2L}{3}$

● **حل:** با کمی دقت احتمالاً مشاهده می‌کنید که قطعهٔ AC از قاب، یک قطعهٔ کنسولی بوده و با زدن مقطع در A، می‌توان این قطعه را جدا کرده و خیز آن را محاسبه نمود. برای محاسبهٔ خیز A، ابتدا باید برش و خمش در این نقطه را به‌دست آورد:



$$\text{قطعهٔ } AB : \begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A = P \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = P(L-x) \end{cases}$$

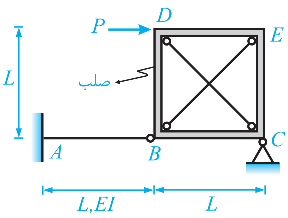
در ادامه با استفاده از روابطی که در ابتدای این قسمت به خاطر سپردیم داریم:



$$\downarrow \Delta_A = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{P(L-x)\times L^2}{2EI} = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{3}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تمرین ۹-۳: در قاب شکل مقابل: (سراسری ۸۸)

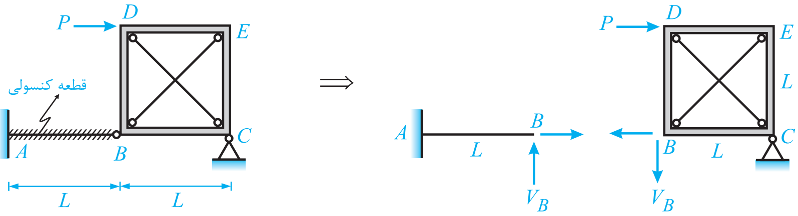


الف) تغییر مکان قائم نقطهٔ B را تعیین کنید.

ب) دوران جسم صلب را بیابید.

● **حل:**

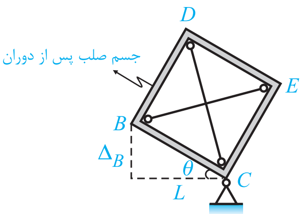
الف) با زدن مقطعی در محل مفصل خمشی B، قطعهٔ کنسولی AB را از سازه جدا می‌کنیم. با توجه به صفر بودن لنگر خمشی داخلی در محل مفصل خمشی B، کافی است نیروی برشی داخلی را در این نقطه به‌دست آوریم:



$$\text{تعادل } BCDE : \sum M_C = 0 \Rightarrow V_B = P$$

در ادامه با استفاده از رابطهٔ خیز در تیرهای کنسولی تحت اثر بار متمرکز و با توجه به اینکه V_B به سمت بالا است داریم:

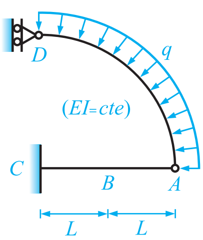
$$\text{قطعهٔ } AB : \downarrow \Delta_B = -\frac{V_B L^3}{3EI} = -\frac{PL^3}{3EI} \quad (\text{به سمت بالا})$$



ب) با توجه به ثابت بودن نقطهٔ C از جسم صلب، دوران جسم صلب را می‌توان با استفاده از جابه‌جایی قائم مفصل B به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\theta = \frac{|\Delta_B|}{L} = \frac{PL^2}{3EI}$$

تمرین ۹-۴: در قاب شکل مقابل، قسمت DA ربع دایره و با شعاع $2L$ است:

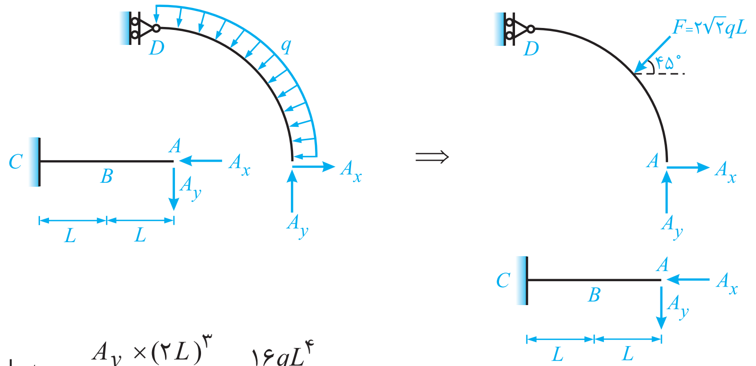


الف) جابه‌جایی نقطهٔ A را محاسبه کنید.

ب) جابه‌جایی نقطهٔ B را محاسبه کنید.

حل:

الف) همانگونه که مشاهده می‌کنید قطعهٔ ABC ، یک قطعهٔ کنسولی بوده و برای محاسبه تغییر مکان‌های نقاط مختلف در طول این قطعـه، می‌توان از روابط خیز و شیب در تیرهای کنسولی استفاده کرد. به همین منظور ابتدا سازه را از محل مفصل خمشی در A جدا کرده و نیروی داخلی برشی را در نقطهٔ A، با توجه به صفر بودن لنگر در این نقطه به‌دست می‌آوریم (دقت شود که مطابق مطالب فصل دوم بـار گسـتردهٔ عمود بر قوس را با یک بار متمرکز با اندازهٔ $۲qR\sin(\frac{\frac{\pi}{۲}}{۲})$ جایگزین می‌کنیم):

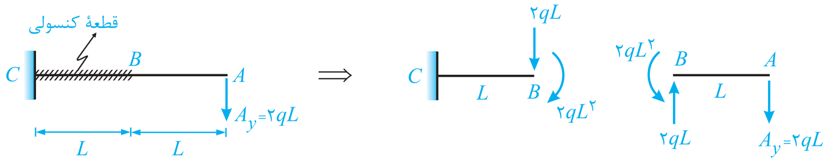


$$F = ۲q\times(۲L)\times\sin(\frac{\frac{\pi}{۲}}{۲}) = ۲\sqrt{۲}\,qL$$

$$AD \text{ تعادل قطعهٔ } : \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow A_y = ۲qL$$

$$\downarrow\Delta_A = \frac{A_y\times(۲L)^۳}{۳EI} = \frac{۱۶qL^۴}{۳EI}$$

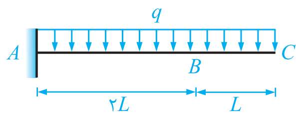
ب) برای محاسبهٔ جابه‌جایی نقطهٔ B از تیر کنسولی ABC ، با زدن مقطعی در نقطهٔ B، این قطعه را از تیر جدا کرده و با محاسبـهٔ نیروهـای داخلی (برش و لنگر) در این نقطه، با استفاده از رابطهٔ خیز در تیرهای کنسولی تغییر مکان قائم این نقطه را محاسبه می‌کنیم:



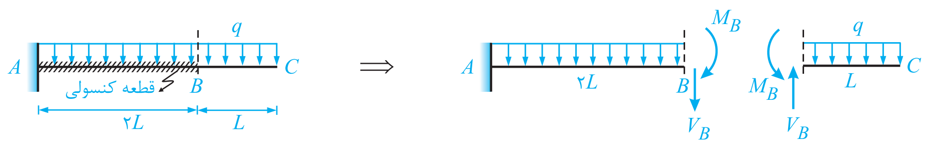
$$V_B = ۲qL \quad , \quad M_B = ۲qL^۲$$

$$BC \text{ قطعهٔ } : \downarrow\Delta_B = \frac{۲qL\times L^۳}{۳EI} + \frac{۲qL^۲\times L^۲}{۲EI} = \frac{۵qL^۴}{۳EI}$$

تمرین ۹-۵: مقدار خیز نقطهٔ B در تیر مقابل را به‌دست آورید. (EI ثابت است)

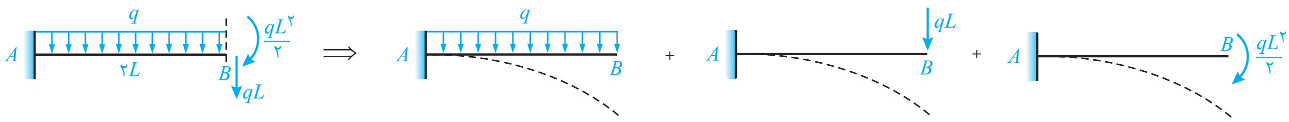


حل: ابتدا با زدن یک مقطع قطعهٔ کنسولی AB را از تیر جدا کرده و با اسـتفاده از معـادلات تعـادل در قطعـهٔ غیرکنسـولی BC ، بـرش و خمش در B را محاسبه می‌کنیم:



$$BC \text{ تعادل قطعهٔ } : \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow V_B = qL \quad , \quad \Sigma M_B = ۰ \Rightarrow M_B = \frac{qL^۲}{۲}$$

در ادامه خیز B با توجه به روابط تیرهای پایهٔ کنسولی عبارت است از:



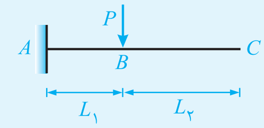
$$\downarrow\Delta_B = \frac{q(۲L)^۴}{۸EI} + \frac{qL(۲L)^۳}{۳EI} + \frac{\frac{qL^۲}{۲}\times(۲L)^۲}{۲EI} = \frac{۱۷qL^۴}{۳EI}$$

نکات کاربردی روابط خیز و شیب در تیرهای کنسولی به شرح زیر است:

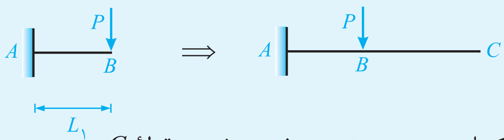
۱- برای محاسبهٔ جابه‌جایی و یا دوران در انتهای آزاد تیرهای کنسولی که تحت بارگذاری میانی قرار گرفته و ناحیهٔ انتهایی در آنها فاقد بارگذاری است، می‌توان از ایدهٔ زیر استفاده کرد.

سازهٔ مورد بررسی برای درک بهتر نکتهٔ (۱)

تیر مقابل را درنظر بگیرید، می‌خواهیم خیز و شیب در نقطهٔ C از این تیر را به‌دست آوریم:

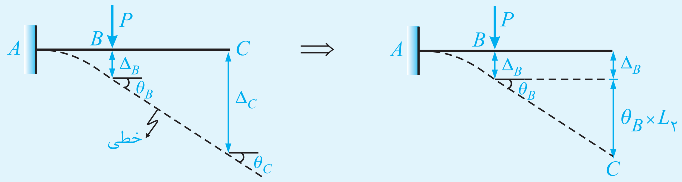


با توجه به مفاهیم خمش در درس مقاومت مصالح، می‌دانیم اگر در قسمتی از یک تیر لنگر خمشی داخلی صفر باشد، منحنی تغییر شکل در این قسمت به صورت خطی خواهد بود.



در شکل فوق در واقع به تیر طرهٔ AB، قطعهٔ فاقد بارگذاری BC اضافه شده و با توجه به صفر بودن لنگر خمشی داخلی در طول BC (قسمت اضافه شده) هندسهٔ تغییر شکل در این قسمت از تیر به صورت خطی خواهد بود.

با کمی دقت می‌توان فهمید شیب نقاط B و C که روی قسمت خطی قرار دارند، یکسان بوده و در نتیجه خیز و شیب نقطهٔ C به صورت زیر محاسبه می‌شود:



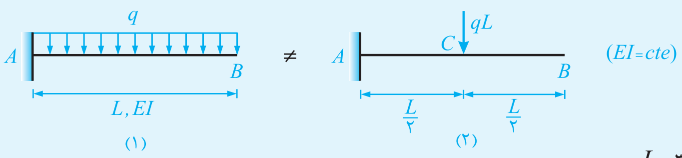
$$\curvearrowleft \theta_C = \theta_B = \frac{PL_۱^۲}{۲EI}$$

$$\downarrow \Delta_C = \Delta_B + \theta_B \times L_۲ = \frac{PL_۱^۳}{۳EI} + \frac{PL_۱^۲}{۲EI} \times L_۲$$

۲- در یک قطعهٔ کنسولی برای محاسبه خیز و یا شیب یک نقطهٔ دلخواه، نمی‌توان ترکیب بارگذاری را از تکیه‌گاه تا نقطهٔ موردنظر تغییر داد و یا آن را با بارگذاری معادل دیگری جایگزین کرد. به طور مثال نمی‌توان بارگسترده‌ای را با بار متمرکز معادل با آن جایگزین کرد و یا بار متمرکزی را به نقطه‌ای دیگر انتقال داد و لنگر حاصل از آن انتقال را نیز درنظر گرفت.

سازهٔ مورد بررسی برای درک بهتر نکتهٔ (۲)

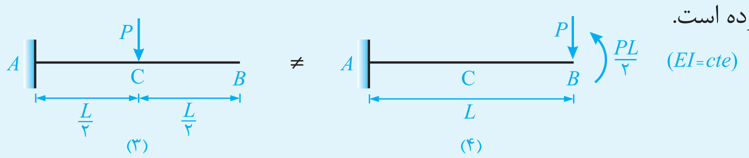
بار گستردهٔ q در تیر (۱)، با یک بار متمرکز qL در تیر (۲) جایگزین شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود با این عمل خیز نقطهٔ B تغییر یافته است.



$$\downarrow \Delta_{B_۱} = \frac{qL^۴}{۸EI}$$

$$\downarrow \Delta_{B_۲} = \Delta_C + \theta_C \times \frac{L}{۲} = \frac{qL(\frac{L}{۲})^۳}{۳EI} + \frac{qL(\frac{L}{۲})^۲}{۲EI} \times \frac{L}{۲} = \frac{۵qL^۴}{۴۸EI}$$

به عنوان مثال دیگر در سازهٔ زیر، بار P واقع در نقطهٔ C از تیر (۳)، با یک بار P و لنگر $\frac{PL}{۲}$ در نقطهٔ B از تیر (۴) جایگزین شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود با این عمل، خیز B تغییر کرده است.



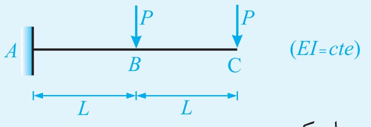
$$\downarrow \Delta_{B_۳} = \Delta_C + \theta_C \times \frac{L}{۲} = \frac{P(\frac{L}{۲})^۳}{۳EI} + \frac{P(\frac{L}{۲})^۲}{۲EI} \times \frac{L}{۲} = \frac{۵PL^۳}{۴۸EI}$$

$$\downarrow \Delta_{B_۴} = \frac{PL^۳}{۳EI} - \frac{\frac{PL}{۲} \times L^۲}{۲EI} = \frac{PL^۳}{۱۲EI}$$

دقت شود که در این دو مثال، ترکیب بار را از تکیه‌گاه تا نقطهٔ B که تغییر مکان آن را می‌خواهیم، با بارگذاری معادل دیگری جایگزین کرده‌ایم که این عمل مجاز نمی‌باشد.

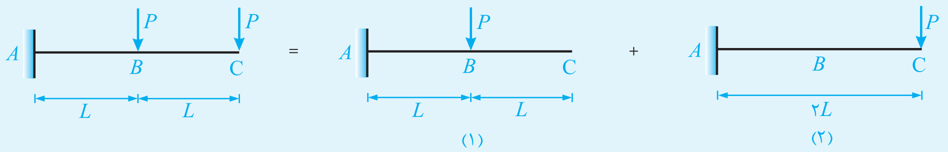
۳- در حالاتی که تیر طره تحت اثر چند بارگذاری مختلف به طور همزمان قرار گرفته است، می‌توان اثر بارگذاری‌های مختلف را به طور جداگانه درنظر گرفت و در انتها با کمک اصل جمع آثار، تغییر مکان نقطهٔ مورد نظر را به‌دست آورد.

سازهٔ مورد بررسی برای درک بهتر نکتهٔ (۳)

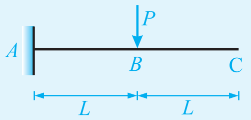


تیر مقابل را درنظر بگیرید. برای محاسبهٔ خیز و یا شیب نقطهٔ C، نمی‌توان به صورت مستقیم از روابط تیرهای طره استفاده کرد (چرا؟).

در اینگونه مثال‌ها به شما توصیه می‌کنیم که برای محاسبهٔ خیز C با روابط حفظی به صورت زیر عمل کنید:

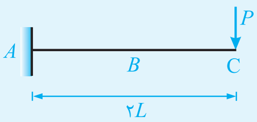


سازهٔ (۱) :



$$\Rightarrow \Delta_{C_1} = \Delta_B + \theta_B \times L = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^2}{2EI} \times L = \frac{5PL^3}{6EI}$$

سازهٔ (۲) :

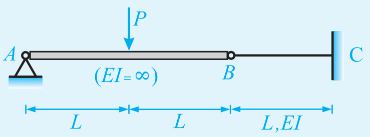


$$\Rightarrow \Delta_{C_2} = \frac{P(2L)^3}{3EI} = \frac{8PL^3}{3EI}$$

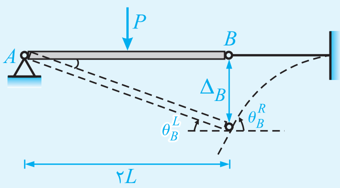
$$\Delta_C = \Delta_{C_1} + \Delta_{C_2} = \frac{7PL^3}{2EI}$$

۴- برای محاسبه اختلاف شیب در طرفین یک مفصل خمشی که برابر با چرخش مفصل نیز می‌باشد، ابتدا شیب طرفین مفصل خمشی را در هر یک از اعضای متصل به آن مفصل با درنظر گرفتن یک جهت فرضی مثبت محاسبه کرده و در انتها مقدار شیب‌های حاصل برای سمت چپ و راست مفصل را از یکدیگر کم می‌کنیم. بعضی از این دست مثال‌ها مانند تیر زیر به سادگی با کمک روابط تیرهای کنسولی حل می‌شوند.

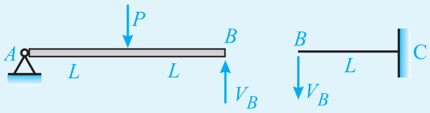
سازهٔ مورد بررسی برای درک بهتر نکتهٔ (۴)



فرض کنید می‌خواهیم اختلاف شیب در طرفین مفصل خمشی B را در سازهٔ مقابل به‌دست آوریم:

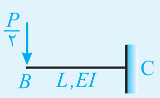


با توجه به صلب بودن قطعهٔ AB از این تیر، تغییر شکل تیر در این طول به صورت خطی بوده و با اندکی دقت می‌توان دریافت شیب سمت چپ مفصل B در قسمت صلب AB به صورت ساعتگرد بوده و برابر $(\theta_B^L = \frac{\Delta_B}{2L})$ می‌باشد. برای محاسبه دوران سمت راست این مفصل و همچنین Δ_B کافی است با زدن مقطعی در B، قطعهٔ کنسولی BC را جدا کنیم:



قطعهٔ AB : $\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B = \frac{P}{2}$

در ادامه با استفاده از روابط خیز و شیب در تیرهای کنسولی تحت اثر بار متمرکز داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_B^R = -\dfrac{\frac{P}{2} \times L^2}{2EI} = -\dfrac{PL^2}{4EI} \quad \text{(پاد ساعتگرد)} \\[2ex] \downarrow \Delta_B = \dfrac{\frac{P}{2} \times L^3}{3EI} = \dfrac{PL^3}{6EI} \Rightarrow \theta_B^L = \dfrac{\Delta_B}{2L} = \dfrac{PL^2}{12EI} \end{cases}$$

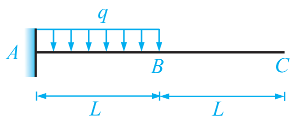
$$\text{چرخش مفصل} = |\theta_B^L - \theta_B^R| = \frac{PL^2}{12EI} - \left(\frac{-PL^2}{4EI}\right) = \frac{PL^2}{3EI}$$

تذکر: دقت شود که دوران سمت راست نقطهٔ B در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بوده و به همین دلیل در عبارت مربوطه به θ_B^R مقدار شیب را با علامت منفی درنظر گرفته‌ایم و شیب سمت چپ نیز ساعتگرد بوده و علامت آن مثبت درنظر گرفته شده است.

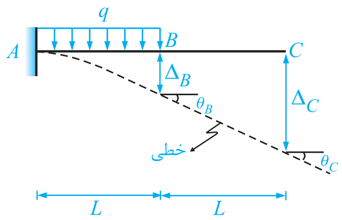
تذکر: البته به‌طور کلی محاسبهٔ اختلاف شیب در طرفین یک مفصل با روش کار مجازی ساده‌تر است. بـرای یـادآوری ایـن موضـوع بـه تمرین (۶-۹) در فصل ۶ مراجعه شود.

در ادامه با چند تمرین به بررسی بیشتر نکات تکمیلی ارائه شده می‌پردازیم.

تمرین ۹-۶: در تیر مقابل، خیز نقطهٔ C از انتهای آزاد تیر را بیابید. $(EI=cte)$



حل: در این تیر قسمت فاقد بارگذاری BC به تیر کنسولی AB اضافه شده و منحنی تغییر شکل در این طول به صورت خطی است بنابراین می‌توان نوشت:

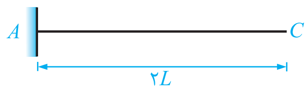


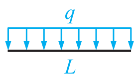
$$\downarrow \Delta_B = \frac{q(L)^4}{8EI} = \frac{qL^4}{8EI}$$

$$\theta_B = \frac{q(L)^3}{6EI}$$

$$\downarrow \Delta_C = \Delta_B + \theta_B \times L = \frac{qL^4}{8EI} + \frac{qL^3}{6EI} \times L = \frac{7qL^4}{24EI}$$

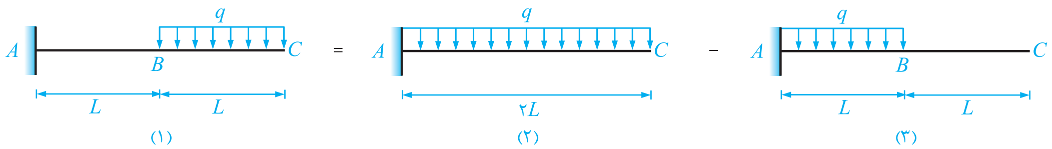
تمرین ۹-۷: در تیر طرهٔ زیر، یک بار گستردهٔ q با طول L می‌تواند بر روی تیر جابه‌جا شود. بیشترین مقدار خیز رو به پایین نقطهٔ C چقدر است؟





(EI ثابت است)

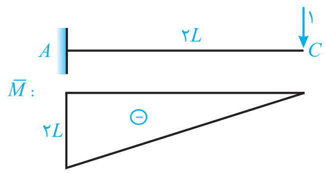
حل: واضح است که هرچه بار گسترده از تکیه‌گاه دورتر شود، نقطهٔ C بیشتر جابه‌جا می‌شود. بیشترین جابه‌جایی C زمانی اسـت کـه بـار گسترده q در BC قرار گیرد. در ادامه با استفاده از اصل جمع آثار، می‌توان بارگذاری گسترده روی تیر را به صورت زیر درنظر گرفت:



$$\Delta_{C_1} = \Delta_{C_2} - \Delta_{C_3} = \left[\frac{q(2L)^4}{8EI}\right] - \left[\frac{qL^4}{8EI} + \frac{qL^3}{6EI} \times L\right] = \frac{41qL^4}{24EI}$$

تذکر: این‌گونه از سؤالات نگاهی نو به سؤالات و فرمول‌های حفظی دارد که به عنوان یک روش دیگر، می‌خواهیم در قالب این تـذکر، شـیوهٔ برخورد با این‌گونه سؤالات را به صورت اصولی‌تر به شما آموزش دهیم. برای حل این‌گونه از سؤالات، تحلیل زیر مناسب است:

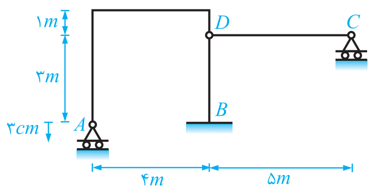
مرحلهٔ ۱: فرض کنید که می‌خواهیم با روش کار مجازی خیز قائم نقطـهٔ C را محاسبـه کنـیم. در این صورت یک بار واحد قائم را در سازهٔ مجازی در نقطهٔ C بر تیر وارد می‌کنیم:



مرحلهٔ ۲: برای به‌دست آوردن بیشترین خیز در C، بار گسترده باید در قسمتی از تیر قرار گیرد که اولاً نمودار لنگر در تیـر اصلـی (M) منفـی شود تا حاصل $\int \frac{M\bar{M}}{EI}dx$ مثبت شود (توجه شود در صورتی‌که $\int \frac{M\bar{M}}{EI}dx$ منفی شود، نقطهٔ C در خلاف جهت بار واحد حرکت کرده و به سمت بالا می‌رود که مطلوب ما نیست) و ثانیاً مساحت زیر نمودار M نیز بیشترین مقدار را داشته باشد که برای این منظور بار گسـترده بایـد تـا حد امکان از تکیه‌گاه دورتر باشد و به همین دلیل، بیشترین خیز زمانی ایجاد می‌شود که بار گسترده در طول L در سمت راست تیر قرار گیرد.

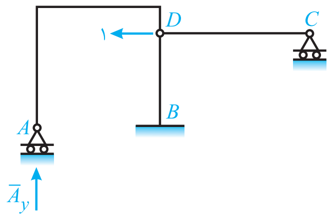
مرحلهٔ ۳: در ادامه با روش فرمول‌های حفظی، خیز C را به‌دست می‌آوریم.

تمرین ۹-۸: در سازهٔ شکل مقابل، جابه‌جایی افقی نقطهٔ D در اثر نشست تکیه‌گاه A در جهت قائم به اندازهٔ $3cm$، چقدر است؟ $(EI=cte)$



حل: تعجب نکنید، این سؤال به فرمول‌های حفظی ارتباطی ندارد. با حل این سؤال می‌خواهیم یک نتیجهٔ مهم بگیریم که در تمرین بعد از آن استفاده کنیم. همان‌گونه که مشاهده می‌شود چون قاب معین است نشست تکیه‌گاه نیرویی را در اعضاء به وجود نمی‌آورد.

برای محاسبهٔ جابه‌جایی افقی D در اثر نشست، با استفاده از روش کار مجازی یک بار واحد افقی در D قرار می‌دهیم:



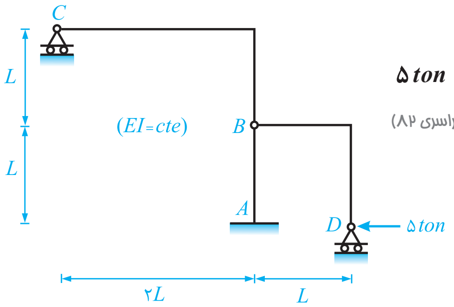
AD در قطعه : $\sum M_D = ۰ \Rightarrow \bar{A}_y = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_{D_x} + W_R = ۰ \\ W_R = \bar{A}_y \times \delta_{y_A} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta_{D_x} = ۰$$

نتایج:

۱- نشست تکیه‌گاه A ، فقط در نقاط روی جسم AD تغییر مکان ایجاد می‌کند.

۲- در سازهٔ معین و پایدار نشان داده شده، قسمت BD با سه عکس‌العمل مناسب به زمین متصل شده و بدون نیاز به سایر قسمت‌ها پایدار است. در این حالت اگر در سایر قسمتها نشستی ایجاد شود قسمت BD از قاب تغییر مکان نمی‌دهد. این موضوع در تمامی سازه‌های معین و پایدار با این شیوه برقرار است (چرا؟).

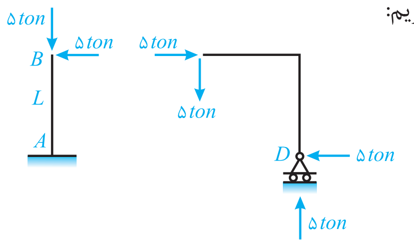


تمرین ۹-۹: در سازهٔ شکل مقابل تکیه‌گاه C به اندازهٔ $۱cm$ در جهت قائم نشست کرده و بار افقی $۵ton$ در نقطهٔ D بر آن اثر می‌کند. با درنظر گرفتن اثر خمش، جابه‌جایی افقی نقطهٔ B چقدر است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $\frac{۵L^۳}{EI}$ ۲) $\frac{۵L^۳}{۳EI}$

۳) $\frac{۱۰L^۳}{EI}$ ۴) $\frac{۵L^۳}{۳EI}+۱$

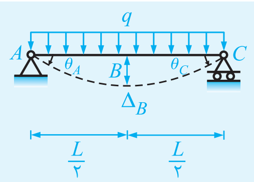
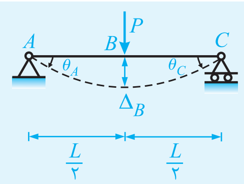
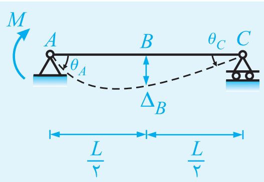
حل: در سازهٔ معین و پایدار نشان داده شده، قسمت AB توسط سه عکس‌العمل مناسب به زمین متصل بوده و به تنهایی پایدار است، لذا در صورتی که در سایر قسمت‌ها نشستی رخ دهد در این قطعه تغییر شکلی را نخواهیم داشت. بنابراین تغییر مکان نقطهٔ B در انتهای این قطعه، تنها ناشی از نیروی ۵ تن خواهد بود. در قطعهٔ کنسولی AB با استفاده از رابطهٔ خیز این تیرها تحت بار متمرکز داریم:



$$\Delta_{B_x} = \frac{V_B L^۳}{۳EI} = \frac{۵L^۳}{۳EI} \quad \text{(به سمت چپ)}$$

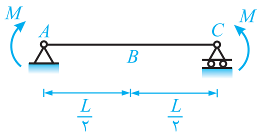
بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

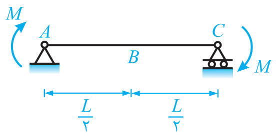
B- تحلیل تیرهای دو سر مفصل

روابطی که باید به خاطر سپرده شوند		
تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده	تیر دو سر مفصل تحت اثر نیروی میانی متمرکز	تیر دو سر مفصل تحت لنگر متمرکز در یک انتها
		
$\theta_A = \theta_C = \frac{qL^۳}{۲۴EI}$ $\Delta_B = \frac{۵qL^۴}{۳۸۴EI}$	$\theta_A = \theta_C = \frac{PL^۲}{۱۶EI}$ $\Delta_B = \frac{PL^۳}{۴۸EI}$	$\theta_A = \frac{ML}{۳EI}$ ، $\theta_C = \frac{ML}{۶EI}$ $\Delta_B = \frac{ML^۲}{۱۶EI}$

در ابتدای راه این قسمت برای درک بهتر نحوهٔ استفاده از روابط فوق، به مثال سادهٔ صفحهٔ بعد توجه کنید.

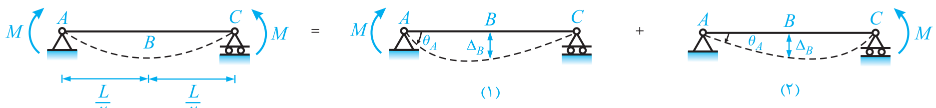
تمرین ۹-۱۰: در تیرهای زیر، خیز نقطهٔ B و دوران تکیه‌گاه A را به‌دست‌آورید. $(EI = cte)$

۱) 

۲) 

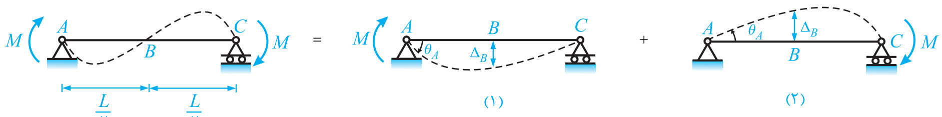
حل:

۱) با استفاده از اصل جمع آثار، خیز نقطهٔ B عبارت است از:



$$\curvearrowleft \theta_A = \theta_{A_1} + \theta_{A_2} = \frac{ML}{3EI} + \frac{ML}{6EI} = \frac{ML}{2EI} \quad , \quad +\downarrow \Delta_B = \Delta_{B_1} + \Delta_{B_2} = \frac{ML^2}{16EI} + \frac{ML^2}{16EI} = \frac{ML^2}{8EI}$$

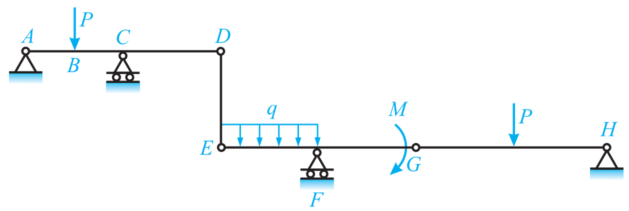
۲) در این تیر نیز با استفاده از اصل جمع آثار داریم:

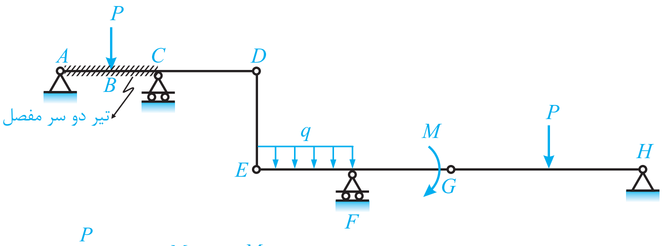


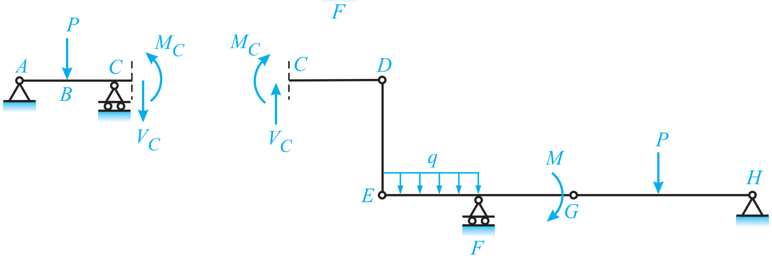
$$\curvearrowleft \theta_A = \theta_{A_1} + \theta_{A_2} = \frac{ML}{3EI} + [-\frac{ML}{6EI}] = \frac{ML}{6EI} \quad , \quad \downarrow \Delta_B = \Delta_{B_1} + \Delta_{B_2} = \frac{ML^2}{16EI} + [-\frac{ML^2}{16EI}] = 0$$

در ادامهٔ بحث، مشابه با تیرهای کنسول، می‌خواهیم کاربرد فرمول‌های سادهٔ فوق را در سازه‌های بزرگتر به شما آموزش دهیم. به همین منظور سازهٔ معین نشان داده شده در شکل مقابل را درنظر بگیرید:

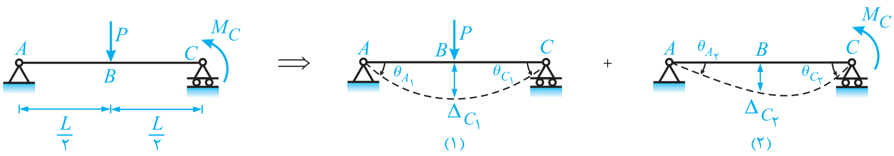
با کمی دقت می‌توان دریافت قطعهٔ ABC از این سازه یک تیر دو سر مفصل می‌باشد و می‌توان شیب نقاط A و C و یا خیز نقطهٔ B را به‌سادگی با استفاده از روابط مربوط به تیرهای دو سر مفصل به‌دست آورد. برای این کار مشابه با ایدهٔ مورد استفاده در تیرهای کنسول، با زدن مقطعی در سمت راست نقطهٔ C، قطعهٔ AC را از سازه جدا کرده و سپس با استفاده از معادلات تعادل در سازهٔ سمت راست نیروهای داخلی (لنگر و برش) را در نقطهٔ C به‌دست می‌آوریم. در انتها نیز با استفاده از روابط تیرهای دو سر مفصل، تغییر شکل‌های مورد نظر را محاسبه می‌کنیم. شکل‌های مقابل مراحل این تحلیل را نشان می‌دهند:







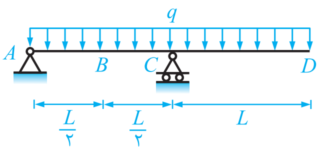
در مرحلهٔ بعد با کمک روابط تیر دو سر مفصل، تغییر شکل‌های نقاط A، B و C را به‌دست می‌آوریم (دقت شود که V_C روی تکیه‌گاه است و خیز و شیب در ABC ایجاد نمی‌کند):



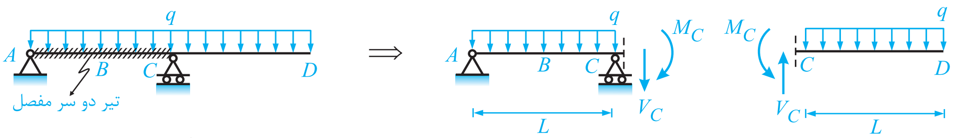
$$\begin{cases} \theta_{A_1} = +\frac{PL^2}{16EI} \text{ (ساعتگرد)} \quad , \quad \theta_{A_2} = +\frac{M_C L}{6EI} \text{ (ساعتگرد)} \quad \Rightarrow \quad \theta_A = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{M_C L}{6EI} \\ \theta_{C_1} = -\frac{PL^2}{16EI} \text{ (پاد ساعتگرد)} \quad , \quad \theta_{C_2} = -\frac{M_C L}{3EI} \text{ (پاد ساعتگرد)} \quad \Rightarrow \quad \theta_C = -\frac{PL^2}{16EI} - \frac{M_C L}{3EI} \\ \Delta_{C_1} = +\frac{PL^3}{48EI} \quad , \quad \Delta_{C_2} = +\frac{M_C L^2}{16EI} \quad \Rightarrow \quad \Delta_C = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{M_C L^2}{16EI} \end{cases}$$

در ادامه برای درک بهتر مهارتی که به شما آموزش دادیم، تمرین‌های زیر آورده شده است.

تمرین ۹-۱۱: در سازهٔ مقابل، دوران نقطهٔ A و خیز نقطهٔ B را به‌دست آورید. (EI ثابت است)

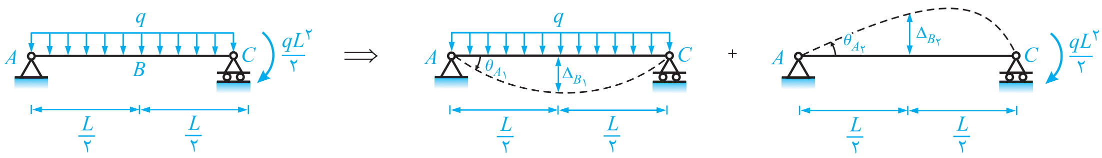


● **حل:** همان‌گونه که مشاهده می‌کنید قسمت ABC از این سازهٔ معین، یک تیر دو سر مفصل می‌باشد. بنابراین با توجه به ایدهٔ مطرح شده، با زدن مقطعی در سمت راست C، داریم:



$$\text{تعادل قطعهٔ } CD: \begin{cases} \sum F_y = ۰ \Rightarrow V_C = qL \\ \sum M_C = ۰ \Rightarrow M_C = \dfrac{qL^۲}{۲} \end{cases}$$

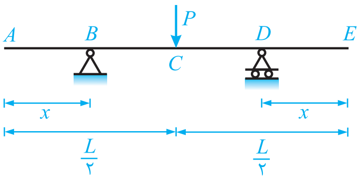
در ادامه با درنظر گرفتن تیر دو سر مفصل AC داریم:



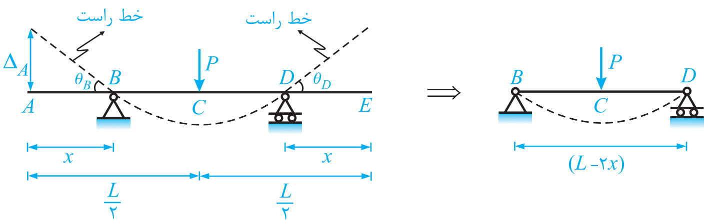
$$\circlearrowleft \theta_A = \frac{qL^۳}{۲۴EI} - \frac{\frac{qL^۲}{۲} \times L}{۶EI} = -\frac{qL^۳}{۲۴EI}$$

$$\downarrow \Delta_B = \frac{۵qL^۴}{۳۸۴EI} - \frac{\frac{qL^۲}{۲} \times L^۲}{۱۶EI} = -\frac{۷qL^۴}{۳۸۴EI}$$

تمرین ۹-۱۲: در تیر مقابل، مقدار x چقدر باشد تا اندازهٔ جابه‌جایی نقطهٔ میانی تیر با جابه‌جایی دو انتهای آن یکسان شود؟ (EI ثابت است)



● **حل:** در قسمت‌های AB و DE، بارگذاری وارد نشده و لنگر خمشی داخلی در تیر صفر است. بنابراین در این طول‌ها هندسهٔ تغییر شکل تیر به صورت خطی خواهد بود و داریم:

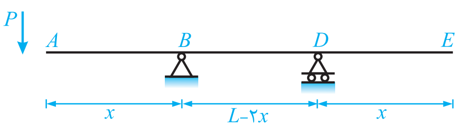


$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_B = \theta_D = \dfrac{P(L-۲x)^۲}{۱۶EI} \\ \Delta_C = \dfrac{P(L-۲x)^۳}{۴۸EI} \end{cases}$$

$$\Delta_A = \theta_B \times x \Rightarrow \Delta_A = \frac{P(L-۲x)^۲}{۱۶EI} \times x$$

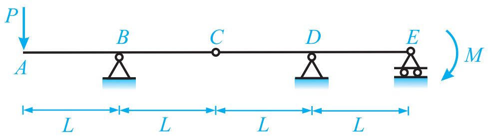
$$\Delta_A = \Delta_C \Rightarrow \frac{P(L-۲x)^۲}{۱۶EI} \times x = \frac{P(L-۲x)^۳}{۴۸EI} \Rightarrow ۳x = L-۲x \Rightarrow x = \frac{L}{۵}$$

تمرین ۹-۱۳: در تیر مقابل، بار متحرک P بر روی سازه حرکت کرده و وقتی به یک نقطهٔ مشخص از تیر می‌رسد، اندازهٔ تغییر مکان وسط BD با اندازهٔ تغییر مکان نقاط A و E برابر می‌شود. فاصلهٔ x چقدر می‌تواند باشد؟ (EI ثابت است)

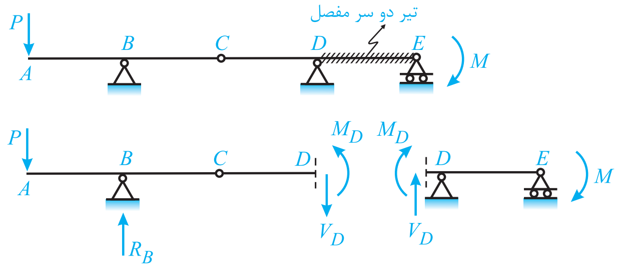


● **حل:** اگر بخواهیم تغییر مکان A و E برابر شود، بار P لزوماً باید در وسط BD وارد شود. اگر بار P در وسط BD وارد شود، برای تساوی اندازهٔ خیز A، E و وسط BD در این حالت، با توجه به تمرین قبل $x = \frac{L}{۵}$ است.

تمرین ۹-۱۴: در تیر مقابل، مقدار لنگر M چقدر باشد تا دوران نقطه E از تیر صفر شود؟ (EI ثابت است)

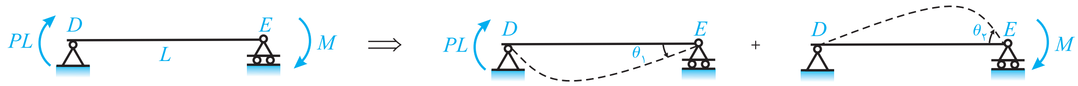


حل: با کمی دقت می‌توان دریافت عضو DE یک تیر دو سر مفصل است و با زدن مقطعی در سمت چپ تکیه‌گاه مفصلی D، این قطعه را از تیر جدا می‌کنیم:



$$\begin{cases} ABC \text{ در قطعهٔ } : \sum M_C = ۰ \Rightarrow R_B = ۲P \\ ABCD \text{ در قطعهٔ } : \sum F_y = ۰ \Rightarrow V_D = P \\ CD \text{ در قطعهٔ } : \sum M_C = ۰ \Rightarrow M_D = V_D \times L = PL \end{cases}$$

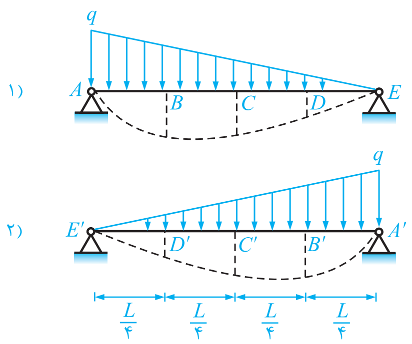
در ادامه دوران نقطهٔ E را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:



$$\theta_E = \theta_1 + \theta_2 = \overbrace{[-\frac{PL \times L}{۶EI}]}^{\text{دوران در جهت پاد ساعتگرد است.}} + \underbrace{[\frac{ML}{۳EI}]}_{\text{دوران در جهت ساعتگرد است.}} = ۰ \Rightarrow M = \frac{PL}{۲}$$

نکات کاربردی روابط خیز و شیب در تیرهای دو سر مفصل به شرح زیر است:

۱- تیرهای (۱) و (۲) با طول و صلبیت خمشی یکسان را درنظر بگیرید. تیر (۲) در واقع همان تیر (۱) می‌باشد که ۱۸۰ درجه دوران یافته است (چرا؟). در مقایسه این دو تیر می‌توان گفت:



$\Delta_A = \Delta_{A'} = ۰$

$\Delta_B = \Delta_{B'}$

$\Delta_C = \Delta_{C'}$

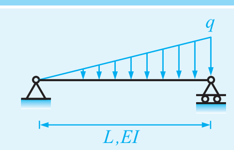
$\Delta_D = \Delta_{D'}$

$\Delta_E = \Delta_{E'} = ۰$

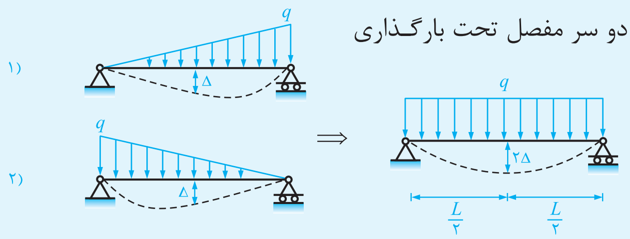
نتیجه: تغییر مکان نقطهٔ میانی در تیرهای (۱) و (۲) یکسان است. با کمک این موضوع می‌خواهیم به شما شیوه‌ای را یاد بدهیم که با کمک آن بتوان، خیز وسط چنین تیرهایی را با استفاده از روابط خیز در تیرهای دو سر مفصل به‌سادگی به‌دست آورد.

سازهٔ مورد بررسی برای درک بهتر نکتهٔ (۱)

تیر نشان داده شده در شکل مقابل را درنظر بگیرید. می‌خواهیم تغییر مکان وسط این تیر را با کمک این نکته به‌دست آوریم.



در صورتی‌که خیز نقطهٔ میانی در این تیر برابر Δ باشد، خیز نقطهٔ میانی در تیر (۲) نیز Δ خواهد بود و در صورتیکه تیرهای (۱) و(۲) را با یکدیگر جمع کنیم، یک تیر دو سر مفصل تحت بارگذاری ثابت q به‌دست می‌آید:

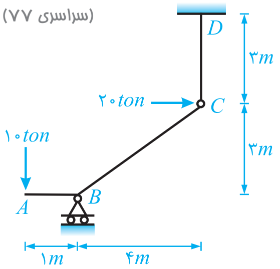


در ادامه با توجه به دانستن خیز وسط تیر دو سر مفصل داریم:

$$۲\Delta = \frac{۵qL^۴}{۳۸۴EI} \Rightarrow \Delta = \frac{۵qL^۴}{۷۶۸EI}$$ (تغییر مکان وسط تیرهای (۱) و (۲) محاسبه شد.)

تست‌های فصل نهم

۱- در قاب مقابل، تغییر مکان افقی نقطهٔ C را تعیین کنید. (EI ثابت است) (سراسری ۷۷)



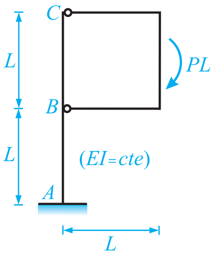
۱) $\frac{۶۴}{EI}$

۲) $\frac{۳۶۰}{EI}$

۳) $\frac{۹۰}{EI}$

۴) $\frac{۱۸۰}{EI}$

۲- در قاب مقابل Δ_{B_x} کدام است؟ (سراسری ۸۵)



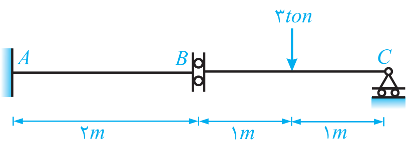
۱) $-\frac{PL^۳}{۳EI}$

۲) $-\frac{PL^۳}{۲EI}$

۳) $-\frac{PL^۳}{۸EI}$

۴) $-\frac{۲PL^۳}{EI}$

۳- در تیر شکل زیر، تغییر مکان در سمت چپ مفصل برشی B برحسب میلی‌متر کدام است؟ ($EI=۱۰۰۰\,ton.m^۲$) (سراسری ۸۴)



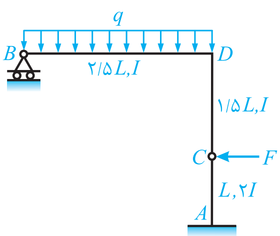
۱) ۰

۲) ۶

۳) ۵

۴) ۳

۴- در سازهٔ شکل مقابل، تغییر مکان افقی نقطهٔ C چقدر است؟ (سراسری ۷۹)



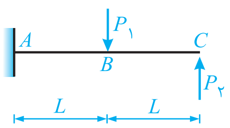
۱) $\frac{F(۲/۵L)^۳}{۶EI}$

۲) $\frac{FL^۳}{۳EI}$

۳) $\frac{(FL^۳+qL^۴)}{EI}$

۴) $\frac{FL^۳}{۶EI}$

۵- در تیر شکل مقابل، نسبت $\frac{P_۱}{P_۲}$ چقدر باشد تا جابه‌جایی نقطهٔ B صفر شود؟ $(EI=cte)$



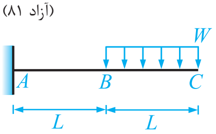
۱) ۱

۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۵}$

۶- خیز نقطهٔ B در تیر مقابل کدام است؟ $(EI=cte)$ (آزاد ۸۱)



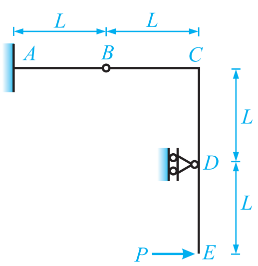
۱) $\frac{۵WL^۴}{۱۲EI}$

۲) $\frac{۷WL^۴}{۱۲EI}$

۳) $\frac{WL^۴}{۳EI}$

۴) $\frac{WL^۴}{۴EI}$

۷- در سازهٔ نشان داده شده، جابه‌جایی قائم مفصل B چقدر است؟ (EI برای کلیه اعضاء یکسان است) (سراسری ۸۶)



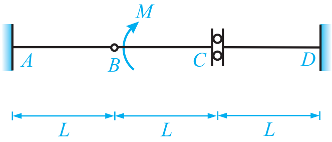
۱) صفر

۲) $\frac{PL^۳}{EI}$

۳) $\frac{PL^۳}{۳EI}$

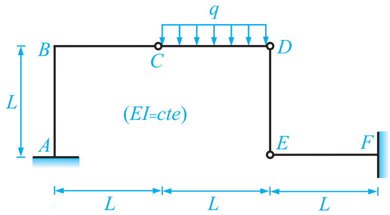
۴) $\frac{۲PL^۳}{۳EI}$

۸- جابه‌جایی سمت راست مفصل برشی C را تعیین کنید. $(EI = cte)$



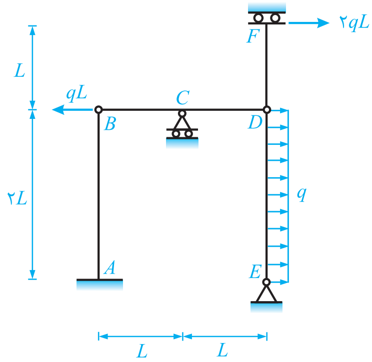
۱) صفر
۲) $\frac{ML^2}{EI}$
۳) $\frac{ML^2}{3EI}$
۴) $\frac{ML^2}{2EI}$

۹- در قاب مقابل، نسبت جابه‌جایی افقی نقطهٔ B به جابه‌جایی قائم نقطهٔ E کدام است؟



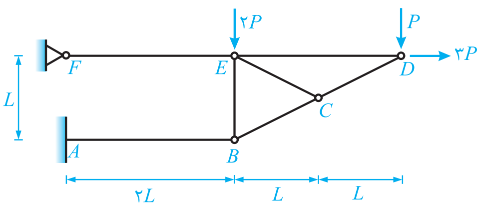
۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۲

۱۰- جابه‌جایی افقی گره B در سازهٔ شکل مقابل را به‌دست آورید. (EI در اعضاء یکسان است)



۱) $\frac{8qL^4}{EI}$
۲) $\frac{16qL^4}{3EI}$
۳) $\frac{8qL^4}{3EI}$
۴) $\frac{32qL^4}{3EI}$

۱۱- جابه‌جایی قائم گره B از قاب روبرو کدام است؟ (EI ثابت است)

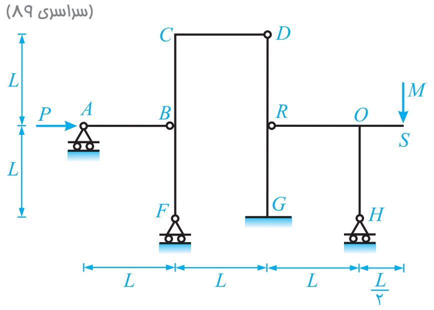


۱) $\frac{14PL^3}{EI}$
۲) $\frac{18PL^3}{EI}$
۳) $\frac{PL^3}{EI}$
۴) $\frac{8PL^3}{EI}$

(سراسری ۸۹)

۱۲- اگر جابه‌جایی افقی D در قاب مقابل برابر $\frac{9ML^3}{EI}$ باشد، نسبت $\frac{M}{P}$ در قاب کدام است؟

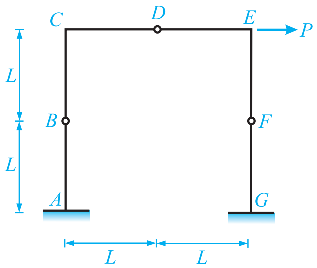
(EI ثابت است)



۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{8}{27}$
۳) ۱
۴) چون تغییر مکان D ارتباطی به M ندارد، پس $\frac{M}{P} = 0$ است.

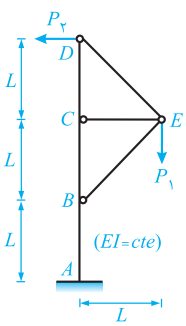
۱۳- سازهٔ متقارن و معین شکل مقابل مفروض است. اگر از تغییر طول محوری اعضاء صـرفنظر کنیم، تغییر مکان افقی نقطهٔ B از قاب چقدر است؟ (صلبیت خمشی همه اعضـاء را EI فرض کنید.)

(سراسری ۸۰)



۱) $\frac{2PL^3}{3EI}$
۲) $\frac{PL^3}{6EI}$
۳) $\frac{PL^3}{3EI}$
۴) $\frac{PL^3}{EI}$

۱۴- نسبت $\frac{P_1}{P_2}$ در قاب مقابل چقدر باشد تا جابه‌جایی افقی B صفر شود؟

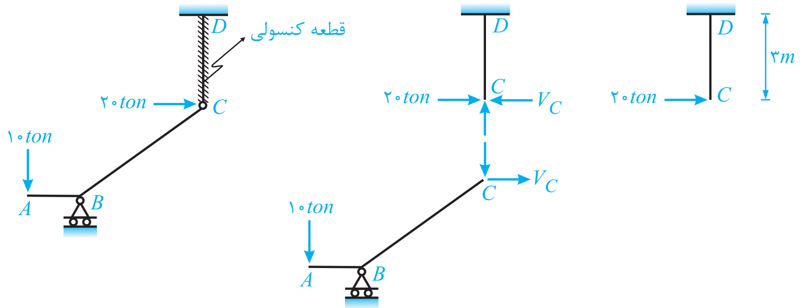


۱) ۲
۲) $\frac{8}{3}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ تست‌های فصل نهم

۱- (۴)

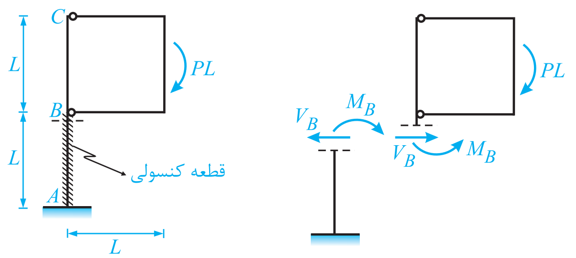
عضو CD از این قاب یک قطعهٔ کنسولی می‌باشد و با توجه به مدل تیرهای کنسولی داریم:



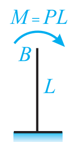
$$\text{در قطعه } ABC:\ \sum F_x = ۰ \Rightarrow V_C = ۰ \Rightarrow \quad \text{در قطعه } CD:\ \Delta_{C_x} = \frac{۲۰\times ۳^۳}{۳EI} = \frac{۱۸۰}{EI}$$

۲- (۲)

با کمی دقت می‌توان دریافت که قطعهٔ AB از این قاب یک قطعهٔ کنسولی است و با مقطع زدن در B، می‌توان این قطعه را از سازه جدا نمود:



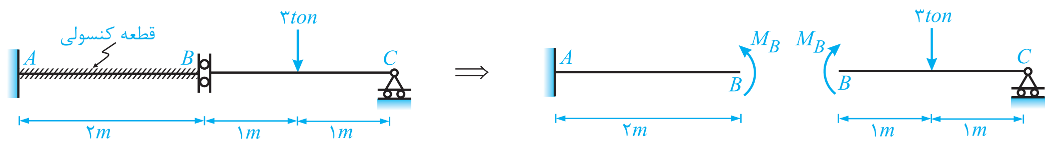
$$\text{در قطعه } BC:\ \begin{cases}\sum F_x = ۰ \Rightarrow V_B = ۰\\ \sum M_B = ۰ \Rightarrow M_B = PL\end{cases}$$



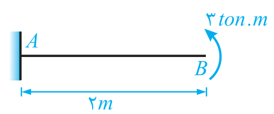
$$\Rightarrow \Delta_{B_x} = \frac{ML^۲}{۲EI} = \frac{PL^۳}{۲EI}$$

۳- (۲)

با زدن مقطع در نقطهٔ B از تیر، قطعهٔ کنسولی AB را از سازه جدا کرده و با توجه به صفر بودن نیروی برشی در محل مفصل برشی B کافیست، لنگر خمشی داخلی در این نقطه را به‌دست آوریم:



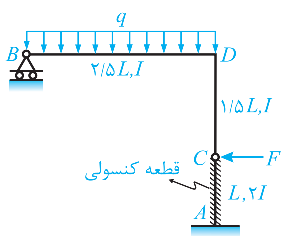
$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow M_B = ۳ton.m$$

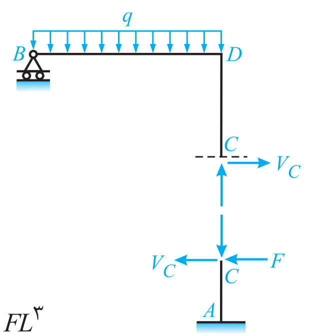


$$\Delta_B^L = \frac{۳\times ۲^۲}{۲EI} = \frac{۶}{۱۰۰۰}m = ۶mm$$

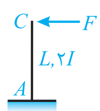
۴- (۴)

با زدن مقطع در محل مفصل خمشی C، قطعهٔ کنسولی AC را از سازه جدا کرده و نیروی برشی را در محل مفصل C به‌دست می‌آوریم:





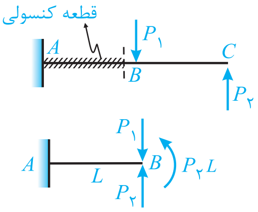
$$\text{تعادل قطعه } CDB:\ \sum F_x = ۰ \Rightarrow V_C = ۰$$



$$\Delta_C = \frac{FL^۳}{۳E(۲I)} = \frac{FL^۳}{۶EI}$$

۵- (۳)

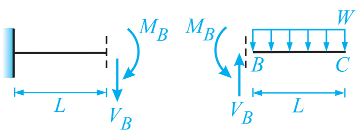
برای حل با زدن مقطعی در نقطهٔ B از قطعهٔ کنسولی AB، آن را از تیر جدا می‌کنیم:



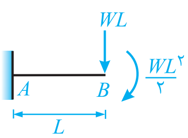
$$\Rightarrow BC \text{ تعادل : } \Rightarrow V_B = P_1 - P_2 \quad , \quad M_B = P_2 L$$

$$\Rightarrow \downarrow \Delta_B = \frac{(P_1 - P_2)L^3}{3EI} - \frac{P_2 L \times L^2}{2EI} = 0 \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{2}$$

۶- (۲)



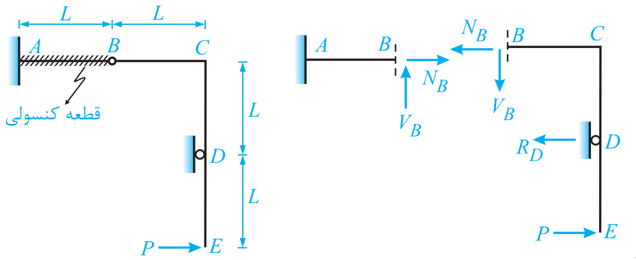
$$BC \text{ تعادل قطعهٔ : } \begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow V_B = WL \\ \sum M_B = 0 \Rightarrow M_B = \dfrac{WL^2}{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \Delta_B = \frac{WL \times L^3}{3EI} + \frac{\frac{WL^2}{2} \times L^2}{2EI} = \frac{7WL^4}{12EI}$$

۷- (۱)

با کمی دقت می‌توان دریافت قطعهٔ AB یک قطعهٔ کنسولی بوده و داریم:

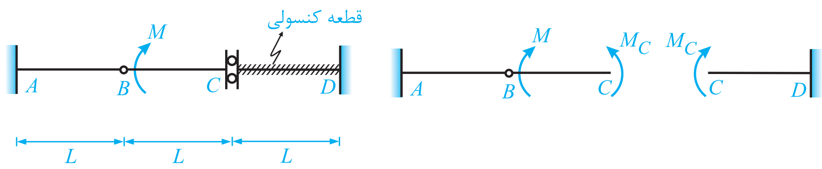


$$BCDE \text{ تعادل قطعهٔ : } \sum F_y = 0 \Rightarrow V_B = 0$$

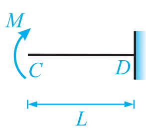
با توجه به صفر بودن نیروی برشی و لنگر در B، جابه‌جایی قائم B صفر است.

۸- (۴)

با زدن مقطعی در محل مفصل برشی C، قطعهٔ کنسولی CD را از تیر جدا می‌کنیم. با توجه به صفر بودن نیروی برشی داخلی در محل مفصل برشی، کافی است لنگر خمشی داخلی را در این نقطه به‌دست آوریم:



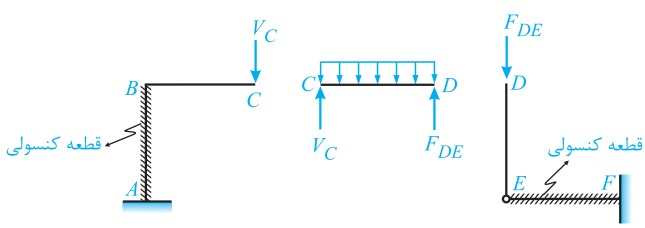
$$BC \text{ قطعهٔ : } \sum M_B = 0 \Rightarrow M_C = M$$



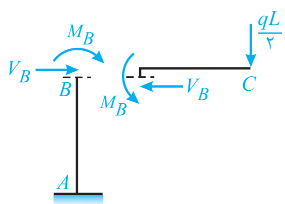
$$\Rightarrow \uparrow \Delta_C = \frac{ML^2}{2EI}$$

۹- (۲)

با کمی دقت می‌توان دریافت اعضای AB و FE در قاب فوق، قطعات کنسولی می‌باشند و برای محاسبهٔ تغییر مکانهای نقاط B و E داریم:



$$CD \text{ تعادل : } V_C = F_{DE} = \frac{qL}{2}$$



$$BC \text{ تعادل قطعهٔ : } \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow V_B = 0 \\ \sum M_B = 0 \Rightarrow M_B = \dfrac{qL^2}{2} \end{cases}$$

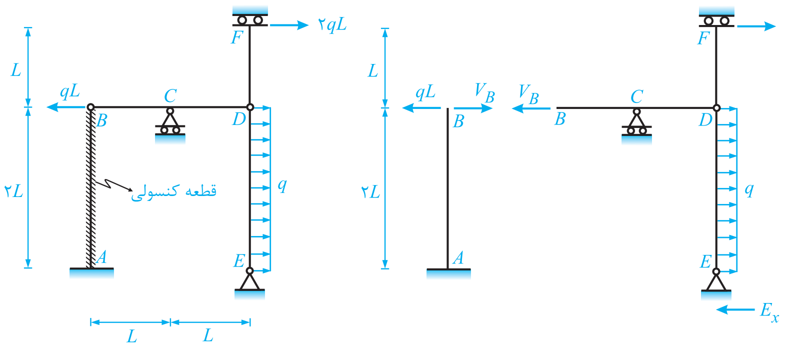
$$\begin{cases} AB \text{ قطعهٔ کنسولی} : \Delta_{B_x} = \dfrac{\frac{qL^۲}{۲}\times L^۲}{۲EI} = \dfrac{qL^۴}{۴EI} \\ EF \text{ قطعهٔ کنسولی} : \Delta_{E_y} = \dfrac{F_{DE}\times L^۳}{۳EI} = \dfrac{\frac{qL}{۲}\times L^۳}{۳EI} = \dfrac{qL^۴}{۶EI} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\Delta_{B_x}}{\Delta_{E_y}} = \dfrac{۳}{۲}$$

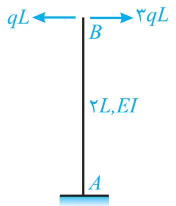
۱۰- (۲)

با اندکی دقت می‌توان فهمید که عضو AB یک قطعهٔ کنسولی می‌باشد. بنابراین با زدن مقطعی در B، می‌توان این قطعهٔ کنسولی را از سازه جدا کرد. با توجه به صفر بودن لنگر داخلی در نقطهٔ B، تنها کافی است نیروی برشی داخلی را در B به‌دست آورد:

$$DE \text{ قطعهٔ} : \sum M_D = ۰ \Rightarrow E_x = qL$$

$$BCDEF \text{ قطعهٔ} : \sum F_x = ۰ \Rightarrow V_B = ۳qL$$

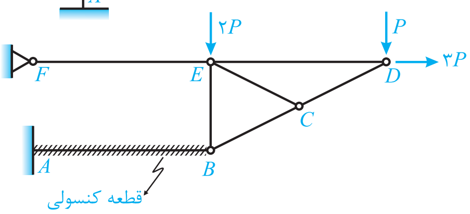


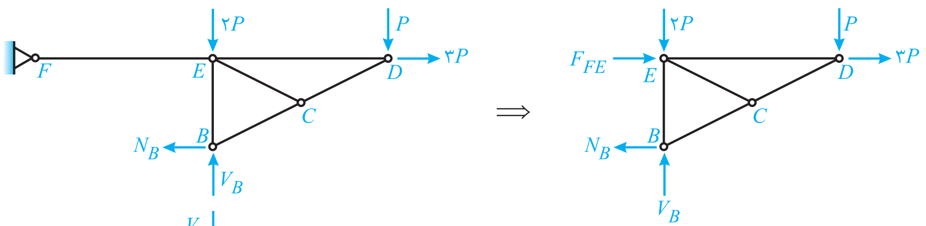


$$\Rightarrow \longrightarrow \Delta_B = \frac{(۳qL - qL)(۲L)^۳}{۳EI} = \frac{۱۶qL^۴}{۳EI}$$

۱۱- (۴)

با اندکی دقت می‌توان فهمید که عضو دو سر مفصل EF فاقد بارگذاری بوده و لذا یک عضو دو نیرویی است. از طرفی عضو AB یک قطعهٔ کنسولی بوده و برای محاسبهٔ جابه‌جایی B، کافی است با زدن مقطعی این قطعه را از سازه جدا کرد:



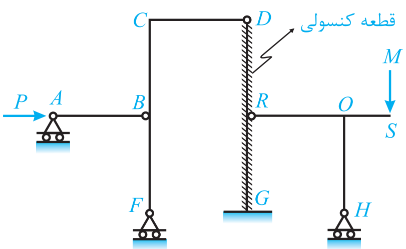


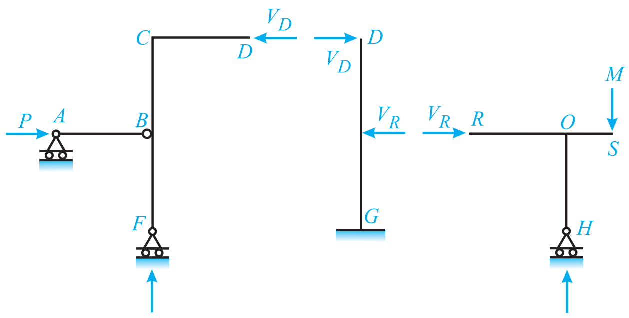
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow V_B = ۳P$$

$$\Rightarrow \Delta_B = \frac{V_B\times(۲L)^۳}{۳EI} = \frac{۳P(۲L)^۳}{۳EI} = \frac{۸PL^۳}{EI}$$

۱۲- (۲)

قطعهٔ GRD یک قطعهٔ کنسولی می‌باشد و برای محاسبهٔ جابه‌جایی افقی D داریم:





$$ABCDF \text{ تعادل قطعهٔ} : \sum F_x = ۰ \Rightarrow V_D = P$$

$$ROSH \text{ تعادل قطعهٔ} : \sum F_x = ۰ \Rightarrow V_R = ۰$$

$$\Delta_D = \frac{V_D(۲L)^۳}{۳EI} = \frac{۸PL^۳}{۳EI} \Rightarrow \frac{۸PL^۳}{۳EI} = \frac{۹ML^۳}{EI} \Rightarrow \frac{M}{P} = \frac{۸}{۲۷}$$