اگر دانشگاه اصلاح شود، مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

## مجموعه پاسخ‌های تشریحی

# آزمون سراسری سال ۱۳۸۰

## کارشناسی ارشد

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سوالات | از شماره | تا شماره |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | زبان تخصصی | ۱۵ | ۱ | ۱۵ |
| ۲ | ریاضیات | ۱۵ | ۱۶ | ۳۰ |
| ۳ | مکانیک جامدات (مقاومت مصالح ـ تحلیل سازه‌ها) | ۳۰ | ۳۱ | ۶۰ |
| ۴ | مکانیک خاک و پی | ۲۵ | ۶۱ | ۸۵ |
| ۵ | مکانیک سیالات و هیدرولیک | ۳۰ | ۸۶ | ۱۱۵ |
| ۶ | طراحی (سازه‌های فولادی و بتنی ـ راهسازی و روسازی راه) | ۴۱ | ۱۱۶ | ۱۵۷ |

"استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد."

## زبان تخصصی

***متن A را خوانده و به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید:***

### متن A

***اهداف اصلی طرح مقاوم در برابر زمین‌لرزه باید:***

a) از تخریب کامل سازه‌ها جلوگیری کند. در هر زمین‌لرزه‌ای بزرگ، نمونه‌هایی از تلفات جانی وجود داشته است که دلیل آن فرو ریختن ساختمان‌هایی بوده است که فاقد پیوستگی یا فاقد مسیرهای جایگزین (انتقال) بار پس از خرابی اعضای اصلی بوده‌اند. گونه‌های شکننده ساختمان به‌ویژه برای فروپاشی کامل و ناگهانی ..... باید امکان طراحی ساختمان‌ها با شکل‌پذیری و نامعینی کافی وجود داشته باشد که مردم بتوانند بدون تلفات جانی محل را تخلیه کنند حتی اگر تغییر شکل‌های ناخالص ساختمان‌ها در نهایت مستلزم بازسازی کل آن شوند.

b) خسارت را در حدی که قابل بازسازی باشد، کنترل کند. پیامدهای اقتصادی یک زمین‌لرزه معمولاً خیلی شدید است و در نتیجه انگیزه محکمی برای پیاده کردن روش‌هایی از طراحی با کمترین هزینه‌های تعمیر(ات) بعدی وجود دارد که به یک سازه امکان جذب انرژی یک زمین‌لرزه را می‌دهد. به‌علاوه ساختمان‌ها، سازه‌های با اهمیت استراتژیک، مثل بیمارستان‌ها، تجهیزات تولید انرژی، ساختمان‌های ارتباط از راه دور (مخابرات)، سدها و پل‌ها، باید قابلیت ادامه بقا بعد از یک زمین‌لرزه بزرگ را داشته باشند و کماکان به عملکرد خود ادامه دهند ..... .

**۱- بهترین مترادف برای "redundancy" در پاراگراف اول ..... است.**

۱) خشونت ۲) فراوانی ۳) شفافیت ۴) غیر مجاز

گزینه ۲ صحیح است.

**۲- بهترین کلمه را برای جای خالی پاراگراف اول انتخاب کنید.**

۱) گسترش می‌یابد ۲) بدنام هستند ۳) سخت‌گیر ۴) بی‌قاعده می‌باشند

گزینه ۲ صحیح است.

**۳- بهترین مترادف برای "incentive" در پاراگراف دوم ..... است.**

۱) انگیزه ۲) حرکت ۳) مکانیزم ۴) مانور

گزینه ۱ صحیح است.

**۴- بهترین کلمه را برای جای خالی پاراگراف دوم انتخاب کنید.**

۱) تابع، عملکرد ۲) تحت عمل و کارکرد ۳) کاربردی ۴) در حالت سرویس‌دهی

بعد از فعل keep فعل بعدی با ing می‌آید.

گزینه ۴ صحیح است.

***متن B را خوانده و به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید:***

### متن B

***تثبیت خاک:***

آزادراه‌ها معمولاً از بتن مسلح با ضخامت حدود ۲۰ تا ۲۵ سانتی‌متر ساخته می‌شود که آن روی یک زیراساس دانه‌ای یا اساس جای گرفته است که آن هم روی یک بستر خوب کوبیده شده خاکی قرار می‌گیرد. بعضی اوقات، سنگ حاصل از حفاری می‌تواند خرد شده و برای اساس استفاده شود. در موارد دیگر یک اساس بتن مگر استفاده می‌شود. اساس می‌تواند با تثبیت خاک به‌دست آید، به‌عبارت دیگر به‌جای اینکه خاک موجود را با مصالح دیگر جایگزین کنیم، مقاومت لهیدگی‌اش را بالا ببریم. این روند شامل مخلوط کردن یک درصدی از ماده تثبیت‌کننده در خاک است که ممکن است سیمان، قیر یا ماده دیگر باشد.

مهندسین خاک‌ها را براساس اندازه ذرات به چهار گروه اصلی طبقه‌بندی کرده‌اند: شن شامل ذرات از ۶۰ میلی‌متر تا ۲ میلی‌متر، ماسه، شامل ذرات از ۲ میلی‌متر تا ۰/۰۶ میلی‌متر، لای، شامل ذرات از ۰/۰۶ میلی‌متر تا ۰/۰۰۲ میلی‌متر و رس شامل ذرات کوچکتر از ۰/۰۰۲ میلی‌متر است. خاک‌ها به‌ندرت فقط شامل یک گروه هستند. معمولاً یک مخلوط به شکل خاک‌های مرکب حاصل می‌شود مثل لای ماسه‌ای یا رس ماسه‌ای. یک مهندس بیشتر به دانه‌بندی توجه می‌کند. یک خاک ممکن است خوب دانه‌بندی شده یا یکنواخت یا بد دانه‌بندی شده باشد. یک خاک با دانه‌بندی خوب یک توزیع اندازهٔ مشخص دارد که شامل بازهٔ گسترده‌ای از اندازه‌هاست بدون زیادی یا کمبود هیچ اندازه‌ای. یک خاک با دانه‌بندی یکنواخت، خاکی است که دارای درصد بالایی از یک اندازه خاص ذره است و درصد کمی از آن را ذرات با اندازه‌های دیگر می‌سازند. یک خاک با دانه‌بندی بد، خاکی است که در

بعضی اندازه‌ها زیاد و در دیگر اندازه‌ها کمبود دارد. این خاک بد دانه‌بندی شده است که از خود ضعف نشان می‌دهد. این کمبود به این دلیل است که در حفره‌های بین ذرات موجود که (درصد) زیادی دارند با دانه‌های کوچکتر بعدی پر نمی‌شوند. در نتیجه خاک (حاصل) شامل آب و هوای بیشتر از دلخواه است که متراکم نمی‌شود. ماده تثبیت‌کننده تأثیر کمی روی خاک با دانه‌بندی بد دارد مگر اینکه مصالحی اضافه گردد که شامل اندازه ذراتی باشد که وجود ندارند و کل مخلوط به‌طور کامل متراکم شود.

**۵- با توجه به متن *B* و با مراجعه به جدول زیر کدام خاک خوب دانه‌بندی شده است؟**

| | اندازه ذرات به میلی‌متر | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ۲-۶۰ | ۰/۰۶-۲ | ۰/۰۰۲-۰/۰۶ | کمتر از ۰/۰۰۲ |
| خاک A | ۶٪ | ۷٪ | ۸٪ | ۷۹٪ |
| خاک B | ۲۵٪ | ۲۸٪ | ۲۳٪ | ۲۴٪ |
| خاک C | ۱۰٪ | ۴۵٪ | ۵٪ | ۴۰٪ |

۱) خاک A ۲) خاک B ۳) خاک C ۴) خاک B و A

گزینه ۲ صحیح است.

**۶- با توجه به متن *B*، چهار جمله زیر درست هستند ولی جمله‌ای را انتخاب کنید که به‌نظر شما مهم‌ترین است.**

۱) سنگ خرد شده را می‌توان برای لایهٔ اساس استفاده کرد.

۲) سیمان و قیر می‌توانند به‌عنوان ماده تثبیت‌کننده استفاده شود.

۳) یک خاک خوب دانه‌بندی شده هیچ ذره با اندازه خاص زیادی ندارد.

۴) مواد تثبیت‌کننده تأثیر کمی روی خاک بد دانه‌بندی شده دارند مگر اینکه مصالحی اضافه گردد که شامل اندازه ذراتی باشد که وجود ندارند.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

The stabilizing agent has little effect on a poorly graded soil unless material having the missing particle sizes is added.

**۷- با توجه به متن *B*، کدام عبارت صحیح است؟**

۱) خاک‌ها معمولاً از یک گروه خاک اصلی تشکیل شده‌اند.

۲) مواد تثبیت‌کننده تأثیر قابل توجهی روی خاک بد دانه‌بندی شده دارد.

۳) اساس می‌تواند با زیاد کردن مقاومت لهیدگی خاک بستر موجود، حاصل شود.

۴) یک مهندس به دانه‌بندی، کمتر از گروه خاک توجه می‌کند.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

The base course can be created by soil stabilization, i. e. increasing the bearing strength of existing subsoil rather than by replacing it with another material.

**۸-با توجه به متن *B*، کدام عبارت غلط است؟**

۱) خاک‌ها به‌ندرت فقط از یک نوع گروه اندازه ساخته شده‌اند.

۲) اساس می‌تواند با تثبیت خاک به‌وجود آید.

۳) از نظر یک مهندس دانه‌بندی یک خاک، از اندازه ذرات مهم‌تر است.

۴) یک خاک بد دانه‌بندی شده شامل دامنه گسترده‌ای است از اندازه ذرات بدون زیادی یا کمبود هیچ اندازه‌ای.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

A well graded soil …… includes a wide range of sizes without an excess or deficiency of any sizes

***متن C را خوانده و به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید:***

## متن C

***مخازن تعادل:***

طراحی خطوط لوله بلند برای فشار حاصله از ضربه آبی (ضربه قوچ) یا برای به‌کار انداختن آهسته یک دریچه برای کاستن این فشارها، اقتصادی نمی‌باشد. معمولاً یک مخزن تعادل نزدیک دریچه‌ها، در انتهای لوله‌های بلند نصب می‌کنند. یک مخزن تعادل، مخزنی است حاوی آب، که به لوله‌ها متصل است. در اثر آن، ستون آب روی خط (لوله) شناور می‌شود.

هنگامی که یک دریچه ناگهان بسته می‌شود، ستون آب داخل خط (لوله) سریعاً به داخل مخزن تعادل فرستاده می‌شود. سطح آب داخل مخزن تا (هنگامی‌که) فشار افزایش یافته داخل مخزن تعادل به اندازه حرکت (ممان) آب غلبه کند، بالا می‌رود.

هنگامی که یک دریچه ناگهان باز می‌شود، مخزن تعادل، آب را زمانی که فشار پایین می‌آید به داخل خط (لوله) منتقل می‌کند. مقطع لوله در حد فاصل مخزن کنترل و شیر نیز می‌بایست با در نظر گرفتن ضربه قوچ آب طراحی شود. با این حال زمان انسداد برای کاهش فشارهای این قسمت فقط یک کسری از زمان مورد نیاز است در صورتی که مخزن تعادل وجود نداشته باشد.

اگرچه یک مخزن تعادل یکی از معمول‌ترین وسایل مورد استفاده برای جلوگیری از ضربه قوچ است، به هیچ عنوان تنها وسیلهٔ موجود نیست. گونه‌های مختلف شیر اطمینان و محفظه‌های هوا به‌طور وسیع در خطوط (لوله) با قطر کم، جایی که فشار ضربه قوچ با خارج کردن مقدار نسبتاً کم آب برطرف می‌شود، استفاده می‌شوند.

**با توجه به متن *C* گزینه‌ای را انتخاب کنید که هر کدام از ۳ سؤال زیر را به بهترین حالت کامل کنند.**

**۹- هدف از استفاده مخزن تعادل ..... .**

۱) بهینه کردن هزینه و طراحی خط لوله است.
۲) بالا بردن فشار آب در خط لوله است.
۳) کاهش سریع فشار در خطوط لوله بلند است.
۴) تأمین آب هنگامی که فشار آب کافی نیست.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

شاید گزینه «۱» نیز به نظر پاسخ سؤال بیاید اما چون جملهٔ "… to operate" بعد از "or" آمده لذا گزینه «۳» بهترین پاسخ است.

It is uneconomical to design long pipeline for pressures created by water hammers or to operate a valve slowly enough to reduce these pressures usually a surge tank is connected to the conduit.

**۱۰- برای جلوگیری از ضربه قوچ ..... .**

۱) مقدار کمی از آب باید خارج شود.
۲) مخزن تعادل تنها وسیله است.
۳) به جز مخزن تعادل، گونه‌های بخصوصی از دریچه‌ها و محفظه‌های هوا استفاده می‌شوند.
۴) بسته به قطر خط لوله، گونه‌های مختلف شیرهای اطمینان و محفظه‌های هوا عرضه می‌شوند.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

Although a surge tank is one of the most commonly used devices to prevent water hammer, it is by no means the only device. Various types of relief valves and air chambers are widely used …

**۱۱- ضربه قوچ ..... .**

۱) به خطوط لوله قوی نیاز دارد.
۲) ممکن است به مخزن تعادل ضربه بزند و به آن آسیب وارد کند.
۳) به افزایش فشار کمک می‌کند و آب را راحت‌تر منتقل می‌کند.
۴) نتیجه مومنتم آب است و باید در طراحی خط لوله بلند مورد توجه قرار گیرد.

با توجه به متن گزینه ۴ صحیح است.

***متن D را بخوانید و به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید:***

## متن D

***سدهای مخزنی:***

سدهایی که در اینجا مورد بحث قرار می‌گیرند معمولاً برای ذخیره آب برای آبیاری تکمیلی، تأمین آب شهری، مقاصد تفریحی، لوله‌های ذخیره یا کنترل کمکی سیل در شاخه‌های فرعی جویبارهای اصلی، استفاده می‌شوند.

عملکرد آن‌ها به ندرت نیاز به توجه مداوم دارد مگر در فاصله زمانی فصلی یک خانه جهت سکونت اپراتور به همراه سرویس تلفن در محل و یا در نزدیکی کارهای کنترل سدها نیز در صورت وجود درخواست رسمی احداث می‌گردد.

تقویت و محافظت از رشد پوشش گیاهی برای کند کردن تخریب روی شیب‌های منبع، در منابع قرضه که در ساخت استفاده می‌شوند ورودی شیب‌های سدهای خاکی که به شکل دیگری محافظت شده‌اند، یک قسمت مهم از نگه‌داری است که لازم است با دقت مورد توجه قرار گیرد. این پوشش (همانند زیباسازی سازه) یک قسمت حیاتی محافظت در برابر تخریب و باتلاقی شدن کناره‌های رودخانه است و ممکن است اثر مهمی در هزینه تعمیرات داشته باشد.

توصیه کارشناسی در جلوگیری از رشد جلبک در منابع را باید اخذ و اجرا کرد و هیچ‌گونه ماده شیمیایی نباید بدون تجویز افراد ماهر به داخل مخزن وارد شود.

***با توجه به متن D گزینه‌ای را انتخاب کنید که هر کدام از ۳ سؤال زیر را به بهترین حالت ممکن کامل کند.***

**۱۲- مواد شیمیایی ..... در یک منبع برای ..... رشد جلبک‌ها مورد استفاده قرار گیرند.**

۱) می‌توانند، متوقف کردن ۲) می‌توانند، سرعت بخشیدن ۳) نباید، به‌جز برای ۴) نباید، چون آسیب می‌زند به

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

Expert advice on suppression of algae growth in reservoirs should be obtained and followed and no chemicals should be introduced into a reservoir without competent advice.

**۱۳- تقویت و محافظت از پوشش گیاهی ..... .**

۱) به توجه دقیق نیاز دارد.

۲) ممکن است هزینه تعمیرات را بالا ببرد.

۳) یک مورد مهم نگه‌داری و کاهش هزینه است.

۴) فقط روی شیب‌های سدهای خاکی که به طریق دیگری محافظت نشده‌اند مناسب است.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

The simulation and protection of growth of vegetative cover …… is an important item of <u>maintenance</u> …… and may have an important influence on the <u>cost repairs.</u>

**۱۴- "recreational" در متن چه معنی دارد؟**

۱) مصنوعی ۲) کشاورزی ۳) تفریحی ۴) بازآفرینی

گزینه ۳ صحیح است.

**۱۵- در پاراگراف زیر، بهترین کلمه را برای جای خالی انتخاب کنید.**

نیومارک و هال (۱۹۷۳) آنها طیف‌های بازگشته تعداد زیادی از گزارش‌های زمین‌لرزه را میانگین‌گیری کرده‌اند، همگی با یک شتاب حداکثر معمول زمین مقیاس‌بندی شوند و بعد از تعدادی ..... از منحنی‌ها، طیف نرمال و ساده شده‌ای را تولید کردند. منحنی‌ها برای یک شتاب حداکثر برابر ۱/۰۰g، سرعت ۱۲۲ سانتی‌متر بر ثانیه و فاصله ۹۱ سانتی‌متر رسم شده‌اند.

۱) هموارسازی ۲) به صورت هموار ۳) هموار ۴) هموار شده

گزینه ۱ صحیح است.

* توضیح: در گزینه ۲ نیازی به اضافه کردن پسوند y - به کلمه smooth نمی‌باشد چون خود این کلمه صفت می‌باشد و اضافه کردن y - اشتباه است.

## ریاضیات

**۱۶- (۲)**

شرط استقلال این انتگرال از مسیر، پایستار بودن میدان برداری آن است و پایستار بودن این میدان وقتی رخ می‌هد که کرل آن برابر صفر باشد:

$$\vec{F} = (2axz + y^2)\vec{i} + y(bx + az)\vec{j} + (ax^2 + y^2)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{curl}\, F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2axz + y^2 & y(bx + az) & ax^2 + y^2 \end{vmatrix} = (2y - ay)\vec{i} - (2ax - 2ax)\vec{j} + (by - 2y)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{curl}\, F = \vec{0} \iff a = 2\ ,\ b = 2$$

**۱۷- (۱)**

توابع $P(x\ ,\ y) = 6y + x$ و $Q(x\ ,\ y) = y + 2x$ و مشتقات جزئی آن‌ها در داخل مسیر بسته $c$ پیوسته بوده و لذا طبق قضیه گرین می‌توان نوشت:

$$I = \oint_c (6y + x)\,dx + (y + 2x)\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(y + 2x) - \frac{\partial}{\partial y}(6y + x)\right] dx\ dy$$

که در آن $D$ ناحیه دایره‌ای شکل درون مرز بسته $c$ می‌باشد. بنابراین:

$$I = \iint_D -4\,dx\ dy = -4\iint_D dx\ dy = -4\,(D \text{ مساحت ناحیه}) = -4(\pi \times 2^2) = -16\pi$$

چنانچه جهت پیمودن مسیر $c$ در جهت عقربه‌های ساعت بود، جواب نهایی در یک منفی ضرب می‌گردید.

**۱۸- (۴)**

نقطه $x=0$ یک نقطه غیرعادی معادله است؛ با تقسیم طرفین معادله بر ضریب $y''$، داریم:

$$y''+\frac{3}{x}y'+\frac{(1+x)}{x^2}y=0 \Rightarrow P(x)=\frac{3}{x}\ ,\ Q(x)=\frac{1+x}{x^2}$$

برای بررسی منظم بودن نقطهٔ $x=0$، داریم:

$$\alpha=\lim_{x\to 0} x\cdot P(x)=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{3}{x}=3\ ;\ \beta=\lim_{x\to 0} x^2.Q(x)=\lim_{x\to 0} x^2\frac{1+x}{x^2}=1$$

وجود هر دو حد فوق دلیل بر منظم بودن نقطه $x=0$ بوده و بنابر روش فروبنیوس، معادله مشخصه عبارت است از:

$$r^2+(\alpha-1)r+\beta=0 \Rightarrow r^2+2r+1=0 \Rightarrow r=-1,-1$$

لذا جواب‌های پایه معادله دیفرانسیل به صورت مقابل خواهد بود:

$$y_1=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\ ;\ y_2=y_1\ln x+x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$$

**۱۹- (۱)**

ابتدا معادله دیفرانسیل را حل می‌کنیم:

معادله مشخصه : $4m^2-1=0 \Rightarrow m=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow$ جواب عمومی معادله : $y=c_1e^{\frac{1}{2}t}+c_2e^{-\frac{1}{2}t}$

با اعمال شرایط اولیه نتیجه می‌شود:

$$\begin{matrix} y(0)=2 \Rightarrow c_1+c_2=2 \\ y'(0)=\beta \Rightarrow \frac{1}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2=\beta \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=2 \\ c_1-c_2=2\beta \end{cases} \Rightarrow c_1=\frac{2\beta+2}{2}=\beta+1$$

برای آنکه به‌ازای $t\to+\infty$ ، مقدار تابع جواب به سمت صفر میل کند؛ لازم است ضریب $c_1$ برابر صفر باشد. بنابراین:

$$c_1=0 \Rightarrow \beta+1=0 \Rightarrow \beta=-1$$

**۲۰- (۲)**

از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L\{y''+y\}=L\{\delta(t-2\pi)\cos t\} \Rightarrow s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=e^{-2\pi s}\cos 2\pi=e^{-2\pi s}$$

لازم به یادآوری است که در سطر فوق از فرمول $L\{\delta(t-a)f(t)\}=e^{-as}f(a)$ استفاده گردید. بنابراین، با اعمال شرایط اولیه نتیجه می‌شود:

$$(s^2+1)Y(s)-1=e^{-2\pi s} \Rightarrow Y(s)=\frac{1+e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

**۲۱- (۲)**

با توجه به روابط زیر داریم:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=tr(A) \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=det(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+\lambda_2+\lambda_3=11 \\ 2\lambda_2\lambda_3=36 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2=3\ ,\ \lambda_3=6$$

**۲۲- (۳)**

با استفاده از فرمول مشتق انتگرال داریم:

$$f(x)=\int_0^x (1+t^3)^{\frac{-1}{2}}dx \Rightarrow f'(x)=(1+x^3)^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow f''(x)=\frac{-3}{2}x^2(1+x^3)^{\frac{-3}{2}}$$

از طرفی اگر $g(x)$ معکوس تابع $f(x)$ باشد، می‌توان نوشت:

$$g=f^{-1} \Rightarrow g''(y)=-\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow g''(y)=\dfrac{-\frac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}}{(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2}x^2 \\ \text{از طرفی } y=f(x) \xrightarrow{g=f^{-1}} x=g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow g''(y)=\frac{3}{2}g^2(y) \Rightarrow g''(x)=\frac{3}{2}g^2(x)$$

**۲۳- (۴)**

انتگرال داده شده در $x=\infty$ ناسره است، پس هم ارز تابع تحت انتگرال را وقتی $x\to\infty$ می‌نویسیم:

$$x\to\infty:\ \frac{x}{2x^2+2c}-\frac{c}{x+1}\sim\left(\frac{1}{2}-c\right)\frac{1}{x}$$

می‌دانیم $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ واگراست، پس شرط همگرایی انتگرال ناسره فوق آن است که:

$$\frac{1}{2}-c=0\ \Rightarrow\ \boxed{c=\frac{1}{2}}$$

**۲۴- (۱)**

ابتدا هم ارز $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ را وقتی $x\to 0$، می‌یابیم:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{1}{x}(x-\frac{x^2}{2})}=e^{(1-\frac{x}{2})}$$

لذا:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(1-\frac{x}{2})}-e}{x}=\frac{0}{0}$$

حال با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

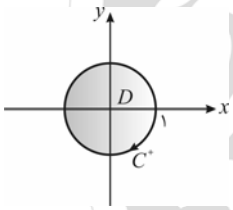
$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2}e^{(1-\frac{x}{2})}-0}{1}=\frac{-1}{2}e$$

**۲۵- (۱)**

$S$، سطح باز با منحنی مرزی زیر است:

$$C:\begin{cases}x^2+y^2+3z^2=1\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\ x^2+y^2=1,\ z=0$$

طبق قضیه استوکس داریم:



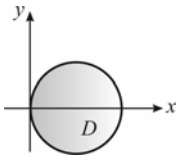

$$I=\iint_S \overrightarrow{curl}F\cdot\vec{n}\,ds=\oint_C \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}=\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$
$$=\oint_C y\,dx-x\,dy+z\,x^3y^2dz$$

با توجه به معادله منحنی $c$ داریم $z=0$ و درنتیجه $dz=0$:

$$\Rightarrow\ I=\oint_C y\,dx-x\,dy\ \overset{\text{قضیه گرین}}{=\!=\!=}\ -\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y)\right]dx\,dy$$
$$=-\iint_D(-1-1)\,dx\,dy=2\iint_D dx\,dy=2\,(\text{مساحت دایره})=2\pi$$

به علامت منفی در هنگام استفاده از قضیه گرین توجه نمایید. دلیل این علامت آن است که جهت مسیر $c$ در خلاف جهت مثلثاتی می‌باشد.

**۲۶- (۳)**




در مختصات استوانه‌ای معادله سهمی‌گون به صورت $az=r^2$ و معادله استوانه به صورت $r=2a\cos\theta$ می‌باشد. تصویر این حجم در صفحه $xy$ به صورت مقابل است:

این حجم نسبت به محور $z$ ها منظم بوده و هر خط موازی محور $z$ از صفحه $z=0$ وارد ناحیه و از سطح $az=r^2$ خارج می‌شود، لذا داریم:

$$0\le z\le\frac{r^2}{a}$$

$$V=\int_{\theta=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2a\cos\theta}\int_{z=0}^{\frac{r^2}{a}}r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta}r\left(\frac{r^2}{a}\right)dr\,d\theta=\int_{\theta=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^4}{4a}\right)\Bigg|_{r=0}^{2a\cos\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{16a^4}{4a}\cos^4\theta\,d\theta=4a^3\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\cos^4\theta}_{\text{زوج}}d\theta=8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)^2d\theta$$

$$=\frac{8a^3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta=2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\theta+\frac{1+\cos4\theta}{2}\right)d\theta=2a^3\left(\theta+\sin2\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{8}\sin4\theta\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2a^3\left(\frac{3\pi}{4}-0\right)=\frac{3}{2}\pi a^3$$

**۲۷- (۳)**

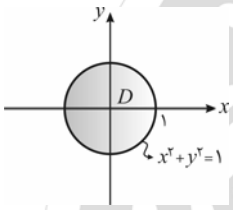
مساحت مورد نظر را $S$ نامیده که بخشی از صفحه $z=cx$ می‌باشد. مساحت این سطح عبارت است از: ( $ds$: المان مساحت)

$$S=\iint_s ds$$

$$S: z=cx \;\Rightarrow\; ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+c^2}\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow\; S=\iint_s ds=\iint_D \sqrt{1+c^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+c^2}\iint_D dx\,dy$$

$D$ تصویر این سطح ($S$) روی صفحه $xy$ می‌باشد و چون این سطح ($S$) توسط استوانه $x^2+y^2=1$ بریده شده است، این ناحیه دایره‌ای به صورت زیر است:




$$\Rightarrow\; S=\sqrt{1+c^2}\iint_D dx\,dy=\sqrt{1+c^2}\,(\text{مساحت ناحیه } D)=\pi\sqrt{1+c^2}$$

**۲۸- (۲)**

با تغییر متغیر شبه قطبی (یعنی؛ $x=ar\cos\theta$ و $y=br\sin\theta$) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} dx\,dy=abr\,dr\,d\theta & (abr=\text{ژاکوبی}) \\ 0\le r\le 1\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi & \text{(توجه کنید که با تغییر متغیر فوق بیضی } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ معادل با } r=1 \text{ است.)} \end{cases}$$

بنابراین، داریم:

$$\text{انتگرال}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} a^2r^2\cos^2\theta\,(abr)\,dr\,d\theta=a^3b\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)\int_0^1 r^3dr$$

$$=a^3b\left(\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\right)\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_{r=0}^{1}=\frac{1}{4}a^3b\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{2\pi}=\frac{1}{4}a^3b\,(\pi)=\frac{\pi}{4}a^3b$$

**۲۹- (۴)**

از قضیه گرین می‌توان استفاده نمود: (توجه کنید که $z=0$ و $dz=0$ سبب دوبعدی شدن مسأله می‌گردد.)

$$I=\oint_c x^2y^3dx+dy=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(1)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3)\right]dx\,dy \quad (D \text{ دیسک } x^2+y^2\le R \text{ است})$$

$$=\iint_D(0-3x^2y^2)\,dx\,dy\ \underset{\text{قطبی}}{\overset{\text{مختصات}}{=\!=\!=}}\ -3\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin^2\theta.\,r.\,dr\,d\theta$$

$$=-3\left(\frac{r^6}{6}\right)\Big|_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta\,d\theta=\frac{-R^6}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta=\frac{-R^6}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{-R^6}{8}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{8}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{-\pi R^6}{8}$$

**۳۰- (۳)**

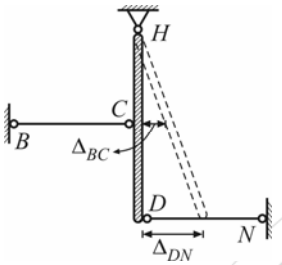
با توجه به اینکه تفاوت گزینه‌ها در جواب خصوصی آنها می‌باشد، تنها جواب خصوصی این معادله را از روش عملگر معکوس پیدا می‌کنیم:

$$y_p=\frac{1}{D^2+4}\{3\sin 2x\}=3\frac{1}{D^2+4}\{\sin 2x\}=3x\frac{1}{2D}\{\sin 2x\}$$

$$=\frac{3}{2}x\int\sin 2x\,dx=\frac{3}{2}x\left(\frac{-1}{2}\cos 2x\right)=\frac{-3}{4}x\cos 2x$$

## مقاومت مصالح و تحلیل سازه‌ها

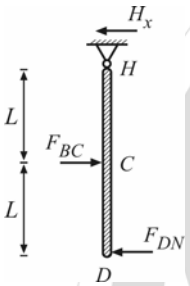
**۳۱- (۱)**




افزایش دمای میله $BC$، تغییر شکلی به صورت روبرو در سازه ایجاد می‌کند. با توجه به هندسه تغییر شکل رسم شده، می‌توان رابطه سازگاری را به صورت زیر نوشت:

$$\text{رابطه سازگاری}: \Delta_{DN} = ۲\Delta_{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{F_{DN}L}{EA} = ۲\left(\alpha \Delta T L - \frac{F_{BC}L}{EA}\right)$$




از طرفی با استفاده از نمودار جسم آزاد عضو صلب می‌توان نوشت:

$$\sum M_H = ۰ \Rightarrow F_{BC} \times L = F_{DN} \times ۲L \Rightarrow F_{DN} = \frac{۱}{۲}F_{BC}$$

با جایگذاری $F_{DN} = \frac{۱}{۲}F_{BC}$ در رابطه سازگاری، داریم:

$$\frac{F_{BC}L}{۲EA} = ۲\left(\alpha \Delta T L - \frac{F_{BC}L}{EA}\right) \Rightarrow F_{BC} = ۰/۸\alpha \Delta T EA$$

و ازآنجا $H_x$ به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sum M_D = ۰ \Rightarrow H_x \times ۲L = F_{BC} \times L \Rightarrow H_x = \frac{۱}{۲}F_{BC} = ۰/۴\alpha \Delta T EA$$

**۳۲- (۱)**

انتهای $C$ در اعضای $AC$ و $BC$ ،مشترک بوده و جابجایی قائم این گره از این اعضا با هم برابر است. لذا $AB$ و $BC$ مانند فنرهای موازی عمل کرده و بار $P$ به نسبت سختی هریک از اعضاء بین آنها توزیع می‌شود.

$$\begin{cases} P_{CA} = P \times \dfrac{\left(\frac{۳EI}{L^۳}\right)_{CA}}{\left(\frac{۳EI}{L^۳}\right)_{CA} + \left(\frac{۳EI}{L^۳}\right)_{CB}} \\ I_{CA} = I_{CB} \quad , \quad L_{CA} = ۲L_{CB} = ۲L \end{cases} \Rightarrow P_{CA} = P \times \frac{\frac{۱}{۸L^۳}}{\frac{۱}{۸L^۳} + \frac{۱}{L^۳}} = \frac{P}{۹} \Rightarrow M_A = \frac{۲PL}{۹}$$

$$P_{CB} = P - P_{CA} = P - \frac{P}{۹} = \frac{۸P}{۹} \Rightarrow M_B = \frac{۸PL}{۹}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_{max_A}}{\sigma_{max_B}} = \frac{\frac{M_A}{S_A}}{\frac{M_B}{S_B}} \underset{S_A = S_B}{\overset{\text{مقطع ثابت}}{=}} \frac{M_A}{M_B} \Rightarrow \frac{\sigma_{max_A}}{\sigma_{max_B}} = \frac{\frac{۲PL}{۹}}{\frac{۸PL}{۹}} = \frac{۱}{۴}$$

**۳۳- (۲)**

در مقطع جدار نازک بسته داده شده، مقاومت و صلبیت پیچشی برابرند با:

$$\begin{cases} \text{مقاومت پیچشی} = ۲A_m t \times \tau_{all} = ۲a^۲ t \times \tau_{all} \\ \text{صلبیت پیچشی} = GJ = Ga^۳ t \end{cases}$$

باتوجه به مشخصات داده شده برای مقطع در حالت‌های (۱) و (۲)، داریم:

$$\frac{a_۱}{a_۲} = ۲ \ , \ \frac{t_۱}{t_۲} = \frac{۱}{۲}$$

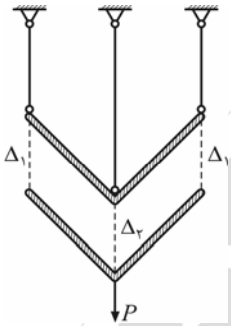
$$\alpha = \frac{۲a_۱^۲ t_۱}{۲a_۲^۲ t_۲} = ۲^۲ \times \frac{۱}{۲} = ۲ \qquad \beta = \frac{a_۱^۳ t_۱}{a_۲^۳ t_۲} = ۲^۳ \times \frac{۱}{۲} = ۴$$

**۳۴- (۴)**

سازه و بارگذاری روی آن متقارن می‌باشند. بنابراین تغییر شکل سازه به‌صورت زیر بوده و تغییرطول میله‌های قائم باهم برابر است.

$\Delta_1 = \Delta_2$

بنابراین میله‌های قائم مانند فنرهای موازی عمل کرده و نیروی $P$ به نسبت سختی محوری اعضا بین آنها توزیع می‌شود.




$$K_1 = \frac{EA}{a} \ , \ K_2 = \frac{EA}{2a}$$

$$F_1 = P \times \frac{K_1}{\sum K} = P \times \frac{\frac{EA}{a}}{2 \times \frac{EA}{a} + \frac{EA}{2a}} = 0/4P$$

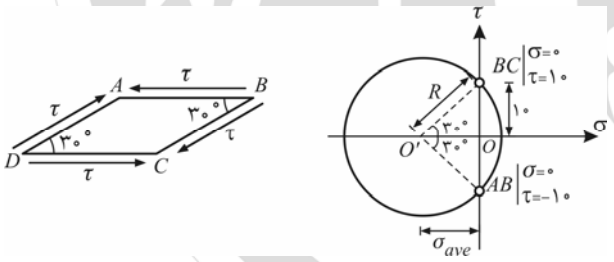
$$F_2 = P \times \frac{K_2}{\sum K} = P \times \frac{\frac{EA}{2a}}{2 \times \frac{EA}{a} + \frac{EA}{2a}} = 0/2\,P$$

**۳۵- (۳)**

تغییرمکان نقاط مختلف تیر (ازجمله تغییرمکان ماکزیمم تیر) به‌صورت کلی از رابطه $\Delta = \frac{kPL^3}{EI}$ به‌دست می‌آید که در این رابطه، $k$ عددی ثابت است. اگر تمام ابعاد تیر (ابعاد مقطع و طول آن) $\alpha$ برابر شوند، ترم‌های $L^3$ و $I$ به ترتیب $\alpha^3$ برابر و $\alpha^4$ برابر می‌شوند. بنابراین تغییرمکان نقاط تیر، $\frac{1}{\alpha}$ برابر می‌شود.

**۳۶- (۴)**

دایره موهر این المان به‌صورت مقابل می‌باشد:




با توجه به دایره موهر رسم شده، داریم:

$$\tan 30^\circ = \frac{|10|}{|OO'|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10}{|\sigma_{ave}|} \Rightarrow \sigma_{ave} = -10\sqrt{3}\ MPa$$

$$|\sigma_{ave}| = R \times \cos 30^\circ \Rightarrow 10\sqrt{3} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = 20\,MPa$$

بنابراین تنش‌های اصلی المان برابرند با:

$$\sigma_1 = \sigma_{ave} + R = -10\sqrt{3} + 20$$

$$\sigma_2 = \sigma_{ave} - R = -10\sqrt{3} - 20$$

**۳۷- (۲)**

استوانه طویل فرض شده است. لذا کرنش طولی در آن صفر می‌باشد:

$$\varepsilon_l = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_l}{E} - \frac{\nu\sigma_r}{E} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_l = \nu\sigma_r = \nu\frac{PR}{t}$$

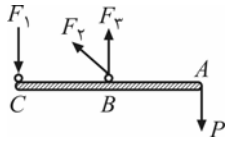
$$\Rightarrow \sigma_l = 0/3 \times \frac{6 \times 50}{3} = 30\,MPa$$

**۳۸- (۳)**

تغییرشکل هریک از سازه‌ها را یک به یک بررسی می‌کنیم:

الف) در این سازه گره $A$ فقط به سمت پایین جابجا شده و در راستای افق جابجا نمی‌شود.

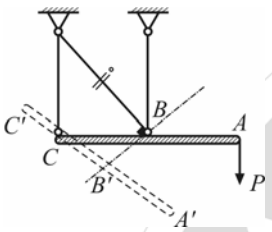
ب) از بررسی نیروهای وارد بر عضو صلب، داریم:



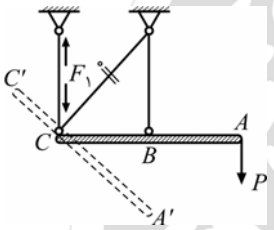

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_2 = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_1 = P \text{ (فشاری)}$$

چون نیروی عضو بادبندی صفر بدست آمد، این عضو تغییرطول نمی‌دهد و نقطه $B$ در راستای عمود بر عضو مایل جابجا می‌شود. از طرفی باتوجه به فشاری بودن $F_1$، گره $C$ باید به سمت بالا برود. بنابراین تغییرشکل سازه به‌صورت مقابل است که در آن $A$ به سمت پایین و چپ می‌رود.




ج) در این سازه نیز با استدلالی مشابه سازه (ب)، نیروی عضو مایل صفر و $F_1$ فشاری بدست می‌آید. تغییرشکل این سازه به‌صورت مقابل بوده که در آن گره $A$ به سمت پایین و چپ می‌رود.

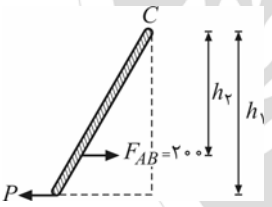



**۳۹- (۲)**

تغییرطول کابل $2\ mm$ می‌باشد، لذا نیروی ایجاد شده در آن به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\Delta = \frac{FL}{EA} \Rightarrow 2\times10^{-1} = \frac{F\times150}{10\times10^{4}\times1.5} \Rightarrow F = 200\ kg$$

نمودار جسم آزاد یکی از اعضای مایل را در نظر گرفته و می‌نویسیم:



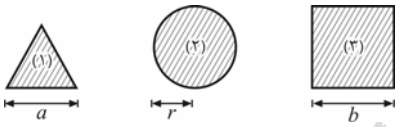

$$\begin{cases} \sum M_C = 0 \Rightarrow Ph_1 = F_{AB}h_2 \Rightarrow P = F_{AB}\dfrac{h_2}{h_1} \\ \dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{150}{200} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow P = 200\times\frac{3}{4} = 150$$

**۴۰- (۱)**

در یک ستون دو سر مفصل، بار بحرانی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$E$ و $L$ برای ستون‌های ذکر شده، یکسان است. لذا برای ستون با $I$ بیشتر، $P_{cr}$ بزرگتر خواهد بود. باتوجه به برابری سطح مقطع ستون‌ها داریم:




$$A_1 = A_2 = A_3 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \pi r^2 = b^2 \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{3}}r = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}b$$

$$I_1 = \frac{ah^3}{36} = \frac{a\times(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^3}{36} = \frac{\sqrt{3}}{96}a^4$$

$$I_2 = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi\times\left[\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{\pi}}a\right]^4}{4} = \frac{\frac{\pi\times3}{16\pi^2}a^4}{4} = \frac{3}{64\pi}a^4$$

$$I_3 = \frac{b^4}{12} = \frac{\left[\frac{\sqrt[4]{3}}{2}a\right]^4}{12} = \frac{1}{64}a^4$$

$$I_1 > I_3 > I_2 \Rightarrow P_{cr_1} > P_{cr_3} > P_{cr_2}$$

**۴۱- (۱)**

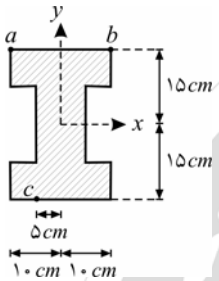
باتوجه به اطلاعات داده شده برای کرنش در نقاط $a$، $b$ و $c$ می‌توان ۲ مطلب زیر را پیرامون موقعیت این نقاط نسبت به محور خنثی بیان کرد:

۱- نقاط $a$ و $c$ در یک طرف و نقطه $b$ در طرف دیگر محور خنثی واقع‌اند.

۲- در مورد فاصله این ۳ نقطه از محور خنثی داریم: فاصله $a$ > فاصله $b$ > فاصله $c$

بنابراین محور خنثی نمی‌تواند از مرکز سطح مقطع عبور کند. لذا مقطع تحت خمش مرکب قرار دارد.

فرض کنید نیروی کششی $T$ و لنگرهای $M_x$ و $M_y$ (در جهت مثبت محورهای مشخص شده) به مقطع اعمال شده باشد. داریم:




$$\sigma_a = E\,\varepsilon_a \Rightarrow \frac{T}{A} + \frac{M_x \times ۱۵}{I_x} + \frac{M_y \times ۱۰}{I_y} = ۱/۵\times ۱۰^{-۳} E \qquad (۱)$$

$$\sigma_b = E\,\varepsilon_b \Rightarrow \frac{T}{A} + \frac{M_x \times ۱۵}{I_x} - \frac{M_y \times ۱۰}{I_y} = -۲/۵\times ۱۰^{-۳} E \qquad (۲)$$

$$\sigma_c = E\,\varepsilon_c \Rightarrow \frac{T}{A} - \frac{M_x \times ۱۵}{I_x} + \frac{M_y \times ۵}{I_y} = ۳/۵\times ۱۰^{-۳} E \qquad (۳)$$

اگر طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) را از هم کم کنیم، داریم:

$$(۱)-(۲) \Rightarrow \frac{۲۰M_y}{I_y} = ۴\times ۱۰^{-۳} E \Rightarrow \frac{M_y}{I_y} = ۲\times ۱۰^{-۴} E \Rightarrow M_y = ۲\times ۱۰^{-۴} EI_y$$

همچنین از تفاضل طرفین روابط (۲) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$(۲)-(۳) \Rightarrow \frac{۳۰M_x}{I_x} - \frac{۱۵M_y}{I_y} = -۶\times ۱۰^{-۳} E \Rightarrow \frac{۳۰M_x}{I_x} - ۱۵\times ۲\times ۱۰^{-۴} E = -۶\times ۱۰^{-۳} E$$

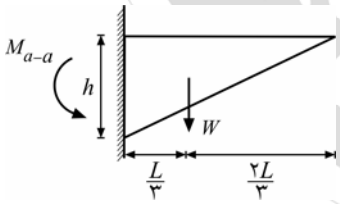
$$\Rightarrow \frac{M_x}{I_x} = -۱۰^{-۴} E \Rightarrow M_x = -۱۰^{-۴} EI_x$$

بنابراین نسبت $\frac{|M_x|}{|M_y|}$ برابر است با:

$$\frac{|M_x|}{|M_y|} = \frac{۱۰^{-۴} EI_x}{۲\times ۱۰^{-۴} EI_y} = \frac{I_x}{۲I_y} = \frac{۱۰۰I}{۲I} = ۵۰ \Rightarrow |M_x| = ۵۰|M_y|$$

**۴۲- (۳)**

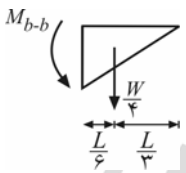
لنگر خمشی در مقطع $a-a$، ناشی از وزن کل تیر ($W$) می‌باشد که در محل مرکز ثقل تیر اثر می‌کند. لذا تنش خمشی حداکثر در مقطع $a-a$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:




$$M_{a-a} = \frac{WL}{۳}$$

$$\sigma_{max_a} = \left(\frac{M}{S}\right)_a = \frac{\frac{WL}{۳}}{\frac{bh^۲}{۶}} = \frac{۲WL}{bh^۲}$$

لنگر خمشی در مقطع $b-b$، ناشی از $\frac{۱}{۴}$ وزن تیر می‌باشد که در فاصلهٔ $\frac{L}{۶}$ از این مقطع ($b-b$) اثر می‌کند. بنابراین تنش خمشی ماکزیمم در مقطع $b-b$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:




$$M_{b-b} = \frac{W}{۴} \times \frac{L}{۶} = \frac{WL}{۲۴}$$

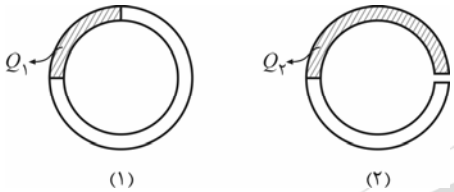
$$\sigma_{max_b} = \left(\frac{M}{S}\right)_b = \frac{\frac{WL}{۲۴}}{\frac{b\left(\frac{h}{۲}\right)^۲}{۶}} = \frac{WL}{bh^۲}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_{max_a}}{\sigma_{max_b}} = \frac{\frac{۲WL}{bh^۲}}{\frac{WL}{bh^۲}} = ۲ \Rightarrow \sigma_{a-a} = ۲\sigma_{b-b}$$

**۴۳- (۳)**

تنش برشی ماکزیمم در هر مقطع برابر است با:




$$\begin{cases} \tau_{max_1} = \dfrac{VQ_1}{It} \ , \ Q_1 = (A\bar{y})_1 = \dfrac{\pi}{2} Rt \times \dfrac{2R}{\pi} = R^2 t \\ \tau_{max_2} = \dfrac{VQ_2}{It} \ , \ Q_2 = (A\bar{y})_2 = \pi Rt \times \dfrac{2R}{\pi} = 2R^2 t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_{max_1}}{\tau_{max_2}} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R^2 t}{2R^2 t} = \frac{1}{2}$$

**۴۴- (۴)**

$$\tau_A = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2a^2 t}$$

$$\tau_B = \frac{Tt}{J} = \frac{Tt}{\frac{1}{3}(2a \times 4) \times t^3} = \frac{3T}{8at^2} \Rightarrow \frac{\tau_B}{\tau_A} = \frac{\frac{3T}{8at^2}}{\frac{T}{2a^2 t}} = \frac{3}{4} \times \frac{a}{t} = \frac{3}{4} \times 20 = 15$$

**۴۵- (۲)**

در اثر اعمال لنگر پیچشی $T_w$ به میله، داریم:

$$\tau_w = \frac{T_w \times \frac{d}{2}}{J} = \frac{T_w d}{2J}$$

همچنین درحالتی‌که میله تحت لنگر خمشی قرار دارد، داریم:

$$\sigma_w = \frac{M_w \times \frac{d}{2}}{I} = \frac{M_w d}{2I}$$

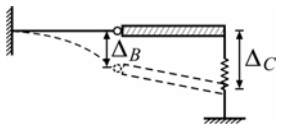
حال کافیست عبارت‌های بدست آمده برای $\tau_w$ و $\sigma_w$ را در رابطه $\tau_w = 0/6\,\sigma_w$ جایگذاری کنیم. (می‌دانیم در مقطع دایروی، $J = 2I$ می‌باشد):

$$\frac{T_w d}{2J} = 0/6 \times \frac{M_w d}{2I} \Rightarrow \frac{T_w}{2} = 0/6 M_w \Rightarrow T_w = 1/2 M_w$$

با مقایسه رابطه فوق با رابطه $T_w = \alpha M_w$ که در صورت سؤال داده شده، $\alpha = 1/2$ بدست می‌آید.

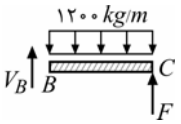
**۴۶- (۴)**

تغییرشکل این سازه به صورت مقابل است:




$$\Delta_{\text{وسط قطعه صلب}} = \frac{\Delta_B + \Delta_C}{2}$$

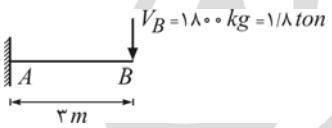
$\Delta_C$ در واقع همان تغییر طول فنر است. برای یافتن آن، ابتدا نیروی فنر را از تعادل نیروها در عضو $BC$ می‌یابیم:




$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F \times 3 = 1200 \times \frac{3^2}{2} \Rightarrow F = 1800\,kg$$

$$\Delta_C = \Delta_{\text{فنر}} = \frac{F}{K} = \frac{1800}{15 \times 10^3} \times 10^3 = 120\,mm$$

برای $\Delta_B$ نیز داریم:



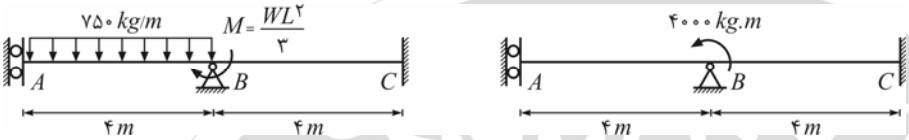

$$\Delta_B = \frac{V_B L^3}{3EI} = \frac{1/8 \times 3^3 \times 10^3}{3 \times 100} = 162\,mm$$

در نهایت تغییر مکان وسط $BC$ به صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$\Delta_{BC\ \text{وسط}} = \frac{\Delta_C + \Delta_B}{2} = \frac{120 + 162}{2} = 141\,mm$$

**۴۷- (۲)**

سازه‌های (۱) و (۲) را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. در سازه (۱) با اعمال لنگر $M$ ، دوران گره $B$ را صفر می‌کنیم. در این صورت $B$ مانند تکیه‌گاه گیردار برای تیر $AB$ عمل می‌کند و $M = \frac{WL^۲}{۳}$ می‌باشد. سپس با اعمال $M$ در سازه (۲) در جهت عکس و استفاده از اصل جمع آثار قوا در ۲ سازه، $M_{BC}$ به‌دست می‌آید.




سازه (۱) سازه (۲)

در سازهٔ (۱) : $M_{BC_۱} = ۰ \quad , \quad M = \frac{WL^۲}{۳} = \frac{۷۵۰ \times ۴^۲}{۳} = ۴۰۰۰\, kg.m$

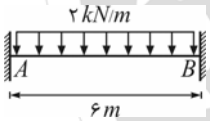
در سازهٔ (۲) : $M_{BC_۲} = ۴۰۰۰ \times \frac{\frac{۴EI}{L_{BC}}}{\frac{۴EI}{L_{BC}} + \frac{EI}{L_{AB}}} = ۴۰۰۰ \times \frac{۴}{۵} = ۳۲۰۰\, kg.m$

$M_{BC} = M_{BC_۱} + M_{BC_۲} = ۰ + ۳۲۰۰ = ۳۲۰۰\, kg.m$

$M_{CB} = M_{BC} \times (C.O.F.) = ۳۲۰۰ \times \frac{۱}{۲} = ۱۶۰۰\, kg.m$

**۴۸- (۱)**

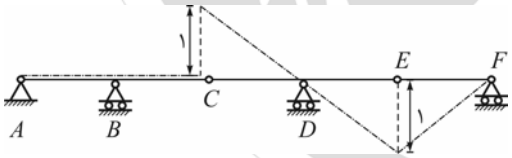
اگر $\theta_A$ و $\theta_B$ همزمان صفر شوند، تیر $AB$ مانند یک تیر دوسرگیردار عمل کرده و $M_A$ و $M_B$ نیز لنگر گیرداری تکیه‌گاه‌های آن می‌باشند.




$$M_A = M_B = \frac{WL^۲}{۱۲} = \frac{۲ \times ۶^۲}{۱۲} = ۶\, kN.m$$

**۴۹- (۳)**

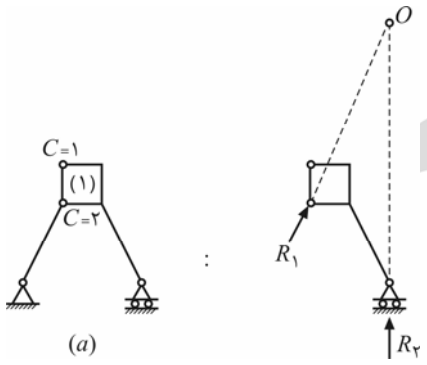
خط تأثیر برش در $C$ به صورت زیر است. ملاحظه می‌شود که ارتفاع آن در $E$ ، برابر واحد است.




**۵۰- (۴)**

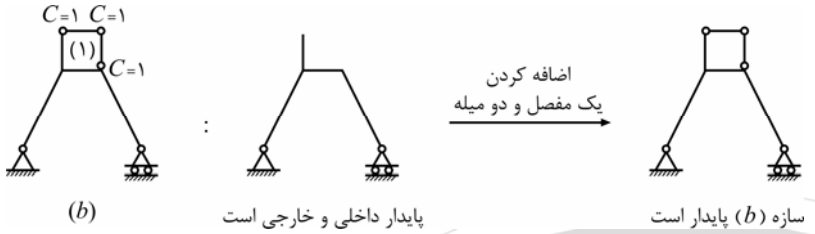
سازه‌های $a$ تا $d$ را یک‌به‌یک بررسی می‌کنیم:

$(a)$ در این سازه مولفه‌های عکس‌العمل تکیه‌گاهی در نقطه $O$ همرس می‌باشند. بنابراین اگر نیرویی به این سازه وارد شود، به‌نحوی که امتداد آن از $O$ عبور نکند، رابطه تعادل $\sum M_O = ۰$ برقرار نخواهد بود. لذا سازه $(a)$ ناپایدار است.



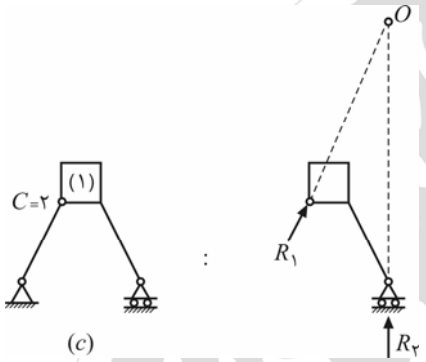

$n = ۳k + r - (C + ۳) = ۳ \times ۱ + ۳ - (۳ + ۳) = ۰ \rightarrow$ معین است.

$(b)$ باتوجه به شکل مقابل، سازه $b$ پایدار است.



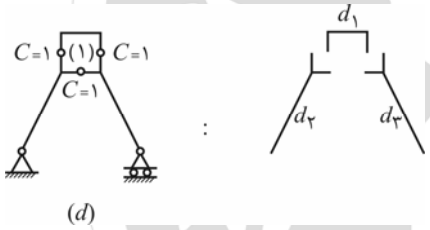

$n = ۳k + r - (C + ۳) = ۳\times۱ + ۳ - (۳+۳) = ۰ \rightarrow$ معین است.

$(c)$ در این سازه نیز عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در $O$ همرس می‌شوند. بنابراین سازه ناپایدار خواهد بود.




$n = ۳k + r - (C + ۳) = ۳\times۱ + ۳ - (۲+۳) = ۱ \rightarrow$ یک درجه نامعین است.

$(d)$ قطعات $d_۱$ و $d_۲$ و $d_۳$ مطابق شکل مقابل، پایدار داخلی می‌باشند. زیرا چند عضو توسط اتصال صلب به‌هم متصل شده‌اند.



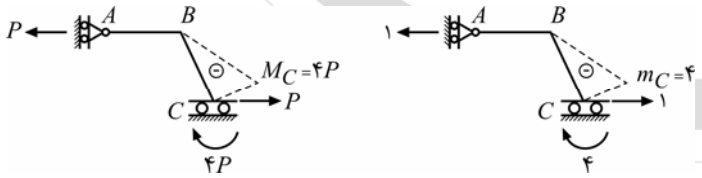

هر ۲ قسمت از این ۳ قسمت پایدار توسط مفصل‌های خمشی که در یک امتداد نیستند، به هم متصل شده‌اند، بنابراین سازه $d$ ازنظر داخلی پایدار می‌باشد و ازنظر خارجی نیز قیدهای لازم برای پایداری این سازه موجود است، لذا کل سازه پایدار است.

$n = ۳k + r - (C + ۳) = ۳\times۱ + ۳ - (۳+۳) = ۰ \rightarrow$ معین است.

بنابراین سازه‌های $b$ و $d$، پایدار و معین می‌باشند.

**۵۱- (۳)**

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. تحلیل هر دو سازه مشابه هم می‌باشد. به عنوان مثال عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی سازهٔ اصلی را می‌یابیم:

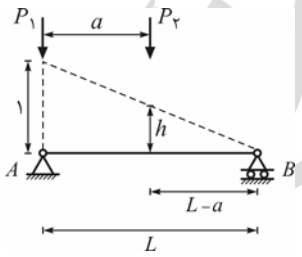



سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی — سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{A_x} = P$$
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{C_y} = ۰$$
$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow M_C = ۴P$$

$$\Delta_C \times ۱ + ۰ = \int \frac{M(x)\,m(x)}{EI}\,dx = \frac{A_M\,\bar{m}}{EI} = \frac{\left[\frac{۱}{۲}(۴P\times۵)\right]\times\left(\frac{۲}{۳}\times۴\right)}{EI} = \frac{۸۰P}{۳EI}$$

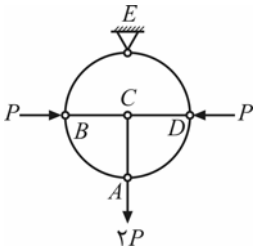
**۵۲- (۴)**




برش ماکزیمم در یک تیر دوسر مفصل، روی یکی از دو تکیه‌گاه ایجاد می‌شود. خط تأثیر برش در تکیه‌گاه سمت چپ (یا همان خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه) را درنظر می‌گیریم. (زیرا $P_۱ > P_۲$ بوده و $P_۱$ در سمت چپ قرار دارد.)

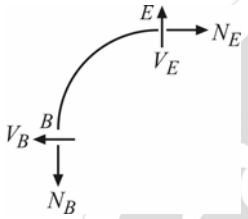
$$\begin{cases} V_{max} = V_A = P_۱\times۱ + P_۲\times h \\ \dfrac{h}{۱} = \dfrac{L-a}{L} \Rightarrow h = \dfrac{L-a}{L} \end{cases} \Rightarrow V_{max} = P_۱ + \frac{L-a}{L}P_۲$$

**۵۳- (۲)**



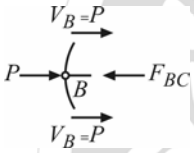

عضوهای $BC$ و $CD$ در یک راستا هستند. بنابراین با توجه به نحوهٔ اتصال این اعضا به عضو $AC$ در گرهٔ $C$ ( $AC$ در راستای آنها نیست) و این‌که بار خارجی به گره $C$ اعمال نشده است، می‌توان گفت $AC$ یک عضو صفر نیرویی می‌باشد. ($F_{AC}=۰$)

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{E_y} = ۲P \uparrow$$
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{E_x} = ۰$$




حال قطعه $BE$ را جداگانه بررسی می‌نماییم. با توجه به تقارن سازه اصلی، نیروی برشی $V_E$ در $BE$ و $DE$ باهم برابر بوده و برابر با مقدار $P$ می‌باشد.

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow V_E = N_B = P$$
$$\sum M_E = ۰ \Rightarrow N_B \cdot R = V_B \cdot R \Rightarrow N_B = V_B = P$$




به همین ترتیب $V_B$ در عضو $AB$ نیز $P$ بدست می‌آید. در نهایت از تعادل نیروها در گره $B$، خواهیم داشت:

$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{BC} = ۳P$ فشاری

**۵۴- (۳)**

اعضای $CE$ و $CD$ هیچ‌گونه سختی خمشی‌ای نداشته و $M_{CE}=M_{CD}=۰$ می‌باشد. لذا لنگر خمشی $M$ بین اعضای $AC$ و $BC$ توزیع خواهد شد. با توجه به این‌که سختی خمشی هر دو عضو یکسان است (زیرا مشابه هم هستند)، می‌توان نوشت:

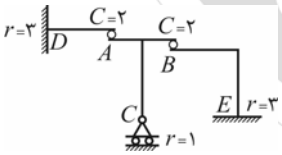
$$M_{CB} = M_{CA} = \frac{M}{۲}$$

حال می‌توان $M_{BC}$ را به‌دست آورد:

$$M_{BC} = M_{CB} \times C.O.F. = \frac{M}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{M}{۴}$$

**۵۵- (۱)**

ابتدا درجه نامعینی سازه را به روش حلقه می‌یابیم:

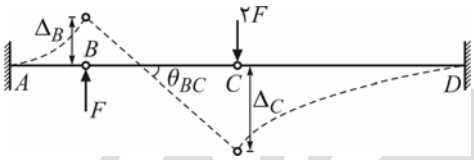



$n = ۳k + r - (C+۳) = ۰ + ۷ - (۴+۳) = ۰ \rightarrow$ معین است

قطعه $ABC$ هیچ‌گونه قیدی در مقابل نیروهای افقی ندارد، به‌عبارتی دیگر هرگاه یک نیروی افقی به آن وارد شود، هیچ مولفه افقی برای تحمل این نیرو وجود نداشته و $\sum F_x = ۰$ برای $ABC$ برقرار نمی‌گردد. لذا این قسمت از سازه، عامل ناپایداری کل سازه است.

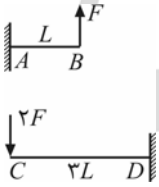
**۵۶- (۱)**

تغییرشکل این سازه به‌صورت مقابل می‌باشد:




عضو $BC$ دوسر مفصل بوده و لنگر خمشی و نیروی برشی در طول آن صفر است. بنابراین کل بار $F$ به $AB$ و کل بار $۲F$ به $CD$ می‌رسد.

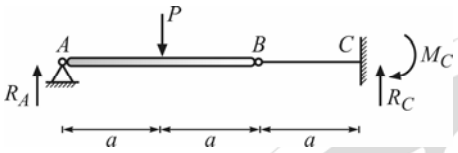
باتوجه به شکل: $\theta_{BC} = \dfrac{\Delta_B + \Delta_C}{L_{BC}}$




$$\begin{cases} \Delta_B = \dfrac{FL^۳}{۳EI} \\ \Delta_C = \dfrac{۲F(۳L)^۳}{۳EI} = \dfrac{۱۸FL^۳}{EI} \end{cases} \Rightarrow \theta_{BC} = \frac{\dfrac{FL^۳}{۳EI} + \dfrac{۱۸FL^۳}{EI}}{۲L} = \frac{۵۵FL^۲}{۶EI}$$

**۵۷- (۴)**

از روش تیر مزدوج استفاده می‌کنیم. زیرا اختلاف شیب در طرفین مفصل خمشی خواسته شده است. برای رسم تیر مزدوج و بارگذاری آن، باید نمودار لنگر خمشی در قسمت‌های الاستیک (غیر صلب) سازه رسم شود (قطعه $BC$ در تیر داده شده). داریم:

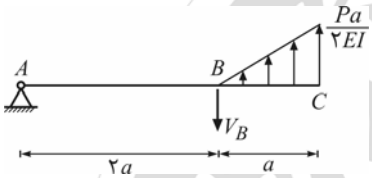



$$\sum M_{B_L} = ۰ \Rightarrow R_A \times ۲a = P \times a \Rightarrow R_A = \frac{P}{۲}$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_C + R_A = P \Rightarrow R_C = P - \frac{P}{۲} = \frac{P}{۲}$$

$$\sum M_{B_R} = ۰ \Rightarrow M_C = R_C \times a = \frac{Pa}{۲}$$

تیر مزدوج به‌صورت زیر رسم شده و بارگذاری می‌شود:



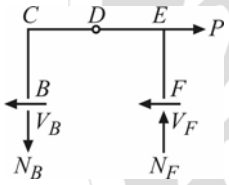

$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow V_B \times ۲a = \frac{۱}{۲}\left(\frac{Pa}{۲EI} \times a\right) \times \left(۲a + \frac{۲a}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{Pa^۲}{۳EI}$$

$V_B$ در تیر مزدوج، همان $\Delta\theta$ طرفین $B$ در تیر اصلی است.

**۵۸- (۲)**

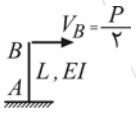
قطعه $BCDEF$ را مطابق شکل به‌طور جداگانه تحلیل می‌کنیم. توجه شود که در $B$ و $F$، لنگر خمشی صفر است.




$$\sum M_F = ۰ \Rightarrow N_B \times ۲L = P \times L \Rightarrow N_B = \frac{P}{۲}$$

$$BCD: \sum M_D = ۰ \Rightarrow N_B \times L = V_B \times L \Rightarrow V_B = N_B = \frac{P}{۲}$$

برش $V_B$ به ستون $AB$ می‌رسد:




$$\Delta_B = \frac{V_B L^۳}{۳EI} = \frac{PL^۳}{۶EI}$$

**۵۹- (۳)**

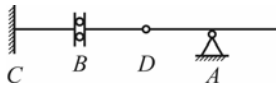
چون $M_A$ خواسته شده و $M_B = ۰$ می‌باشد، می‌توان از رابطه شیب افت اصلاح شده استفاده کرد:

$$M_A = M_{AB} = \frac{۳EI}{L}\left(\theta_A - \frac{\Delta_{B/A}}{L}\right) + \bar{M}_{AB} - \frac{۱}{۲}\bar{M}_{BA} = \frac{۳EI}{L}\left(۰ - \frac{(-۲+۱)}{L}\right) + ۰ - ۰ = \frac{۳EI}{L^۲}$$

**تذکر:** علت علامت منفی به‌کار رفته در $\Delta_{B/A}$ آن است که نشست تکیه‌گاه $A$ نسبت به $B$ به سمت پایین می‌باشد.

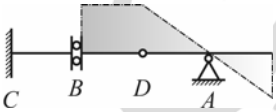
**۶۰- (۴)**

برای رسم خط تأثیر نیروی برشی در نقطه $B$، یک مفصل برشی فرضی در این نقطه قرار می‌دهیم و به دو طرف اختلاف خیزی برابر با واحد اعمال می‌نماییم. توجه شود که شیب تیر در طرفین مفصل برشی فرضی در $B$ باید با هم برابر باشد.




همانطور که دیده می‌شود، تکیه‌گاه $C$ گیردار است و اجازه هیچ‌گونه تغییرشکلی را به قطعه $BC$ نمی‌دهد. به همین علت خیز و شیب سمت چپ نقطه $B$ صفر خواهد بود، بنابراین شیب قطعه $BD$ هم صفر می‌باشد و خیز آن برابر واحد خواهد بود.

خط تأثیرنیروی برشی در $B$ به‌صورت روبرو خواهد بود:




ملاحظه می‌شود که نمودار خط تأثیر از یک مستطیل و دو مثلث تشکیل شده است.

## مکانیک خاک و پی

**۶۱- (۱)**

در آزمایش تحکیم یک‌بعدی به علت عدم تغییر شکل جانبی نمونه، بایستی برای به‌دست آوردن فشار جانبی وارد بر سطح استوانه از رابطهٔ محاسبهٔ فشار جانبی در حالت سکون استفاده کنیم. بنابراین تنش کل افقی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sigma_h = \sigma'_h + u = K_\circ \sigma'_v + u$$

از طرفی می‌دانیم اضافه‌فشار آب حفره‌ای در ابتدای تحکیم برابر فشار وارده و در انتهای آن صفر است. در مورد اضافه تنش مؤثر نیز عکس این مطلب صحت دارد، لذا خواهیم داشت:

حالت ۱) ابتدای تحکیم (بلافاصله پس از اعمال فشار قائم): $\sigma' = \circ \ , \ u = P \ \rightarrow \ \sigma_h = \circ + P = P$

حالت ۲) انتهای تحکیم (پس از خاتمه تحکیم): $\sigma' = P \ , \ u = \circ \ \rightarrow \ \sigma_h = k_\circ P + \circ = k_\circ P$

**۶۲- (۲)**

با توجه به صورت سؤال واضح است که هدف به‌دست آوردن عمق مجاز گودبرداری می‌باشد، بنابراین می‌نویسیم:

$$\phi = ۳\circ^\circ \ \Rightarrow \ K_a = tan^۲(۴۵ - \frac{\phi}{۲}) = \frac{۱}{۳} \qquad c = \circ/۱ \ kg/cm^۲ = ۱\circ\circ \ gr/cm^۲$$

توجه: $\sqrt{۳} = ۱/۷۳$

$$H = \frac{۴c}{\gamma\sqrt{K_a}} = \frac{۴\times۱\circ\circ}{۱/۷۳\times\sqrt{\frac{۱}{۳}}} = ۴\circ\circ cm = ۴ \ m$$

**۶۳- (۱)**

به دلیل واحد بودن چگالی آب، سه برابر شدن حجم آب موجود در خاک، به معنی سه‌برابر شدن وزن آب نیز می‌باشد که باتوجه به ثابت بودن وزن دانه‌های جامد، نتیجه می‌شود که میزان رطوبت خاک نیز سه‌برابر خواهد شد:

$$\omega = \frac{\overset{\text{سه برابر شده است.}}{W_w}}{\underset{\text{ثابت است}}{W_s}} \ \Rightarrow \ \omega \text{ سه برابر می‌شود}$$

اما با سه برابر شدن حجم آب نمی‌توان به‌طور دقیق درمورد تغییرات درجه اشباع اظهارنظر کرد. در این حالت بایستی حتماً درجه اشباع اولیه خاک مشخص باشد.

$$S_r = \frac{\overset{\text{سه برابر شده است.}}{V_w}}{\underset{?}{V_v}} \ \Rightarrow \ \begin{cases} \text{اولیه } S_r \le \frac{۱}{۳} \ \Rightarrow \ V_v \text{ ثابت می‌ماند} \ \Rightarrow \ S_r \text{ سه‌برابر خواهد شد} \\ \frac{۱}{۳} < \text{اولیه } S_r < ۱ \ \Rightarrow \ \begin{matrix} V_v \text{ زیاد می‌شود} \\ \text{ولی سه برابر نمی‌شود} \end{matrix} \ \Rightarrow \ \begin{matrix} S_r \text{ زیاد می‌شود} \\ \text{ولی سه برابر نمی‌شود} \end{matrix} \\ \text{اولیه } S_r = ۱ \ \Rightarrow \ V_v \text{ سه برابر می‌شود} \ \Rightarrow \ S_r \text{ ثابت می‌ماند} \end{cases}$$

توجه کنید که ماکزیمم مقدار $S_r$ برابر یک است.

**۶۴- (۴)**

براساس معیار مور-کولمب تنش قائم و برشی حداکثر هیچ‌یک به تنهایی سبب گسیختگی خاک نمی‌گردد، بلکه ترکیبی بحرانی از آن‌هاست که منجر به گسیختگی خاک می‌گردد بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

**۶۵- (۲)**

$$\begin{cases} Q = kA\left(\frac{\Delta H}{L}\right) \\ L = \sqrt{۶\circ^۲ + ۸\circ^۲} = ۱\circ\circ \end{cases} \Rightarrow Q = (۲)\left(\frac{\pi}{۴}\times۱\circ^۲\right)\left(\frac{۶\circ}{۱\circ\circ}\right) = ۳\circ\pi \ cm^۳/s$$

توجه کنید که $\Delta H$ فاصله قائم بین ترازهای پیزومتری دو نقطه است و همانطور که در شکل ملاحظه می‌کنید برابر $۶\circ cm$ است.

**۶۶- (۳)**

با نوشتن رابطهٔ پیوستگی جریان خواهیم داشت:

$$Q_1 = Q_2 \;\Rightarrow\; k_1 A_1 \left(\frac{\Delta h_1}{L_1}\right) = k_2 A_2 \left(\frac{\Delta h_2}{L_2}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 = L_2 = 1m]{A_1 = A_2} (k_1)(\Delta h_1) = (2k_1)(\Delta h_2) \;\Rightarrow\; \Delta h_1 = 2\Delta h_2 \quad (I) \text{ رابطه}$$

از طرفی می‌دانیم افت انرژی کل برابر مجموع افت تک‌تک لایه‌هاست، بنابراین می‌نویسیم:

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 = h \quad (II) \text{ رابطه}$$

از روابط $(I)$ و $(II)$ مقادیر $\Delta h_1$ و $\Delta h_2$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\Delta h_1 = \frac{2h}{3} \quad , \quad \Delta h_2 = \frac{h}{3}$$

حال شرط جوشش در خاک (۱) را می‌نویسیم:

$$FS_{\text{جوشش}} = 1 \;\Rightarrow\; (i_{cr})_1 = i_1 = \frac{\Delta h_1}{L_1} \;\Rightarrow\; 1 = \frac{\left(\frac{2h}{3}\right)}{1} \;\Rightarrow\; h = 1/5\,m$$

**۶۷- (۴)**

با استفاده از رابطه زیر در آزمایش $CU$ خواهیم داشت:

$$(\sigma_1 - u_f) = (\sigma_3 - u_f)\tan^2\left(45 + \frac{\phi'}{2}\right) + 2c'\tan\left(45 + \frac{\phi'}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\; (120 + 120 - u_f) = (120 - u_f)\tan^2\left(45 + \frac{30}{2}\right) + 0 \;\Rightarrow\; u_f = 60\,kN/m^2$$

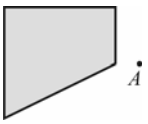
**۶۸- (۲)**

آب جذب سطحی با ویسکوزیته بالا مثل یک چسب لزج ذرات رس را به هم چسبانده و توده خاک را خمیری می‌کند. این در حالی است که آب موجود در حفرات خاک که جاذبه‌ای با ذرات رس نداشته و با ویسکوزیته پایین به‌راحتی در خاک روان است (آب آزاد) باعث روان شدن خاک می‌گردد. پس می‌توان گفت که آب جذب سطحی عامل رفتار خمیری خاک رسی و آب آزاد باعث بروز خاصیت روانی آن است.

**۶۹- (۲)**

درصد تراکم خاک می‌تواند بیش از ٪۱۰۰ شود و آن زمانی است که خاک موردنظر در کارگاه بیشتر از مقدار تعیین شده در آزمایشگاه متراکم شود. (به‌عنوان مثال در خاکهایی که ذرات درشت‌تر از الک $\frac{3}{4}$ اینچ را بیشتر داشته باشند و همچنین در حالتی که انرژی تراکم در کارگاه بیشتر است، چنین حالتی اتفاق می‌افتد.)

**۷۰- (۳)**




برای نقطه‌ای که می‌خواهیم اضافه تنش قائم آن را محاسبه کنیم، محدودیتی وجود ندارد. این نقطه می‌تواند در هر مکانی از جمله خارج از سطح بارگذاری هم قرار داشته باشد. به‌عنوان مثال می‌توان به اضافه تنش قائم نقطهٔ $A$ در سطح بارگذاریِ شکل مقابل اشاره کرد. از این رو گزینه (۳)نادرست است.

**۷۱- (۱)**

$$F_{200} = 16\% < 50\% \;\Rightarrow\; \text{خاک درشت‌دانه است } (G \text{ یا } S)$$

$$F_4^* = \left(\frac{F_4 - F_{200}}{100 - F_{200}}\right) \times 100 = \left(\frac{77 - 16}{100 - 16}\right) \times 100 = 72/6\% \;\Rightarrow\; \text{خاک ماسه‌ای } (S) \text{ است.}$$

باتوجه به گزینه‌ها واضح است که تنها گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد. نام کامل خاک را که $SC$ است، خودتان به‌دست آورید.

**۷۲- (۳)**

با فرض عادی‌تحکیم‌یافته بودن لایه رسی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \Delta H = \dfrac{H_\circ}{1+e_\circ} C_c \log\left(\dfrac{\sigma'_f}{\sigma'_\circ}\right) \\ \sigma'_\circ = (22-10)(3) = 36\ kN/m^2 \\ \sigma'_f = \sigma'_\circ + \Delta\sigma' \quad , \quad \Delta\sigma' = \Delta\sigma = 18\times 2 = 36\ kN/m^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma'_f = 36+36 = 72\ kN/m^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta H = \frac{600\times 0/3}{1+0/8} \log\left(\frac{72}{36}\right) = 100 \log 2\ cm$$

**۷۳- (۲)**

ابتدا فشار آب حفره‌ای درنقطهٔ $A$ را با انتخاب سطح آبِ پایین‌دست به‌عنوان سطح مبنا و استفاده از روابط فشار آب حفره‌ای در جریان دوبعدی، به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$u_A = \left[\Delta H - (N_d)_A \Delta h - (h_z)_A\right]\gamma_w = \left[7 - 5/5\times\left(\frac{7}{7}\right) - (-11)\right]\times 10 = 125\ kN/m^2$$

حال تنش کل در نقطهٔ $A$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\sigma_A = \gamma_{sat}\, z = 22\times 11 = 242\ kN/m^2$$

و در نهایت با استفاده از اصل تنش موثر می‌نویسیم:

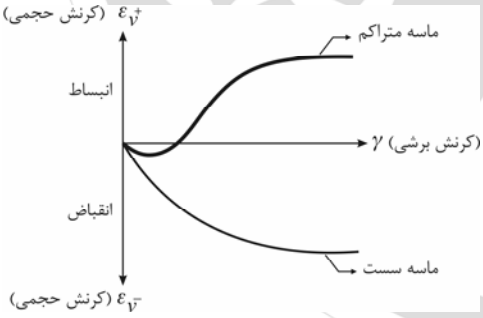
$$\sigma'_A = \sigma_A - u_A = 242 - 125 = 117\ kN/m^2$$

**۷۴- (۱)**

$$\Delta\sigma'_{z\,(A)} = \Delta u_{z\,(A)} = \gamma_w\ \Delta h = 10\times 0/5 = 5\ kN/m^2$$

$$\Delta U_{z\,(A)} = \frac{\Delta\sigma'_{z\,(A)}}{\Delta\sigma} = \frac{5}{20} = 0/25 = 25\%$$

**۷۵- (۴)**




در آزمایش برش مستقیم مانند مرحله دوم آزمایش سه‌محوری $CD$، هیچگاه نمونه موردنظر در ابتدا با افزایش حجم مواجه نمی‌شود. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) اساساً نادرست می‌باشند.

باتوجه به نمودار تغییرات حجم در آزمایش برش مستقیم که به صورت مقابل می‌باشد، واضح است پاسخ این تست همان گزینه باقی‌مانده یعنی گزینه (۴) است.

**۷۶- (۳)**

با توجه به صورت سؤال، فشار جانبی در حالت سکون مد نظر می‌باشد. بنابراین می‌نویسیم:

$$\sigma_h = \sigma'_v K_\circ + u \ , \ K_\circ = 1 - \sin\phi = 1 - \sin 30 = 0/5$$

۱- قبل از بالا آمدن آب:

$$\sigma'_v = 4\gamma + 2\gamma' = 4\times 18 + 2\times(20-10) = 72 + 20 = 92\ kN/m^2$$

$$\sigma_h = K_\circ \sigma'_v + u = 0/5\times 92 + 2\times 10 = 66\ kN/m^2$$

۲- بعد از بالا آمدن آب:

$$\sigma'_v = 3\gamma + 3\gamma' = 3\times 18 + 3\times(20-10) = 84\ kN/m^2$$

$$\sigma_h = K_\circ \sigma'_v + u = 0/5\times 84 + 3\times 10 = 72\ kN/m^2$$

بنابراین در اثر بالا آمدن آب، فشار جانبی در حالت سکون، به اندازه $6\ kPa$ افزایش می‌یابد.

**توجه:** این سؤال را می‌توانستیم به صورت زیر نیز پاسخ دهیم:

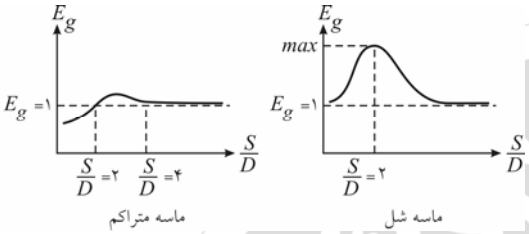
$$\Delta\sigma_h = \Delta\sigma'_v K_\circ + \Delta u = \Delta h\,(\gamma' - \gamma) K_\circ + \Delta u = 1\times(10-18)\times 0/5 + 1\times 10 = +6\ kPa$$

**۷۷- (۱)**

سقف موجود بر روی دیوار زیرزمین مانع از هر گونه تغییر مکان جانبی دیوار می‌شود، بنابراین برای طراحی دیوارهای زیرزمین در برابر فشارهای جانبیِ خاک پشت آن، دیوار را ساکن در نظر گرفته، از فشار جانبی حالت سکون ($k_0$) استفاده می‌کنیم.

**۷۸- (۳)**

با افزایش زاویه اصطکاک داخلی، تراکم نسبی خاک نیز افزایش می‌یابد. کمتر بودن عدد $E_g$ (ضریب کارایی گروه شمع) در خاک ماسه‌ای متراکم نسبت به ماسه شل را می‌توان با توجه به دو نمودار مقابل نشان داد:



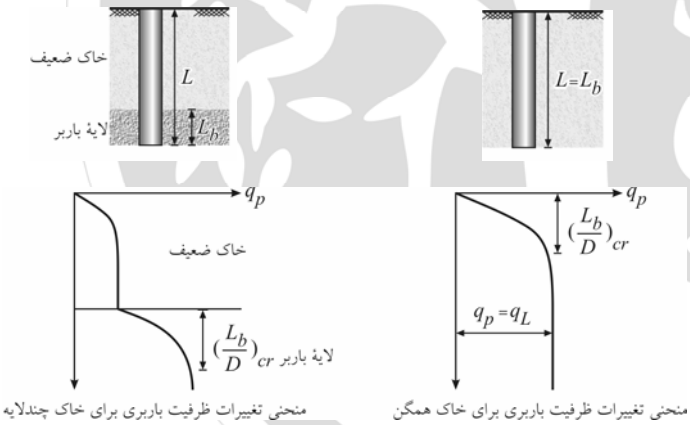

در نمودارهای مقابل $S$ ، فاصله محور تا محور شمع‌ها و $D$ قطر شمع است.

**۷۹- (۴)**

روش مایرهوف در تعیین مقاومت انتهایی (ظرفیت باربری نوک) شمع به شرح زیر است:

ظرفیت باربری نوک در واحد سطح برای یک شمع کوبیده شده در لایه ماسه‌ای ($q_p$)، با عمق فرورفته شمع در لایه باربر افزایش می‌یابد و در نسبت عمق $\frac{L_b}{D}=(\frac{L_b}{D})_{cr}$ به مقدار حداکثر خود می‌رسد. در یک خاک همگن، $L_b$ مساوی طول واقعی مدفون شمع یعنی $L$ می‌باشد ولی در خاک‌های چندلایه، $L_b$ به اندازه‌ای است که شمع در لایه باربر نفوذ کرده است که کوچک‌تر از کل طول شمع یعنی $L$ می‌باشد.

مقدار $(\frac{L_b}{D})_{cr}$ تابعی از زاویه اصطکاک داخلی خاک بوده و با افزایش آن افزایش می‌یابد، پس می‌توان گفت $(L_b)_{cr}$ تابعی از زاویه اصطکاک داخلی خاک و قطر شمع است.




با توجه به توضیحات فوق، گزینه (۴) پاسخ صحیح است.

**۸۰- (۱)**

با توجه به اینکه خاک رسی است، نشست داشته و پدیده اصطکاک منفی رخ می‌دهد که در نهایت باعث کاهش ظرفیت باربری شمع‌ها می‌گردد. در این حالت بهتر است کلاهک شمع‌ها روی سطح خاک اجرا نشود تا اولاً طول کمتری در خاک واقع شود، ثانیاً نشست خاکِ اطراف شمع‌ها کمتر شود.

**۸۱- (۴)**

برای محاسبه ظرفیت باربری کوتاه مدت پی نواری که خاک زیر آن رس اشباع است، داریم:

$$\begin{cases} q_{ult}=(2+\pi)c_u+q \quad \text{(روش مایرهوف و هانسن)} \\ q=0 \quad \text{(پی روی سطح خاک اجرا شده)} \\ c_u=\frac{1}{2}q_u=\frac{1}{2}\times 200=100\,kN/m^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_{ult}=(2+\pi)\times 100+0 \xrightarrow{\pi=3} q_{ult}=5\times 100=500\,kN/m^2$$

**توجه:** در مواردی که اجرای پی نواری روی سطح خاک مد نظر است، برای محاسبهٔ ظرفیت باربری از روش مایرهوف و هانسن استفاده کنید.

**۸۲- (۲)**

نیروی کششی در پی دایره‌ای که زیر یک ستون دایره‌ای قرار دارد، از رابطه مقابل قابل محاسبه است:

$$T = \frac{P(D-D_\circ)}{۳\pi d}$$

در رابطه فوق $D$ و $D_\circ$ به ترتیب قطر پی و قطر ستون، $P$ نیروی عمودی ستون و $d$ ارتفاع مؤثر مقطع است.

در حل این سؤال داریم:

$$T = \frac{۹۰۰\times(۲-۰/۵)}{۳\pi\times ۰/۶} = ۲۵۰\ kN$$

**۸۳- (۱)**

با استفاده از روش هانسن داریم:

$$\frac{(q_{ult})_۲}{(q_{ult})_۱} = \frac{۰/۵\,B'\gamma N_\gamma\,[s_\gamma]'}{۰/۵\,B\,\gamma N_\gamma\,[s_\gamma]} = \frac{B'[s_\gamma]'}{B\,[s_\gamma]}$$

$$\begin{cases} e_y = \dfrac{M_x}{P} = \dfrac{۱۰۰}{۱۰۰۰} = ۰/۱ \\ e_x = ۰ \end{cases} \Rightarrow B' = ۲-۲\times ۰/۱ = ۱/۸\ ,\ L' = ۲$$

از آن‌جا که فرمول $s_\gamma$ در صورت سؤال داده نشده است، احتمالاً منظور طراح این است که از آن صرف‌نظر شود. بنابراین می‌نویسیم:

$$\frac{(q_{ult})_۲}{(q_{ult})_۱} = \frac{۱/۸}{۲} = ۰/۹$$

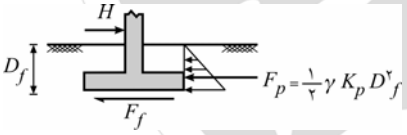
**توجه**: اگر از ضریب شکل صرف‌نظر نکنیم، حل این سؤال به شرح زیر خواهد بود:

$$[s_\gamma] = ۱-۰/۴\frac{B}{L} = ۱-۰/۴\times\frac{۲}{۲} = ۰/۶ \qquad [s_\gamma]' = ۱-۰/۴\frac{B'}{L'} = ۱-۰/۴\times\frac{۱/۸}{۲} = ۰/۶۴$$

$$\frac{(q_{ult})_۲}{(q_{ult})_۱} = \frac{۱/۸\times ۰/۶۴}{۲\times ۰/۶} = ۰/۹۶$$

**۸۴- (۳)**

حداکثر نیرویی که یک پی در راستای افقی می‌تواند تحمل کند، برابر با مجموع نیروی مقاومِ خاک ناشی از فرورفتگی پی در عمق ($F_p$) به اضافه نیروی اصطکاک میان پی و خاک ($F_f$) است که مقدار نیروی اصطکاک برابر است با:




$$F_f = P\tan\delta + c_a A_f$$

در رابطه بالا $P$ = نیروی عمود بر محور پی ، $\delta$ = زاویه اصطکاک بین کف پی و خاک، $c_a$ = چسبندگی میان کف پی و خاک و $A_f$ = سطح مقطع پی می‌باشند.

برای پایداری پی در برابر لغزش باید رابطه مقابل برقرار باشد:

$$H \le \frac{F_f + F_p}{FS}$$

که در آن $H$ نیروی افقی وارد بر پی می‌باشد. با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال، با فرض $\delta = \phi$ و $c_a = c$ خواهیم داشت:

$$F_f = P\cdot\tan\phi + c\cdot A = ۱۰۰۰\times\frac{۱}{۲} + ۵۰\times ۲\times ۲ = ۷۰۰$$

$$FS = \frac{F_f + \cancel{F_p}^{\,\circ}}{H_B} = \frac{۷۰۰}{۲۸۰} = ۲/۵$$

**۸۵- (۴)**

از آزمایش بارگذاری صفحه برای تعیین ظرفیت باربری نهایی خاک و همچنین ظرفیت باربری مجاز خاک بر مبنای نشست استفاده می‌شود. از این آزمایش $E$ اولیه خاک (معمولاً درشت‌دانه) نیز تعیین می‌شود. در آزمایش فشارسنجی (پرسیومتری) با حفر گمانه و به کمک سلول‌های تحت فشار، لایه‌های خاک به صورت جانبی (افقی) بارگذاری می‌شوند. با افزایش تدریجی فشار سلول و اندازه‌گیری تغییر حجم سلول، می‌توان ظرفیت باربری خاک را در لایه‌های مختلف تعیین نمود. این آزمایش برای محاسبه $E$ (معمولاً ریزدانه‌ها) و ضریب رانش جانبی خاک در حال سکون ($k_\circ$) نیز به‌کار می‌رود. لازم به ذکر است که از نتایج آزمایش‌های $SPT$ و $CPT$ می‌توان به صورت غیر مستقیم مقدار $E$ خاک را تخمین زد.

## مکانیک سیالات و هیدرولیک

**۸۶- (۳)**

با استفاده از رابطه دارسی - ویسباخ مقدار افت انرژی طولی ( $\Delta H_T$ یا $h_f$ ) در لوله برابر است با:

$$h_f = \frac{8 f L Q^2}{\pi^2 g D^5}$$

$$h_{f_2} = h_{f_3} \Rightarrow \frac{8 f L Q_2^2}{\pi^2 g D_2^5} = \frac{8 f L Q_3^2}{\pi^2 g D_3^5} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_3} = \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^{2/5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/5} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \Rightarrow Q_3 = 4\sqrt{2}\, Q_2$$

$$Q_3 = 0/8 Q \Rightarrow Q_3 = 0/8(Q_1 + Q_2 + Q_3) \Rightarrow Q_1 + Q_2 = 0/25 Q_3 = 0/25 \times 4\sqrt{2}\, Q_2 = \sqrt{2}\, Q_2 \Rightarrow Q_1 = \left(\sqrt{2} - 1\right) Q_2$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} \simeq 0/4$$

$$h_{f_1} = h_{f_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{2/5} = 0/4 \Rightarrow \frac{D_1}{D_2} = 0/4^{0/4}$$

**۸۷- (۲)**

ابتدا دبی عبوری از جت‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$Q_1 = V_1 A_1 = (4)\left(\frac{\pi \times 0/1^2}{4}\right) = 0/03\ m^3/s \qquad Q_2 = V_2 A_2 = (2)\left(\frac{\pi \times 0/2^2}{4}\right) = 0/06\ m^3/s$$

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = 0/03 + 0/06 = 0/09\ m^3/s$$

اگر حجم کنترل را در محل برخورد جت‌ها در نظر بگیریم، با توجه به صفر بودن نیروی اندرکنش $S$ و نیز اتمسفریک بودن فشار، خواهیم داشت:

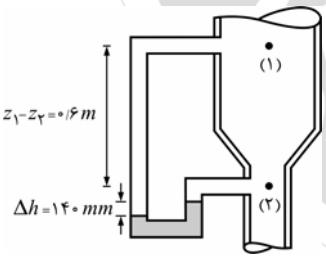
$$\sum F_x = \left(\sum \rho Q V_x\right)_{out} - \left(\sum \rho Q V_x\right)_{in} = 0 \Rightarrow (1000)(0/09)(V\cos\theta) - (1000)(0/06)(2) = 0 \Rightarrow V\cos\theta = V_x = \frac{4}{3}\ m/s$$

$$\sum F_y = \left(\sum \rho Q V_y\right)_{out} - \left(\sum \rho Q V_y\right)_{in} = 0 \Rightarrow (1000)(0/09)(V\sin\theta) - (1000)(0/03)(4) = 0 \Rightarrow V\sin\theta = V_y = \frac{4}{3}\ m/s$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\ m/s$$

**۸۸- (۳)**

با استفاده از رابطه پیوستگی جریان بین دو مقطع داریم:




$$V_2 = V_1\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = V_1 \times \left(\frac{300}{100}\right)^2 \Rightarrow V_2 = 9 V_1$$

حال وزن مخصوص مایع اصلی جریان و مایع مانومتری را به ترتیب با $\gamma$ و $\gamma_0$ نشان داده و با استفاده از معادله برنولی و معادله مانومتری محاسبه فشار بین دو نقطه (۱) و (۲) می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma}\right) + (z_1 - z_2) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \Delta H \\ P_1 + (z_1 - z_2)\gamma + \Delta h \times \gamma - \Delta h\, \gamma_0 = P_2 \Rightarrow \left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma}\right) + (z_1 - z_2) = \Delta h\left(\frac{\gamma_0}{\gamma} - 1\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta h\left(\frac{\gamma_0}{\gamma} - 1\right) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \Delta H$$

$$\Rightarrow 0/14 \times \left(\frac{13/5}{0/9} - 1\right) = \frac{(9V_1)^2 - V_1^2}{2 \times 10} + 0 = \frac{80 V_1^2}{2 \times 10} \Rightarrow V_1 = 0/7\ m/s$$

$$Q = V_1 A_1 = (0/7)\left(\frac{\pi \times 0/3^2}{4}\right) = 0/04725\ m^3/s = 47/25\ lit/s$$

**توجه:** بهتر بود طراح سؤال به نبود افت انرژی در صورت تست اشاره می‌کرد.

**۸۹- (۱)**

$$N = F\times V \equiv \rho V^{۲}A\times V \equiv \rho V^{۳}A\ ,\ A\propto L^{۲} \ \Rightarrow\ N_r = \left(\frac{\rho_m}{\rho_p}\right)V_r^{۳}L_r^{۲} \ \Rightarrow\ \frac{N_m}{۶۴} = (۱)\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\left(\frac{۱}{۸}\right)^{۲} \ \Rightarrow\ N_m = ۰/۱۲۵\ kW$$

**۹۰- (۲)**

با فرض آرام بودن رژیم جریان می‌نویسیم:

$$\tau = \mu\left(\frac{du}{dy}\right) = -\mu\left(\frac{du}{dr}\right) = -\mu\left(-۰/۱\times\frac{۱}{۰/۰۰۵}\right) = ۲۰\mu\ (N/m^{۲})$$

$$\Delta H = \frac{\Delta P}{\gamma} + \Delta z \xrightarrow{\Delta P = ۰} \Delta H = \Delta z\ ,\ \Delta z = L\sin\alpha \ \Rightarrow\ \frac{\Delta H}{L} = \sin\alpha$$

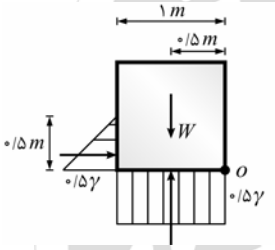
$$\tau = \frac{\Delta H\,\gamma D}{۴L} = \left(\frac{\Delta H}{L}\right)\left(\frac{\gamma D}{۴}\right) = \frac{۱}{۴}\gamma D\sin\alpha = \frac{۱}{۴}(۸۰۰۰)(۰/۰۱)(\sin ۵^\circ) = ۲۰\sin ۵^\circ\ (N/m^{۲})$$

حال با برابر قرار دادن مقادیر به‌دست آمده برای تنش برشی خواهیم داشت:

$$۲۰\mu = ۲۰\sin ۵^\circ \ \Rightarrow\ \mu = \sin ۵^\circ\ (N.s/m^{۲})$$

**توجه:** با کنترل عدد رینولدز بر اساس لزجت به‌دست آمده، آرام بودن جریان و صحت فرض اولیه ما تأیید می‌شود.

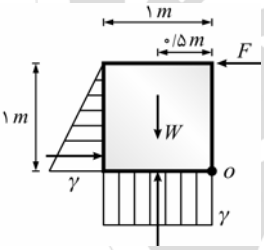
**۹۱- (۴)**




حالت اول: قبل از بالا آمدن سطح روغن

$$\sum M_o = ۰ \ \Rightarrow\ (W)(۰/۵) = (۹۰۰۰\times ۰/۵)(۱\times ۴)\left(\frac{۱}{۲}\right) + (۹۰۰۰)\left(\frac{۰/۵}{۲}\right)(۰/۵\times ۴)\left(\frac{۰/۵}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow\ W = ۱۹۵۰۰\ N$$



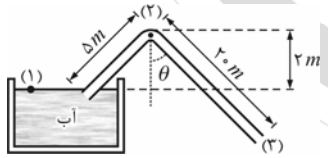

حالت دوم: بعد از بالا آمدن سطح روغن

$$\sum M_o = ۰ \ \Rightarrow\ (F)(۱) + (۱۹۵۰۰)(۰/۵) = (۹۰۰۰\times ۱)(۱\times ۴)\left(\frac{۱}{۲}\right) + (۹۰۰۰)\left(\frac{۱}{۲}\right)(۱\times ۴)\left(\frac{۱}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow\ F = ۱۴۲۵۰\ N$$

**توجه:** در حل این سؤال، محاسبه نیروی هیدرواستاتیک افقی (وارد بر وجه کناری مکعب) طبق رابطه $F = \gamma\bar{h}A$ انجام شده است.

**۹۲- (۳)**




برای ایجاد حداکثر دبی در سیستم بایستی فشار در بالاترین تراز لوله (یعنی نقطهٔ ۲) حداقل شود ولی این مقدار حداقل نبایستی به‌گونه‌ای باشد که از فشار بخار مایع (آب) کمتر گردد زیرا در این حالت در نقطهٔ (۲) کاویتاسیون رخ می‌دهد.

با قرار دادن فشار بخار آب برای نقطهٔ (۲) و نوشتن معادلهٔ برنولی بین نقاط (۱) و (۲) و (۳) خواهیم داشت:

الف) معادله برنولی بین نقاط (۱) و (۲):

$$\frac{P_۱}{\gamma} + \frac{V_۱^{۲}}{۲g} + z_۱ = \frac{P_۲}{\gamma} + \frac{V_۲^{۲}}{۲g} + z_۲ + \Delta H_{(۱-۲)}$$

$$۰+۰+۰ = \left(\frac{۱-۱۰۵}{۱۰}\right) + \left(\frac{V^{۲}}{۲g}\right) + (۲) + (۵)\left(۰/۰۱\frac{V^{۲}}{۲g}\right) \ \Rightarrow\ \frac{V^{۲}}{۲g} = ۸\ m$$

ب) معادله برنولی بین نقاط (۱) و (۳):

$$\frac{P_۱}{\gamma} + \frac{V_۱^{۲}}{۲g} + z_۱ = \frac{P_۳}{\gamma} + \frac{V_۳^{۲}}{۲g} + z_۳ + \Delta H_{(۱-۳)}$$

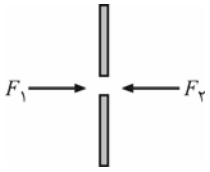
$$۰+۰+(۲۰\cos\theta - ۲) = ۰ + \left(\frac{V^{۲}}{۲g}\right) + ۰ + (۲۰+۵)\left(۰/۰۱\frac{V^{۲}}{۲g}\right) \ \Rightarrow\ \frac{V^{۲}}{۲g} = \frac{۲۰\cos\theta - ۲}{۱/۲۵}$$

و در نهایت از نتایج قسمت‌های (الف) و (ب) به‌دست می‌آید:

$$\frac{۲۰\cos\theta - ۲}{۱/۲۵} = ۸ \ \Rightarrow\ \cos\theta = ۰/۶ \ \Rightarrow\ \theta = ۵۳^\circ$$

**۹۳- (۲)**

با ترسیم دیاگرام آزاد صفحهٔ قائم خواهیم داشت:




$$F_1 = \rho Q_1 V = (1000)\left(40\times\frac{\pi\times 0/1^2}{4}\right)(40) = 4000\pi\ N$$

$$F_2 = \rho Q_2 V = (1000)\left(40\times\frac{\pi\times 0/05^2}{4}\right)(40) = 1000\pi\ N$$

$$R = \sum F_x = F_1 - F_2 = 4000\pi - 1000\pi = 3000\pi = 3\pi\ kN$$

**۹۴- (۱)**

محورهای مختصات را روی سوراخ دیوارهٔ مخزن مستقر کرده و معادلهٔ مسیر حرکت جت را می‌نویسیم:

$$y = \frac{-gx^2}{2V_0^2\cos^2\theta} + x\tan\theta \xrightarrow{\theta=0} y = \frac{-gx^2}{2V_0^2} \Rightarrow -0/05 = \frac{-10\times 0/5^2}{2V_0^2} \Rightarrow V_0 = 5\ m/s$$

$$Q = VA = (5)\left(\frac{\pi\times 0/02^2}{4}\right) = 1/57\times 10^{-3}\ m^3/s = 1/57\ lit/s$$

**۹۵- (۳)**

معادله برنولی را بین نقاط (۱) و (۲) از لوله نوشته و خواهیم داشت:

$$H_1 = H_2 + \Delta H_T \Rightarrow \frac{400}{10} + 0 + \frac{V^2}{2g} = \frac{150}{10} + 20 + \frac{V^2}{2g} + \Delta H_T \Rightarrow \Delta H_T = 5\,m$$

$$\Delta H_T = f\frac{L}{D}\cdot\frac{V^2}{2g} \Rightarrow 5 = 0/025\left(\frac{200}{D}\right)\left(\frac{2^2}{2\times 10}\right) \Rightarrow D = 0/2\,m = 200\,mm$$

**۹۶- (۴)**

ابتدا ضریب $a$ را با قرار دادن $V = V_0$ به‌ازای $y = d$ در سطح آزاد سیال، به‌دست می‌آوریم:

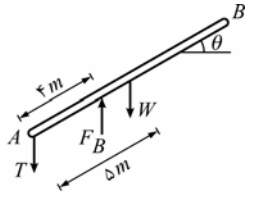
$$y = d\ ,\ V = V_0 \Rightarrow V_0^2 = ad \Rightarrow a = \frac{V_0^2}{d}$$

حال با استفاده از قانون لزجت نیوتن، مقدار $\tau$ در محل تماس با صفحه متحرک برابر است با:

$$\begin{cases}\tau = \mu\dfrac{dV}{dy}\\ V^2 = ay \Rightarrow V = \sqrt{ay} \Rightarrow \dfrac{dV}{dy} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{y}}\end{cases} \Rightarrow \tau_{(y=d)} = \mu\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{d}} = \frac{1}{2}\mu\sqrt{\left(\frac{V_0}{d}\right)^2} = \mu\frac{V_0}{2d}$$

**۹۷- (۲)**

با رسم دیاگرام آزاد قطعه چوبی و نوشتن رابطهٔ تعادل لنگرها حول $A$ خواهیم داشت:




$$\sum M_A = 0 \Rightarrow W\times(5\cos\theta) = F_B\times(4\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{W}{F_B} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{\gamma_s\times 10\times A}{\gamma_w\times 8\times A} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{\gamma_s}{\gamma_w} = 0/64$$

که در نهایت با لحاظ کردن $\gamma_w = 10\ kN/m^3$ مقدار $\gamma_s$ به‌دست می‌آید:

$$\gamma_s = 10\times 0/64 = 6/4\ kN/m^3$$

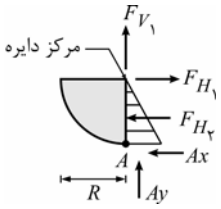
**۹۸- (۱)**

با بکارگیری تشابه رینولدز بین مدل و نمونه اصلی خواهیم داشت:

$$(Re)_m = (Re)_p \Rightarrow \left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)_m = \left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)_p \xrightarrow[\mu_m=\mu_p]{\rho_m=\rho_p} \frac{V_m}{V_p} = \frac{D_p}{D_m} \Rightarrow V_r = \frac{1}{L_r}$$

$$\begin{cases}Q_r = V_r L_r^2 = \dfrac{1}{L_r}\times L_r^2 \Rightarrow Q_r = L_r \Rightarrow \dfrac{Q_m}{Q_p} = L_r\\ Q_p = (0/5)\left(\dfrac{\pi\times 0/8^2}{4}\right) = 0/24\ m^3/s\end{cases} \Rightarrow \frac{Q_m}{0/24} = \frac{1}{10} \Rightarrow Q_m = 0/024\ m^3/s = 24\ lit/s$$

**۹۹- (۴)**

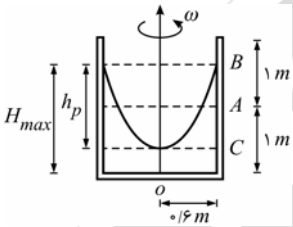



ابتدا مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی هیدرواستاتیک را که از طرف چپ به دریچه وارد می‌شوند، به مرکز دایره منتقل می‌کنیم. سپس با ترسیم دیاگرام آزاد دریچه و نوشتن رابطهٔ تعادل لنگرها حول لولای $A$ خواهیم داشت:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (F_{H_1})(R) = (F_{H_2})(\frac{R}{3}) \Rightarrow \frac{F_{H_1}}{F_{H_2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\gamma_1 \bar{h} A}{\gamma_2 \bar{h} A} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{1}{3}$$

**۱۰۰- (۱)**

با ترسیم موقعیت مایع به هنگام دوران مخزن استوانه‌ای خواهیم داشت:




$$h_p = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} \;,\; \omega = 90 \times \frac{\pi}{30} = 3\pi \;\; rad/s \Rightarrow h_p = \frac{(3\pi)^2 \times (0/6)^2}{2 \times 10} = 1/62\; m$$

$$AC = AB = \frac{h_p}{2} \Rightarrow AB = \frac{1/62}{2} = 0/81\; m$$

$$P_{max} = \gamma H_{max} \;,\; H_{max} = OA + AB = 1 + 0/81 = 1/81$$

$$\Rightarrow P_{max} = (10^3 \times 10)(1/81) = 18100\; Pa = 18/1\; kPa$$

**۱۰۱- (۴)**

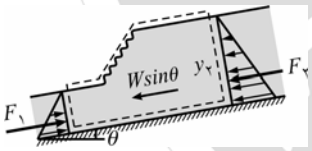
$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} \;,\; D = \frac{1}{2} y \Rightarrow Fr = \frac{V}{\sqrt{\frac{gy}{2}}} = \frac{V\sqrt{2}}{\sqrt{gy}}$$

**توجه:** در کانال مثلثی $D = \frac{y}{2}$ و در کانال مستطیلی $D = y$ است.

**۱۰۲- (۳)**

$$\tau_0 = \gamma R S \;,\; R = \frac{(b + zy)\,y}{b + 2y\sqrt{1+z^2}} = \frac{(4 + 1/25 \times 2) \times 2}{4 + 2 \times 2 \times \sqrt{1 + 1/56}} = 1/25\; m \Rightarrow \tau_0 = 10^4 \times 1/25 \times 4 \times 10^{-4} = 5\; N/m^2$$

**۱۰۳- (۱)**

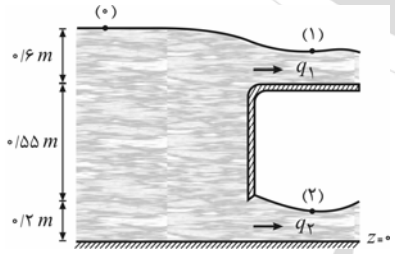



در کانال با شیب معکوس، مؤلفه وزن سیال (مطابق شکل)، واردِ رابطهٔ اندازه حرکت می‌شود. بنابراین نیروی مخصوص در مقطع بعد از پرش کاهش یافته و عمق ثانویه پرش کاهش می‌یابد.

$$F_2 = F_1 - \frac{W \sin\theta}{\gamma}$$

**۱۰۴- (۲)**

در حل این سؤال کافیست رابطه انرژی (برنولی) را بین نقاط (۰) و (۱) و نیز نقاط (۰) و (۲) بنویسیم. لازم به ذکر است جریان در مقطع (۱) دارای وضعیت بحرانی می‌باشد.




برنولی بین (۰) و (۱): $E_0 = E_1 = E_{min} = \frac{3}{2} y_{c_1} \Rightarrow 0/6 = \frac{3}{2} y_{c_1} \;,\; y_{c_1} = (\frac{q_1^2}{g})^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow (\frac{q_1^2}{g})^{\frac{1}{3}} = 0/4 \Rightarrow q_1^2 = 64 \times 10^{-2} \Rightarrow q_1 = 0/8 \frac{m^3/s}{m}$$

برنولی بین (۰) و (۲): $E_0 = E_2 = y_2 + \frac{q_2^2}{2g y_2^2} \Rightarrow 1/35 = 0/1 + \frac{q_2^2}{2 \times 10 \times 0/1^2} \Rightarrow q_2^2 = 0/25 \Rightarrow q_2 = 0/5 \frac{m^3/s}{m}$

$$q_{\text{کل}} = q_1 + q_2 = 0/8 + 0/5 = 1/3 \frac{m^3/s}{m}$$

**۱۰۵- (۱)**

جریان در محل پایه پل، باید وضعیت بحرانی داشته باشد. با صرفنظر کردن از تلفات انرژی، داریم:

$$\begin{cases} E_۱ = E_۲ \\ V_۱ = \dfrac{Q}{A_۱} = \dfrac{۳۵/۵}{۳/۵۵\times ۵} = ۲\ m/s \ \Rightarrow\ E_۱ = y_۱ + \dfrac{V_۱^۲}{۲g} = ۳/۵۵ + \dfrac{۲^۲}{۲\times ۱۰} = ۳/۷۵\ m \\ E_۲ = E_{min_۲} = \dfrac{۳}{۲} y_{c_۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \frac{۳}{۲} y_{c_۲} = ۳/۷۵\ \Rightarrow\ y_{c_۲} = ۲/۵\ m$$

$$V_۲ = V_{c_۲} = \sqrt{g\, y_{c_۲}} = \sqrt{۱۰\times ۲/۵} = ۵\ m/s \quad \Rightarrow\ Q_۲ = V_۲\, y_۲\, b_۲ = ۵\times ۲/۵\times (b - ۰/۶)$$

$$Q_۱ = Q_۲\ \Rightarrow\ ۳۵/۵ = ۱۲/۵\times (b - ۰/۶)\ \Rightarrow\ b = ۳/۴۴\ m$$

**۱۰۶- (۳)**

با توجه به رابطهٔ عمق بحرانی در کانال مستطیلی، داریم:

$$y_c = \left(\frac{q^۲}{g}\right)^{\frac{۱}{۳}}\ \Rightarrow\ q = \sqrt{g y_c^۳} = y_c\sqrt{g y_c}$$

از طرفی با استفاده از رابطهٔ انرژی مخصوص می‌نویسیم:

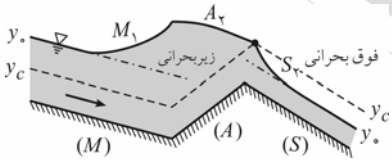
$$\begin{cases} E = y + \dfrac{V^۲}{۲g}\ \Rightarrow\ E_c = y_c + \dfrac{V_c^۲}{۲g} \\ E_c = \dfrac{۳}{۲} y_c \\ \dfrac{V_c^۲}{۲g} = h \end{cases} \quad \Rightarrow\ \frac{۳}{۲} y_c = y_c + h\ \Rightarrow\ y_c = ۲h$$

حال با جایگذاری $y_c = ۲h$ در رابطهٔ $q$، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} q = y_c\sqrt{g y_c} \\ y_c = ۲h \end{cases} \quad \Rightarrow\ q = ۲h\sqrt{۲gh}$$

**۱۰۷- (۱)**

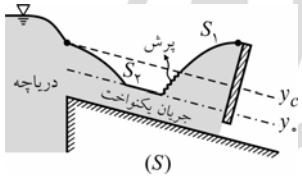
پس از رسم خطوط مربوط به عمق‌های $y_۰$ و $y_c$، پروفیل‌های ممکن این جریان به‌صورت زیر می‌باشند:




**توجه:** چون یک بار در طول جریان تغییر از حالت زیربحرانی به حالت فوق‌بحرانی اتفاق افتاده، یک نقطهٔ کنترل در محل تقاطع شیب‌های $S$ و $A$ باید داشته باشیم.

**۱۰۸- (۴)**

پروفیل‌های ممکن برای سطح آب به‌صورت روبه‌رو می‌باشند:



**۱۰۹- (۲)**

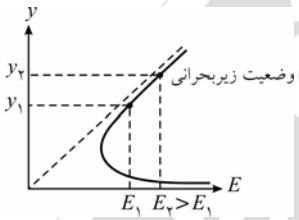
ابتدا عمق بحرانی جریان را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y_c = (\frac{q^۲}{g})^{\frac{۱}{۳}} \\ q = \frac{Q}{b} = \frac{۶}{۴} = ۱/۵ \frac{m^۳/s}{m} \end{cases} \Rightarrow y_c = (\frac{۱/۵^۲}{۱۰})^{\frac{۱}{۳}}$$

واضح است که $y_c < ۱$ می‌باشد، بنابراین با توجه به عمق‌های داده شده، می‌توان نوشت: $y_c < y_\circ < y$

لذا در این مقطع پروفیل $M_۱$ خواهیم داشت.

**۱۱۰- (۳)**




در جریان آب در یک کانال، در اثر وجود افت‌های موجود، انرژی کل کاهش می‌یابد. همچنین می‌دانیم که در پروفیل $M_۱$، جریان زیر بحرانی است و عمق نیز افزایش می‌یابد. پس با توجه به منحنی انرژی مخصوص می‌توان ملاحظه کرد که انرژی مخصوص در جهت حرکت آب، افزایش می‌یابد.

**۱۱۱- (۳)**

معادلات جریان یکنواخت در هر مقطع از جریان متغیر تدریجی نیز قابل استفاده می‌باشند. با استفاده از معادلهٔ مانینگ برای کانال مستطیلی و عریض در مقطع موردنظر، خواهیم داشت:

$$q = \frac{۱}{n} y^{\frac{۵}{۳}} S_f^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow S_f = \frac{(nq)^۲}{y^{\frac{۱۰}{۳}}} = \frac{(۰/۰۲ \times ۲/۵)^۲}{۲^{\frac{۱۰}{۳}}} = \frac{۲۵ \times ۱۰^{-۴}}{۸ \times \sqrt[۳]{۲}} = ۲/۵ \times ۱۰^{-۴}$$

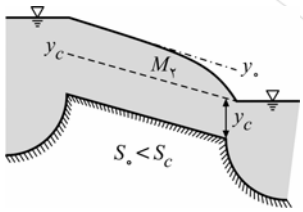
بنابراین شیب خط انرژی در این مقطع برابر $۲/۵ \times ۱۰^{-۴}$ می‌باشد.

**۱۱۲- (۴)**

در جریان مایع روی مسیر محدب (تقعر رو به پایین) فشار موجود کمتر از فشار هیدرواستاتیک است. در این سؤال، تراز شمارهٔ (۳) معرف فشار هیدرواستاتیک است و قطعاً ترازی که معرف فشار موجود است بایستی از تراز شماره (۳) پایین‌تر باشد. پس تراز شماره (۴) پاسخ این تست خواهد بود.

**توجه:** اگر از نقطهٔ مورد نظر در امتداد عمود بر جریان خطی را رسم کنیم، محل تقاطع این خط با سطح آزاد، تراز فشار هیدرواستاتیک را نشان می‌دهد.

**۱۱۳- (۲)**




چون شیب کانال ملایم است، آب با عمقی بیشتر از عمق بحرانی ($y_c$) وارد کانال می‌شود، لذا پروفیل $M_۲$ روی کانال شکل خواهد گرفت. این پروفیل حالت زیربحرانی دارد، بنابراین نقطهٔ کنترل آن در پایین‌دست جریان خواهد بود که همان عمق بحرانی می‌باشد.

$$y_c = (\frac{q^۲}{g})^{\frac{۱}{۳}} = (\frac{(\sqrt{۱۷/۲۸})^۲}{۱۰})^{\frac{۱}{۳}} = ۱/۲\, m$$

بنابراین اگر عمق جریان در پایین‌دست، از $y_c$ بیشتر نشود، دبی ورودی کانال ثابت باقی می‌ماند.

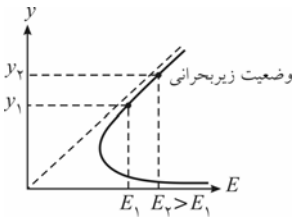
**توجه:** به هنگام ارتباط دو دریاچه با شیب ملایم (عمق آب بالادست ثابت) می‌توان به نکات زیر اشاره کرد:

۱- اگر عمق آب پایین‌دست، بیشتر از عمق نرمال کانال باشد، با کاهش عمق پایین‌دست دبی افزایش می‌یابد. همچنین منحنی $M_۱$ روی کانال تشکیل می‌شود.

۲- اگر عمق آب پایین‌دست، کمتر از عمق نرمال و بیشتر از عمق بحرانی باشد، نیمرخ $M_۲$ تشکیل می‌شود و در صورتی که کانال طولانی باشد، با کاهش عمق پایین‌دست، دبی جریان تغییر نمی‌کند. اما اگر کانال کوتاه باشد، با کاهش عمق پایین‌دست، دبی جریان افزایش می‌یابد.

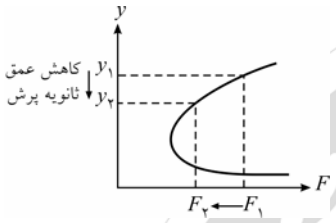
۳- اگر عمق آب پایین‌دست، کمتر از عمق بحرانی باشد، نیمرخ $M_۲$ تشکیل شده و دبی جریان نیز با کاهش عمق پایین‌دست، تغییر نمی‌کند.

**۱۱۴- (۲)**




در شیب ملایم $M$، عمق نرمال بیشتر از عمق بحرانی می‌باشد. بنابراین در حالت عادی، جریان با عمق نرمال و با وضعیت زیربحرانی در کانال حرکت می‌کند. با کاهش شیب، عمق جریان افزایش می‌یابد. لذا با توجه به منحنی‌های $E-y$، با افزایش عمق، انرژی مخصوص جریان نیز افزایش می‌یابد.

**۱۱۵- (۳)**

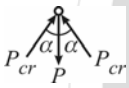



به علت وجود پله (مانند یک مانع) نیرویی از طرف پله به سیال اعمال می‌شود، در نتیجه نیروی مخصوص در مقطع بعد از پرش نسبت به حالتی که پله وجود ندارد، کاهش می‌یابد. لذا با توجه به نمودار $F-y$، عمق ثانویه پرش کاهش می‌یابد.

## سازه‌های فولادی و بتنی

**۱۱۶- (۳)**

برای محاسبهٔ حداکثر بار مجاز $P$، کافی است نیروی محوری در اعضاء فشاری قاب را برابر بار کمانشی ($P_{cr}$) قرار داده و با بررسی معادلات تعادل مقدار $P$ را پیدا کنیم.




$$\cos\alpha = \frac{۹}{۱۰}$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow P = ۲P_{cr}\cos\alpha = ۲P_{cr}\times\frac{۹}{۱۰} = ۱/۸\,P_{cr}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^۲ EI}{L^۲}\times\frac{۱}{F.S.}\ ,\ L = ۱۰\,m\ ,\ \pi^۲ = ۱۰\ ,\ I = ۲۵۰۰\,cm^۴$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{۱۰\times۲\times۱۰^۶\times۲۵۰۰}{(۱۰۰۰)^۲}\times\frac{۱}{۲}\times۱۰^{-۳} = ۲۵\,ton \Rightarrow P = ۱/۸\,P_{cr} = ۱/۸\times۲۵ = ۴۵\,ton$$

**تذکر:** با توجه به تقارن قاب و تقارن بارگذاری، نیروی محوری دو عضو با یکدیگر برابر بوده و دو عضو با یکدیگر کمانش می‌کنند.

**۱۱۷- (۳)**

برای محاسبهٔ لنگر تشدید یافته، ابتدا ضریب تشدید لنگر را محاسبه می‌کنیم. با توجه به اینکه در تیر- ستون موردنظر خمش حول محور قوی رخ می‌دهد، داریم:

$$M' = A_m . M \quad , \quad A_m = \frac{C_m}{۱-\frac{f_a}{F'_e}} \qquad C_m = ۰/۶ - ۰/۴\left(\frac{M_۱}{M_۲}\right) = ۰/۶ - ۰/۴\left(-\frac{۷/۵}{۱۰}\right) = ۰/۹$$

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{۶۰\times۱۰^۳}{۱۰۰} = ۶۰۰\ kg/cm^۲ \quad , \quad F'_e = \frac{۱۲}{۲۳}\frac{\pi^۲ E}{(\frac{KL}{r})^۲} = \frac{۱۲}{۲۳}\times\frac{۱۰\times۲/۳\times۱۰^۶}{(\frac{۱\times۸۰۰}{۸})^۲} = ۱۲۰۰$$

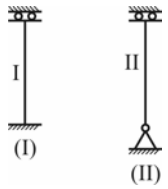
$$A_m = \frac{۰/۹}{۱-\frac{۶۰۰}{۱۲۰۰}} = ۱/۸ \Rightarrow M' = ۱/۸\times۱۰ = ۱۸\,ton.m$$

**۱۱۸- (۳)**

ابتدا باید توجه کرد که بال فوقانی مقطع به دلیل تقویت با ناودانی، احتمال کمانش کمتری نسبت به بال پایینی دارد، بنابراین قسمت‌هایی از تیر را بررسی می‌کنیم که در آن بال پایینی در فشار بوده و احتمال کمانش دارد. با توجه به شکل صورت سؤال، تیر در نواحی (۲) و (۳) دارای لنگر خمشی منفی بوده و بال پایینی در فشار قرار می‌گیرد. در مقایسهٔ نواحی (۲) و (۳) می‌توان گفت چون در ناحیهٔ (۳) فاصلهٔ تکیه‌گاه‌های جانبی بیشتر از ناحیه (۲) می‌باشد، پس احتمال کمانش پیچشی جانبی در این ناحیه بیشتر است.

**تذکر:** پاسخ ارائه شده، منظور طراح از طرح سوال فوق است. درعمل ناحیهٔ (۴) و ناحیهٔ (۱) نیز باید کنترل شوند. زیرا هر چندکه بال فشاری در آنها قوی‌تر است، اما فاصلهٔ تکیه‌گاه‌های جانبی نیز در آنها بیشتر است.

**۱۱۹- (۱)**




به منظور بررسی ضریب طول مؤثر، ابتدا باید توجه شود که این قاب مهار جانبی نشده می‌باشد و ضریب طول مؤثر برای ستون‌های آن بزرگتر یا مساوی یک است.

با توجه به صلب بودن عضو فوقانی، ستون‌ها به صورت مقابل مدل خواهند شد و با توجه به ضریب طول مؤثر ستون‌های مهار جانبی نشده، ستون $(I)$ دارای ضریب طول مؤثر $K=۱$ و ستون $(II)$ دارای ضریب طول مؤثر $K=۲$ می‌باشد.

**۱۲۰- (۴)**

تنش‌های پسماند، مقاومت کششی عضو را تغییر نداده و تنها رفتار غیرخطی آن را سرعت می‌بخشند.

**۱۲۱- (۲)**

در تیر $I$ شکل، از نقش بال‌ها در تحمل نیروی برشی صرف‌نظر می‌شود و سهم بال‌ها در تحمل لنگر خمشی عبارت است از:

$$M_f = \frac{I_f}{I_w + I_f} M$$

$$I_f = ۲A_f\left(\frac{h_w}{۲}+\frac{t_f}{۲}\right)^۲ = ۲\times(۱۰\times۱)\times(۱۰/۵)^۲ = ۲۲۰۵\,cm^۴ \;,\; I_w = \frac{t_w h_w^۳}{۱۲} = \frac{۱\times۲۰^۳}{۱۲} = ۶۶۶/۶\,cm^۴$$

$$M_f = \frac{I_f}{I_w + I_f} M \simeq ۰/۷۶\,M$$

**۱۲۲- (۲)**

با توجه به روند زیر، داریم:

$$F_b = \frac{M\times\frac{d}{۲}}{I} \Rightarrow M_{max} = \frac{wL^۲}{۸} = F_b\frac{۲I}{d}$$

$$\Delta_{max} = \frac{۵wL^۴}{۳۸۴EI} = \frac{۵}{۴۸}\times\left(\frac{wL^۲}{۸}\right)\times\frac{L^۲}{EI} = \frac{۵}{۴۸}(M_{max})\times\frac{L^۲}{EI} = \frac{۵}{۴۸}\left(F_b\frac{۲I}{d}\right)\times\frac{L^۲}{EI} \Rightarrow \frac{\Delta_{max}}{L} = \frac{۵}{۲۴}\frac{F_b}{E}\frac{L}{d}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\Delta_{max}}{L} = \dfrac{۵}{۲۴}\dfrac{F_b}{E}\dfrac{L}{d}\\[2mm] \dfrac{L}{d}\le ۳۰\end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta_{max}}{L} \le \frac{۵\times۰/۶\times۲۴۰۰\times۳۰}{۲۴\times۲\times۱۰^۶} = \frac{۹}{۲۰۰۰}$$

با توجه به این که نسبت $\frac{L}{d}\le ۳۰$ می‌باشد، نسبت $\frac{\Delta_{max}}{L}$ باید از $\frac{۹}{۲۰۰۰}$ کوچک‌تر باشد.

**۱۲۳- (۴)**

در نگاه اول، لنگر حداکثر در هر ۴ تیر برابر بوده و برابر $\frac{wL^۲}{۸}$ است (چرا؟). در تیرهای (الف) و (ب)، سازه معین بوده و بازتوزیع لنگر رخ نمی‌دهد و در تیرهای (ج) و (د) که سازه نامعین می‌باشد، امکان بازتوزیع لنگر وجود دارد. در مقایسه تیر (ج) و (د)، آن که ضریب شکل مقطع برای آن بیشتر است، عملکرد بهتری داشته و بار گستردهٔ یکنواخت بیشتری را تا لحظه خرابی تحمل می‌کند. با توجه به بیشتر بودن ضریب شکل مقطع مستطیل نسبت به $I$ شکل، ظرفیت مقطع مستطیل تا لحظهٔ نهایی بیشتر است.

**۱۲۴- (؟)**

شعاع ژیراسیون ستون دوبل حول محورهای $x$ و $y$ را به ترتیب $r'_x$ و $r'_y$ می‌نامیم:

$$r'_x = \sqrt{\frac{I'_x}{۲A}} = \sqrt{\frac{۲I_x}{۲A}} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = r_x = ۷/۴\,cm$$

$$I'_y = ۲\left[I_y + A\left(\frac{d}{۲}\right)^۲\right] = ۲\left[۱۰۱+۲۳/۹\times\left(\frac{۲۵}{۲}\right)^۲\right] = ۷۶۷۰/۸\,cm^۴$$

$$r'_y = \sqrt{\frac{I'_y}{۲A}} = \sqrt{\frac{۷۶۷۰/۸}{۲\times۲۳/۹}} = ۱۲/۷\,cm$$

حال ضریب لاغری ستون دوبل حول محورهای $x$ و $y$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda_x = \frac{K_x L}{r'_x} = \frac{۱\times۱۰۰۰}{۷/۴} = ۱۳۵/۱ \ , \ \lambda_y = \frac{K_y L}{r'_y} = \frac{۱\times۱۰۰۰}{۱۲/۷} = ۷۸/۷$$

با توجه به اینکه $\lambda_x$ از $\lambda_y$ بزرگتر است کمانش حول محور $x$ ها تعیین‌کننده است و با توجه بـه اینکـه $\lambda_x$ از $C_c = ۱۳۰$ بزرگتـر اسـت نتیجـه می‌شود کمانش ستون از نوع ارتجاعی است و داریم:

$$P_{cr} = \frac{\pi^۲ E I'_x}{L^۲} = \frac{\pi^۲ E \times ۲I_x}{L^۲} = \frac{\pi^۲ \times ۲/۱\times۱۰^۶ \times ۲\times۱۳۲۰}{۱۰۰۰^۲}\times۱۰^{-۳} = ۵۴/۷\ ton$$

$$P_{all} = \frac{P_{cr}}{F.S.} = \frac{۱۲}{۲۳}\times۵۴/۷ = ۲۸/۵\ ton < ۴۰\ ton \quad (Not\ good)$$

کنترل ضریب لاغری تک نیمرخ ستون در فاصله بین بست‌ها:

$$\lambda = \frac{L_۱}{r_۱} = \frac{۸۰}{۲/۰۵} = ۳۹ < ۴۰ \ \text{و} \ \frac{۳}{۴}\times۷۸/۷ = ۵۹ \quad (OK)$$

کنترل بست‌های افقی:

$$V = ۰/۰۲P = ۰/۰۲\times۴۰۰۰۰ = ۸۰۰\ kg \ \Rightarrow V_b = \frac{VL}{۲b} = \frac{۸۰۰\times۸۰}{۲\times۲۵} = ۱۲۸۰$$

$$M = \frac{VL}{۴} = \frac{۸۰۰\times۸۰}{۴} = ۱۶۰۰۰\ kg.cm$$

$$f_b = \frac{M}{S} = \frac{۱۶۰۰۰}{\frac{۰/۸\times۸^۲}{۶}} = ۱۸۷۵\ kg/cm^۲ > F_b = ۰/۶F_y = ۱۴۴۰\ kg/cm^۲ \quad (Not\ good)$$

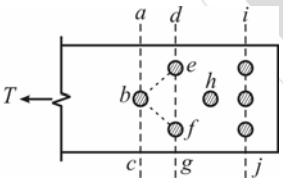
$$f_v = ۱/۵\frac{V_b}{A} = ۱/۵\times\frac{۱۲۸۰}{۰/۸\times۸} = ۳۰۰\ kg/cm^۲ < F_V = ۰/۴F_y = ۹۶۰\ kg/cm^۲ \quad (OK)$$

با توجه به محاسبات فوق نتیجه می‌شود که خرابی‌های محتمل برای این ستون عبارتند از کمانش کلی حول محور $x$ و همچنین خرابی بست‌ها در خمش.

**تذکر:** برای تعیین وضعیت کمانش، باید $\lambda_x$ و $\lambda'_y$ ( $\lambda_y$ اصلاح شده) را با یکدیگر مقایسه کنیم. در این تست به علت فاصلهٔ زیـاد $\lambda_x$ و $\lambda_y$ از این کار صرف‌نظر شده است (چرا؟).

**۱۲۵- (۳)**

ابتدا با کنترل بر روی سطح مقطع کل مقدار $T_۱$ را محاسبه می‌کنیم:




$$A_g = bt = (۴۰+۶۰+۶۰+۴۰)\times۱۵ = ۳۰۰۰\ mm^۲ = ۳۰\ cm^۲$$

$$\frac{T_۱}{A_g} \le ۰/۶F_y \ \Rightarrow$$

$$T_۱ = ۰/۶F_y A_g = ۰/۶\times۳۶۰۰\times۳۰ = ۶۴۸۰۰\ kg = ۶۴/۸\ ton$$

سپس با بررسی مسیرهای بحرانی و کنترل سطح‌مقطع خالص، مقدار $T_۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{مسیر } abc: A_n = (۲۰-۲/۵)t = ۱۷/۵t \\ \text{مسیر } debc: A_n = \left(۲۰-۲\times۲/۵+\frac{۵^۲}{۴\times۶}\right)t = ۱۶t \\ \text{مسیر } debfg: A_n = \left(۲۰-۳\times۲/۵+۲\times\frac{۵^۲}{۴\times۶}\right)t = ۱۴/۶t \ \Rightarrow (A_n)_{min} = ۱۴/۶t = ۲۱/۹\ cm^۲ \\ \text{مسیر } defg: A_n = \frac{۷}{۶}(۲۰-۲\times۲/۵)t = ۱۷/۵t \\ \text{مسیر } ij: A_n = \frac{۷}{۳}(۲۰-۳\times۲/۵)t = ۲۹/۲t \end{cases}$$

با فرض $U = ۱$ در مقطع $A_e = A_n$ بوده و داریم:

$$\frac{T_۲}{A_e} \le ۰/۵F_u \ \Rightarrow T_۲ = ۰/۵F_u A_e = ۰/۵\times۵۲۰۰\times۲۱/۹ = ۵۶۹۴۰\ kg \simeq ۵۷\ ton$$

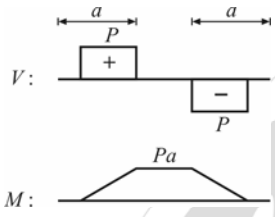
در نهایت $min\{T_۱, T_۲\}$ را به عنوان مقاومت گسیختگی مجاز ورق انتخاب می‌کنیم:

$$T = min\{T_۱, T_۲\} = ۵۷\ ton$$

**۱۲۶- (۱)**

مقاومت برشی تیر از فرمول دقیق زیر محاسبه می‌شود:

$$V_r = \left(0.19\phi_c \sqrt{f_c} + 12\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right) b_w d + \phi_s A_{sv} f_{yv} \frac{d}{s}$$

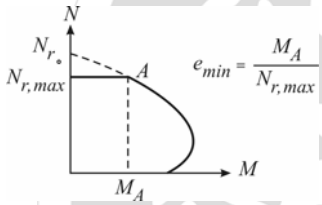



از آنجا که ابعاد مقطع و مساحت آرماتورها ثابت است، تنها عوامل متغیر در رابطه بالا $V_u$ و $M_u$ بوده که ناشی از بارگذاری می‌باشند.

با توجه به نمودار برش و خمش تیر، حداکثر نیروی برشی برابر $P$ در فاصله بین تکیه‌گاه تا بارهای متمرکز و حداکثر لنگر خمشی در بین بارها و به مقدار $Pa$ خواهد بود.

با توجه به ثابت بودن مقدار $P$ تنها عامل مؤثر در فرمول $V_r$ مقدار $M_u$ است. هرچه $a$ یا $a/d$ کوچک‌تر باشد، $M_u$ کمتر شده و $V_r$ افزایش می‌یابد. به عبارتی هر چه نسبت $\frac{a}{d}$ بیشتر شود، تیر عمیق‌تر محسوب شده و مقاومت برشی بیشتری دارد.

**۱۲۷- (۲)**




در نمودارهای اثر متقابل بار محوری و لنگر خمشی، با ترسیم خطی افقی مانند شکل مقابل حداکثر نیروی محوری نهایی روی ستون مشخص می‌شود. این خط نشان‌دهنده محدودیت خروج از مرکزیت حداقل به میزان $e_{min}$ برای ستون است.

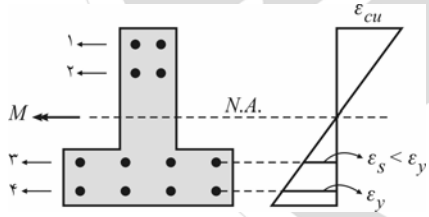
در این‌صورت اگر لنگر یک ستون کمتر از $M_A$ باشد، باید با در نظر گرفتن نیروی محوری $N_{r,max}$ و خروج از مرکزیت $e_{min}$ برای ستون، لنگر خمشی ستون را $M_A$ فرض کرد.

**۱۲۸- (۳)**

می‌توان نشان داد که در این حالت، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{A_{s_2}}{A_{s_1}} = \frac{0.003 + \varepsilon_{s_1}}{0.003 + \varepsilon_{s_2}} = \frac{0.003 + 0.002}{0.003 + 3 \times 0.002} = \frac{5}{9} = 0.56$$

**۱۲۹- (۴)**

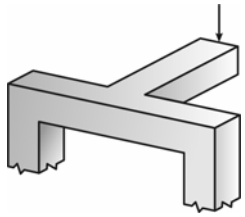



در حالت نهایی بالانس یک مقطع خمشی، در یک زمان یکسان بتن به کرنش نهایی خود ($\varepsilon_{cu}$) و دورترین فولادهای کششی به کرنش جاری‌شدن ($\varepsilon_y$) می‌رسند.

در این وضعیت فولادهای ردیف ۳ هنوز جاری نشده‌اند. ضمن اینکه فولادهای فشاری می‌توانند جاری شده و یا نشده باشند و شرطی روی آن‌ها در حالت بالانس وجود ندارد.

**۱۳۰- (۲)**

به‌دلیل اینکه این سازه در مقابل پیچش معین است، لنگرهای پیچشی از نوع تعادلی محسوب می‌شوند یعنی مقدار لنگر پیچشی ایجاد شده در عضو دوم با توجه به شرایط استاتیکی مسئله محاسبه می‌شود.



**۱۳۱- (۴)**

در تیرهای سراسری، باگذشتن زمان خزش رخ داده و به نوعی در تیر یک باز توزیع لنگر رخ می‌دهد. با این اتفاق ممان مثبت افزایش یافته و لنگر منفی تکیه‌گاه کاهش می‌یابد.

**۱۳۲- (۴)**

برای اینکه هر ترک مورب حداقل توسط یک خاموت قطع شود تا از ظرفیت آن برای مقاومت در برابر برش استفاده گردد، محدودیت حداکثر فاصله در مورد خاموت‌ها اعمال می‌شود.

**۱۳۳- (۲)**

منظور از مقاومت برشی تمام عوامل به جز آرماتور برشی، همان $V_c$ است، زیرا در حقیقت مجموع $V_{ay}$، $V_d$ و $V_{cz}$ است. در حالت اول داریم:

$$V_c = ۰/۵V_{s_۱}$$

$$V_{r_۱} = V_{s_۱} + V_c = V_{s_۱} + ۰/۵V_{s_۱} = ۱/۵V_{s_۱}$$

در حالت دوم با توجه به فرمول $V_s = \phi_s A_{sv} f_{yv} \frac{d}{S}$ با نصف شدن فاصله آرماتورهای برشی ($S$)، مقاومت آنها دو برابر می‌شود.

$$V_{r_۲} = V_{s_۲} + V_c = ۲V_{s_۱} + ۰/۵V_{s_۱} = ۲/۵V_{s_۱}$$

$$\frac{V_{r_۲}}{V_{r_۱}} = \frac{۲/۵V_{s_۱}}{۱/۵V_{s_۱}} = ۱/۷$$

دقت شود که با تغییر $S$، $V_c$ ثابت مانده و در حالت دوم نیز $V_c$ برابر $۰/۵V_{s_۱}$ است.

**۱۳۴- (۲)**

از آنجا که فاصله میلگرد از پایین مقطع کمتر از سمت چپ و راست مقطع است، انرژی لازم برای شکست مقطع از پایین میلگرد کمتر خواهد بود. بنابراین مکانیزم شکست در گزینهٔ ۲ محتمل‌تر می‌باشد.

**۱۳۵- (۲)**

افزایش تنش تسلیم باعث افزایش طول مهاری مورد نیاز می‌شود، زیرا در طول مهاری باید کل ظرفیت کششی میلگرد که برابر $A_s f_y$ است، توسط تنش پیوستگی انتقال یابد.

## راهسازی و روسازی راه

**۱۳۶- (۳)**

در مثلث $\overset{\Delta}{AOS}$ داریم:

$$\overset{\Delta}{AOS} : \cos\frac{\Delta}{۲} = \frac{OA}{OS} = \frac{R}{OS} \Rightarrow OS = \frac{R}{\cos\frac{\Delta}{۲}}$$

$$OS = R + E \Rightarrow E = OS - R \Rightarrow E = \frac{R}{\cos\frac{\Delta}{۲}} - R$$

$$\boxed{E = R\left(\frac{۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}} - ۱\right)}$$

**۱۳۷- (۳)**

با استفاده از رابطه فاصله متوسط حمل خواهیم داشت:

$$\text{فاصله متوسط حمل} = \frac{\text{سطح زیر نمودار}}{\text{حجم}}$$

$$\text{سطح زیر نمودار} = (۰/۴ + ۰/۵) \times \frac{۱۰۰۰}{۲} + (۱۰۰۰ + ۱۴۰۰) \times \frac{۰/۱}{۲} + (۰/۴ + ۰/۲) \times \frac{۱۴۰۰}{۲}$$

$$\text{سطح زیر نمودار} = ۴۵۰ + ۱۲۰ + ۴۲۰ = ۹۹۰$$

$$\text{فاصله متوسط محل} = \frac{۹۹۰}{۱۴۰۰} = ۰/۷\ km$$

کل حجم خاکریزی برابر $۱۴۰۰\,m^۳$ و کل حجم خاکبرداری نیز برابر $۱۴۰۰\,m^۳$ است. بنابراین $۱۴۰۰\,m^۳$ خاک از خاکبرداری به خاکریزی حمل می‌شود. پس حجم خاک جابجا شده $۱۴۰۰\,m^۳$ است.

دقت داشته باشید کل حجم عملیات خاکی که برابر مجموع حجم خاکریزی و خاکبرداری است $۱۴۰۰ + ۱۴۰۰ = ۲۸۰۰\,m^۳$ خواهد بود.

**۱۳۸- (۱)**

با توجه به نمودار می‌توان دریافت که تحرک (جابجایی) و دسترسی نسبت عکس دارند، پس هرجا تحرک بیشتر است سطح دسترسی کمترین مقدار را دارد. بنابراین آزادراه کمترین سطح دسترسی را دارا می‌باشد و با کاهش میزان تحرک، دسترسی افزایش می‌یابد، پس راه‌های روستایی یا محلی دارای کمترین میزان تحرک و بیشترین سطح دسترسی می‌باشند.

**۱۳۹- (۲)**

$$\underset{\text{مسافت سرازیری}}{S_۱} = \underset{\text{مسافت سربالایی}}{S_۲} + ۱۰$$

$$۰/۲۷۸Vt + \frac{۰/۰۰۳۹V^۲}{f-g} = ۰/۲۷۸Vt + \frac{۰/۰۰۳۹V^۲}{f+g} + ۱۰$$

با جایگذاری مقادیر خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۰/۳-g} = \frac{۱}{۰/۳+g} + \frac{۱۰}{۰/۰۰۳۹\times ۹۰^۲}$$

با حل معادله درجه دو $۱۰g^۲ + ۶۳/۱۸g - ۰/۹ = ۰$ مقدار $g$ برابر می‌شود با:

$$g = ۱/۴۲\%$$

**۱۴۰- (۱)**

$$KM_{P.V.I} = ۳۴۵ + ۶۰ = ۳۴۵۰۶۰\ m$$

$$K = ۳۱۰$$

$$A = |g_۲ - g_۱| = |-۴-۳| = ۷$$

از رابطهٔ طول قوس قائم خواهیم داشت:

$$L = KA = ۳۱۰\times ۷ = ۲۱۷۰\ m$$

$$KM_{P.V.C} = KM_{P.V.I} - \frac{L}{۲} = ۳۴۵۰۶۰ - \frac{۲۱۷۰}{۲} = ۳۴۳۹۷۵ = ۳۴۳ + ۹۷۵\ m$$

$$Z_{P.V.C} = Z_{P.V.I} - g_۱ \times \frac{L}{۲}$$

$$Z_{P.V.C} = ۲۵۰ - ۰/۰۳ \times \frac{۲۱۷۰}{۲} = ۲۱۷/۴۵\ m$$

**۱۴۱- (۳)**

**روش اول:**

$$\text{نرخ تردد} = \frac{۱}{\text{سر فاصله زمانی}}$$

$$\text{نرخ تردد} = \frac{۱}{۲s} = \frac{۱}{\frac{۲}{۳۶۰۰}} = ۱۸۰۰\ \frac{P.C.}{h}$$

$$\text{چگالی} = \frac{\text{نرخ تردد}}{\text{میانگین سرعت مکانی}}$$

$$\text{چگالی} = \frac{۱۸۰۰}{۹۵} = ۱۸/۹۵ \simeq ۲۰P.C./km/lane \Rightarrow \text{سطح سرویس}: D$$

**روش دوم:**

$$\text{چگالی} = \frac{۱۰۰۰}{\text{سر فاصله زمانی}}$$

سر فاصله زمانی × میانگین سرعت مکانی = سر فاصله مکانی

$$\text{سر فاصله مکانی} = \frac{۹۵}{۳/۶} \times ۲ = ۵۲/۷۸\ m$$

$$\text{چگالی} = \frac{۱۰۰۰}{۵۲/۷۸} = ۱۸/۹۵ \simeq ۲۰P.C./km/lane \Rightarrow \text{سطح سرویس}: D$$

**۱۴۲- (۳)**

طول مسیر اول $= aA + ab + bB$ طول مسیر دوم $= AB$

مقدار صرفه‌جویی ناشی از این اصلاح $= (Aa + ab + bB) - AB$

$$= \left[۲(R-r)\tan\frac{\Delta}{۲} + r\Delta\right] - R\Delta = ۲(R-r)\tan\frac{\Delta}{۲} - (R-r)\Delta = (R-r)\left[۲\tan\frac{\Delta}{۲} - \Delta\right] = ۲(R-r)\left(\tan\frac{\Delta}{۲} - \frac{\Delta}{۲}\right)$$

$$= ۲(۳۲۰)\left[۰/۳۲ - \frac{\frac{\pi}{۱۸۰}(۳۵^\circ ۱۶' ۲۸'')}{۲}\right] = ۶/۴۰ m$$

**۱۴۳- (۴)**

با توجه به نمودار، ابتدا ۵۰۰ متر روی شیب ٪۳ حرکت می‌کنیم و به سرعت $۴۲\ km/h$ می‌رسیم، که معادل حرکت به مسافت ۲۵۰ روی شیب ٪۲ می‌باشد. حال ۱۲۵۰ متر دیگر را روی همین شیب ٪۲ می‌پیماییم و به سرعت $۵۵\ km/h$ می‌رسیم.

برای محاسبه شیب معادل باید دید که کدام شیب پس از پیمودن ۱۷۵۰ متر به همان سرعت ( $۵۵\ km/h$) می‌رسد که با تقاطع مسافت ۱۷۵۰ و سرعت $۵۵\ km/h$ به شیب ٪۲ می‌رسیم.

**۱۴۴- (۴)**

منظور از طول بحرانی یک قوس قائم، حداقل طول لازم برای آن است. ابتدا فاصله دید توقف را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$S = ۰/۲۷۸Vt + \frac{۰/۰۰۳۹V^۲}{f \pm g} \Rightarrow S = ۰/۲۷۸ \times ۹۵ \times ۲/۵ + \frac{۰/۰۰۳۹(۹۵)^۲}{۰/۲۹ - ۰/۰۲} \Rightarrow S = ۱۹۶/۳۹\ m$$

حال طول قوس محدب را برحسب فاصله دید توقف به‌دست می‌آوریم:

$$L = \frac{AS^۲}{۴۲۵/۷۳} = \frac{۴ \times (۱۹۶/۳۹)^۲}{۴۲۵/۷۳} = ۳۶۲/۳\ m$$

دقت داریم شرط $S < L$ نیز برقرار است.

**۱۴۵- (۴)**

$$V = ۱۰۰\ km/h \quad , \quad f = ۰/۲۹ \quad , \quad g = -٪۵ \quad , \quad t = ۲/۵\ s$$

فاصله توقف از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$d = ۰/۲۷۸Vt + \frac{۰/۰۰۳۹V^۲}{f - g}$$

فاصله توقف : $d = ۰/۲۷۸ \times (۱۰۰) \times (۲/۵) + \frac{۰/۰۰۳۹(۱۰۰)^۲}{۰/۲۹ - ۰/۰۵} = ۶۹/۵ + ۱۶۲/۵ = ۲۳۲\ m$

فاصله راننده با مانع در لحظه رویت : $۲۳۲\ m + ۱۰\ m = ۲۴۲\ m$

**۱۴۶- (۲)**

قیر دمیده حاصل از قیر خالص دارای درجه نفوذ کمتر، درجه نرمی بیشتر، شکل‌پذیری کمتر و حساسیت حرارتی کمتر نسبت به قیر خالص اولیه می‌باشد.

**۱۴۷- (۲)**

عدد جلوی قیرهای محلول در هنگام نامگذاری آن‌ها نشان‌دهنده ویکسوزیته (کندروانی) آن‌ها برحسب سانتی استوکس و در دمای $۶۰^\circ C$ است. بنابراین ویسکوزیته یا همان کندروانی این دو قیر یکسان است.

**۱۴۸- (۴)**

از رابطه تجربی مقابل داریم:

$$M_r\ (kg/cm^۲) \simeq ۱۰۰CBR$$

$$M_r\ (kg/cm^۲) \simeq ۱۰۰(۳۰) = ۳۰۰۰$$

**۱۴۹- (۳)**

درجه نفوذ قیرهای خالص در صورتی که آزمایش درجه نفوذ، در درجه حرارتی برابر با درجه نرمی آن‌ها انجام گیرد، برابر ۸۰۰ می‌باشد.

**۱۵۰- (؟)**

ضریب بار هم ارز برابر نسبت صدمه ناشی از عبور یک بار محور مورد نظر به صدمه ناشی از عبور یک بار محور استاندارد است.

$$\left.\begin{array}{l} \text{ضریب بار هم ارز محور جلو} = \dfrac{\text{صدمه ناشی از یک بار عبور محور جلو}}{\text{صدمه ناشی از یک بار عبور محور استاندارد}} \\ \text{ضریب بار هم ارز محور عقب} = \dfrac{\text{صدمه ناشی از یک بار عبور محور عقب}}{\text{صدمه ناشی از یک بار عبور محور استاندارد}} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{صدمه ناشی از یک بار عبور محور عقب}}{\text{صدمه ناشی از یک بار عبور محور جلو}} = \frac{\text{ضریب بار هم ارز محور جلو}}{\text{ضریب بار هم ارز محور عقب}} = \frac{۱/۹۸}{۰/۲۸} = ۷/۰۷$$

که در گزینه‌ها موجود نیست!

**۱۵۱- (۱)**

سیستم روسازی داده شده، یک سیستم سه‌لایه‌ای است که در آن تمام مصالح تراکم‌ناپذیر هستند، زیرا ضریب پواسون تمامی لایه‌ها برابر ۰/۵ است. از طرفی می‌دانیم تغییر شکل نسبی حجمی (کرنش حجمی) از رابطه زیر بدست می‌آید: $\varepsilon_V = \varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_t = \frac{۱-۲\mu}{E}(\sigma_z + \sigma_r + \sigma_t)$ که در آن $\mu$ ضریب پواسون، $E$ ضریب ارتجاعی، $\varepsilon$ها کرنش و $\sigma$ها تنش می‌باشند. با قرار دادن $\mu = ۰/۵$ در این رابطه به این نتیجه می‌رسیم که در تمامی المان‌های یک سیستم تراکم‌ناپذیر چند لایه‌ای تغییر شکل حجمی (کرنش حجمی) برابر صفر خواهد بود. بنابراین تغییر شکل نسبی حجمی نقاط $m$ و $n$ نیز در سیستم داده شده برابر صفر خواهد بود.

**۱۵۲- (۳)**

انجام آزمایش بر روی نمونه اشباع شده خاک از این جهت انجام می‌شود که:

الف) معلوم شود که در صورت اشباع شدن تا چه حد از مقاومت خاک کاسته می‌شود.

ب) معلوم شود که آیا نمونه خاک دارای قابلیت تورم است یا خیر و اگر دارای قابلیت تورم است، مقدار آن چقدر می‌باشد.

**۱۵۳-(۴)**

$$VFA = P_c = \frac{VMA - P_a}{VMA} \times ۱۰۰$$

$$\text{درصد فضای خالی مصالح سنگی پر شده با قیر} = \frac{\text{درصد فضای خالی بتن آسفالتی} - \text{درصد فضای خالی مصالح سنگی}}{\text{درصد فضای خالی مصالح سنگی}}$$

$$۷۰ = \frac{۱۵ - Pa}{۱۵} \times ۱۰۰ \Rightarrow P_a = ۴/۵\%$$

**۱۵۴- (۴)**

از رابطه ضخامت لایه‌ها داریم:

$$D_۱ = \frac{۲/۵ SN_۲}{\alpha_۱} = \frac{۲/۵ \times ۱/۹}{۰/۴} = ۱۱/۸۷۵\, cm \Rightarrow D_۱ = ۱۲ cm \Rightarrow SN_۲^* = \frac{\alpha_۱ D_۱}{۲/۵} = \frac{۰/۴ \times ۱۲}{۲/۵} = ۱/۹۲$$

$$D_۲ = \frac{۲/۵(SN_۳ - SN_۲^*)}{\alpha_۲} = \frac{۲/۵(۳ - ۱/۹۲)}{۰/۱۴} = ۱۹/۲۸\, cm \Rightarrow D_۲ = ۲۰ cm \Rightarrow SN_۳^* = \frac{\alpha_۲ D_۲}{۲/۵} = \frac{۰/۱۴ \times ۲۰}{۲/۵} = ۱/۱۲$$

$$D_۳ = \frac{۲/۵(SN_۴ - SN_۳^* - SN_۲^*)}{\alpha_۳} = \frac{۲/۵(۳/۹ - ۱/۱۲ - ۱/۹۲)}{۰/۰۹} = ۲۳/۸۹\, cm \Rightarrow D_۳ = ۲۵ cm$$

**۱۵۵-(؟)**

$$W_b = ۰/۰۶۴ \times ۱۲۲۶/۴ = ۷۸/۵\, g \qquad G_b = ۱/۰۶$$

$$V_b = \frac{۷۸/۵}{۱/۰۶} = ۷۴/۰۵\, cm^۳$$

$$W_{se} = ۰/۹۳۶ \times ۱۲۲۶/۴ = ۱۱۴۷/۹\, g \qquad G_{se} = ۲/۶۹۳$$

$$V_{se} = \frac{۱۱۴۷/۹}{۲/۶۹۳} = ۴۲۶/۲۵\, cm^۳$$

$$G_{mm} = \frac{A}{A - (E - D)} = \frac{۱۲۲۶/۴}{۱۲۲۶/۴ - ۷۲۱/۹} = ۲/۴۳$$

$$P_a = \frac{V_a}{V_{\text{کل}}} = \frac{۴/۳۹}{۵۰۴/۶۹} \times ۱۰۰ = ۰/۸۷\%$$

حال از رابطه زیر $G_{mb}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$P_a = \frac{G_{mm} - G_{mb}}{G_{mm}} \times ۱۰۰$$

$$۰/۸۷ = \frac{۲/۴۳ - G_{mb}}{۲/۴۳} \times ۱۰۰ \Rightarrow \boxed{G_{mb} = ۲/۴}$$

$$VMA = \frac{V_b + V_a}{V_{\text{کل}}} = \frac{۷۴/۰۵ + ۴۲۶/۲۵}{۵۰۴/۶۹} \times ۱۰۰ \Rightarrow VMA = ۱۵/۵\%$$

$$P_c = \frac{VMA - P_a}{VMA} \times ۱۰۰ = \frac{۱۵/۵ - ۰/۸۶}{۱۵/۵} \times ۱۰۰ = ۹۵\%$$

**۱۵۶- (۱)**

با توجه به حل تست ۱۵۵، $G_{mb} = ۲/۴$ حاصل می‌شود.

**۱۵۷- (۳)**

با توجه به حل تست ۱۵۵، $VMA = ۱۵/۵$ حاصل می‌گردد.

اگر دانشگاه اصلاح شود، مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

## مجموعه پاسخ‌های تشریحی

# آزمون سراسری سال ۱۳۸۱

## کارشناسی ارشد

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سوالات | از شماره | تا شماره |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | زبان تخصصی | ۱۵ | ۱ | ۱۵ |
| ۲ | ریاضیات | ۱۵ | ۱۶ | ۳۰ |
| ۳ | مکانیک جامدات (مقاومت مصالح ـ تحلیل سازه‌ها) | ۳۰ | ۳۱ | ۶۰ |
| ۴ | مکانیک خاک و پی | ۲۵ | ۶۱ | ۸۵ |
| ۵ | مکانیک سیالات و هیدرولیک | ۳۰ | ۸۶ | ۱۱۵ |
| ۶ | طراحی (سازه‌های فولادی و بتنی ـ راهسازی و روسازی راه) | ۴۴ | ۱۱۶ | ۱۵۹ |

"استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد."

## زبان تخصصی

***متن زیر را بخوانید و به ۶ سؤال آن پاسخ دهید:***

### متن ۱

اثر زمین‌لرزه، مرتعش کردن ساختمان‌هاست. ساختمان‌های کوتاه و سخت با فرکانس نسبتاً بالای ۵ تا ۱۰ دور در ثانیه مرتعش می‌شوند و ساختمان‌های بلند با فرکانس پایین مرتعش می‌شوند. زمین‌لرزه نیروهایی را که یک ساختمان تجربه می‌کند، ایجاد می‌کند که به ویژه بستگی به جرم ساختمان و فرکانس ارتعاشی دارد. اگر چه یک ساختمان ۲۰ طبقه ممکن است جرمی دو برابر جرم یک ساختمان ۱۰ طبقه داشته باشد، فرکانس طبیعی آن کوچکتر خواهد بود و بنابراین نیروهای زمین‌لرزه کمتر از دو برابر نیروهای (ایجاد شده) در یک ساختمان ۱۰ طبقه خواهد بود. این موضوع کاملاً با نیروهای حاصل از طوفان‌های بادی متفاوت است که برای یک ساختمان ۲۰ طبقه نسبت به ساختمان ۱۰ طبقه با پهنای یکسان، دوبرابر بزرگ‌تر خواهد شد. به عبارت دیگر برای ساختمان‌های به اندازه کافی بلند، نیروهای باد از نیروهای زمین‌لرزه بزرگ‌تر خواهد بود. این موضوع به این نتیجه جالب منتهی می‌شود که ساختمان‌های خیلی بلندی که برای مقابله با نیروهای باد طراحی شده‌اند همچنین می‌توانند یک زمین‌لرزه بزرگ را تحمل کنند. با اینکه شهر نیویورک الزامات لازم طراحی (برای) زمین‌لرزه را دارد، آسمان‌خراش‌های آن در وقوع یک زمین‌لرزه امن خواهد بود زیرا آن‌ها برای مقابل با نیروهای باد طراحی شده‌اند. با این وجود ساختمان‌های ۱۰ طبقه یا کمتر امن نخواهند بود.

خطرناک‌ترین ساختمان‌ها در طول یک زمین‌لرزه آن‌هایی هستند که از مصالح شکننده مثل آجر یا مصالح سنگی ساخته شده‌اند. این مصالح شکننده در کشش ضعیف هستند و وقتی که طی یک زمین‌لرزه تنش بیش از حد به آن‌ها وارد می‌شود، شکسته می‌شوند و فرو می‌ریزند. چنین مصالح ساختمانی شکننده باعث تلفات جانی زیادی در آگادیر مراکش بودند. در کالیفرنیا این چنین ساختمان‌هایی مجاز نیستند، اما در عوض از تیرها و ستون‌های فولادی یا بتن مسلح ساخته می‌شوند. چنین ساختمان‌هایی که به‌خوبی طراحی شده‌اند گسیخته نمی‌شوند و برای ساکنین خطرناک نخواهد بود، حتی وقتی که در طول یک زمین‌لرزه قوی بیش از حد به آن‌ها نیرو وارد می‌شود.

***بر پایه متن فوق، بهترین جواب را برای ۶ سؤال زیر انتخاب کنید:***

**۱- خطرناک‌ترین سازه‌ها در طی یک زلزله آن‌هایی هستند که از ..... ساخته شده‌اند.**

۱) بتن مسلح ۲) سنگ و بتن ۳) آجر و مصالح سنگی ۴) تیرها و ستون‌های فولادی

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

The most hazardous buildings …… are those constructed of brittle materials such as brick or stone masonry.

**۲- آسمان‌خراش‌های شهر نیویورک در وقوع یک زلزله نسبتاً بزرگ در امان هستند چون آن‌ها ..... .**

۱) برای مقابله با طوفان‌های بادی شکست می‌خورند. ۲) الزامات طراحی (برای) زمین‌لرزه را دارا هستند.

۳) برای مقابله با ارتعاش طراحی شده‌اند. ۴) برای مقابله با نیروهای باد طراحی شده‌اند.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

Its skyscrapers …… because they have been designed to resist wind forces.

**۳- تأثیر زلزله باعث ارتعاش ساختمان‌های بلند با ..... می‌شود.**

۱) فرکانس‌های کمتر از ۵ دور در ثانیه ۲) فرکانس‌های بالا بین ۱۰ تا ۱۵ دور در ثانیه

۳) فرکانس‌های بالا بین ۵ تا ۱۰ دور در ثانیه ۴) فرکانس‌های مشابه با ساختمان‌های کوتاه و سخت

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

Low stiff buildings vibrate with relatively high frequencies of 5 to 10 cycles per second and tall buildings vibrate with <u>low frequencies.</u>

**۴- پاراگراف دوم عمدتاً راجع به ..... بحث می‌کند.**

۱) ساختمان‌های خطرناک دیده شده در آگادیر مراکش

۲) امنیت ساختمان‌ها در رابطه با طرح و مصالح ساختمانی

۳) سرنوشت ساکنان هنگامی که ساختمان طی یک زلزله تحت تنش بیش از حد قرار می‌گیرد.

۴) ساختمان‌های کالیفرنیا که از تیرهای فولادی یا بتن مسلح ساخته شده‌اند.

گزینه ۲ صحیح است.

**۵- بهترین مترادف برای "hazard" ..... است.**

۱) تلفات ۲) ضعیف ۳) خطر ۴) شکننده

گزینه ۳ صحیح است.

**۶- کلمه "toll" از لحاظ معنی به کدام‌یک از گزینه‌های زیر نزدیک‌تر است؟**

۱) هزینه در زندگی ۲) هزینه اندوهبار ۳) بهای سلامت ۴) مرگ کشیش اعظم

گزینه ۲ صحیح است.

## متن ۲

***برج برزیل می‌تواند بلندترین ساختمان جهان شود.***

یک آسمان‌خراش جدید در سائوپولو برزیل می‌تواند هنگامی که - به تصور برنامه‌ریزان، سه سال دیگر - کامل شود بلندترین و بزرگترین ساختمان جهان شود (این ساختمان) توسط مینرو یاماساکی اسوشیتز روچستر هیلز میشیگان طراحی شده است. این سازه هرمی شکل تقریباً ۴۹۴ متر خواهد بود و ۱/۳ میلیون متر مربع فضا را اشغال خواهد کرد. هر ضلع مربع پایهٔ برج ۲۴۴ متر خواهد بود.

هنری جی گوتارد معاون رئیس (شرکت) مینورو یاماساکی می‌گوید: برج ماهاریشی به عنوان تکیه‌گاه عمودی اصلی روی چهار ابرستون مرکب قرار خواهد داشت. ابرستون‌های مربعی شکل، با بدنهٔ فولادی مقاومت بالا که با بتن پر شده‌اند - با بالارفتن ساختمان به طرف مرکز متمایل خواهند شد. در حدود دوسوم ارتفاع ساختمان به سمت بالا این (ستون‌ها) با یک‌سری قاب‌های دیافراگمی و دال‌های کف به همدیگر متصل می‌شوند. اتصالات مشابهی در نقاط دیگر با بالا رفتن ساختمان به‌وجود خواهد آمد. ۴ ستون در رأس به همدیگر خواهند رسید.

گوتارد می‌گوید: جایی که ابرستون‌ها به هم می‌رسند (برج) یک ساختمان یکپارچه خواهد شد. این سیستم بارهای افقی را به ستون‌ها منتقل می‌کند و (به ساختمان) پایداری می‌بخشد، پس آن می‌تواند در برابر بارهای زلزله و باد مقابله کند. گوتارد نمی‌توانست بگوید که ساختمان چند طبقه خواهد شد یا ارتفاع طبقات چقدر خواهد بود.

این سازه، یک هتل، یک مرکز اجتماعات، تشکیلات فروشگاهی، تجارت با تکنولوژی بالا و آپارتمان‌ها و املاکی را در خود جای می‌دهد. گوتارد تخمین می‌زند که ۵۰۰۰۰ نفر در ساختمان زندگی یا کار خواهند کرد و مرکز اجتماعات و تشکیلات تجاری می‌تواند تا ۳۰۰۰۰ بازدیدکننده را در روز جذب کند. یک سیستم بزرگ انتقال مردم، مردم را بین امکانات پارکینگ و بخش حمل و نقل بیرون و داخل ساختمان جابه‌جا می‌کند. همان‌طور که آن‌ها را در داخل ساختمان جابه‌جا می‌کند.

سائوپولو با جمعیتی ۱۸ میلیونی، سومین شهر بزرگ دنیاست. گوتارد می‌گوید: این ساختمان بر باوری دلالت می‌کند که به اندازهٔ کافی سرمایه در برزیل و ایمان در شهر وجود دارد که سازه‌ای را حمایت کند که باعث ارتقای اقتصادی شهر و کشور شود. حدود ۱/۶ میلیارد دلاری که برای سرمایه‌گذاری این تسهیلات چند کاره نیاز خواهد بود توسط گروه برزیلوست سائوپولو و ذخیرهٔ توسعهٔ جهانی ماهاریشی در شهر نیویورک در حال جمع شدن است. مینورو یاماساکی برج مشابهی را طراحی کرده است. برج هند که در جبل پور هند طراحی شده است که با ۶۷۷ متر از برج ماهاریشی بلندتر خواهد بود. ولی جی گوتارد می‌گوید که سازهٔ برزیلی خط سیر سریع‌تری دارد و احتمالا زودتر تکمیل می‌شود.

***بر پایه متن فوق بهترین جواب را برای ۵ سؤال زیر انتخاب کنید:***

**۷- ابرستون‌ها ..... .**

۱) ستون‌های فولادی توخالی با مقاومت بالا هستند که با بتن پر شده‌اند.

۲) ستون‌های بتنی با مقاومت بالا با پوسته‌های فولادی

۳) ستون‌های مربعی بتنی

۴) ستون‌های کج شده

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

The megacolumns – square, <u>high strength steel</u> shells filled with concrete - …

**۸- قاب‌های دیافراگمی افقی برای ..... استفاده می‌شوند.**

۱) محافظت دال‌های کف ۲) کج کردن ستون‌ها به طرف مرکز ساختمان

۳) تأمین صحنهٔ کاری برای (سیستم) جابجایی افراد ۴) بستن ستون‌ها به هم برای پایداری بیشتر در مقابل بارهای افقی

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

About $\frac{2}{3}$ of the way up, <u>they will be tied together</u> with a series of horizontal framing diaphragms …… so the building can withstand wind and seismic loads.

**۹- سیستم جابجایی افراد، ..... .**

۱) عملکردی مشابه به آسانسور خواهد داشت.
۲) مردم را بین پارکینگ و سیستم اصلی حمل و نقل جابه‌جا می‌کند.
۳) مردم را به شکل افقی روی سیستم دیافراگمی افقی جابه‌جا می‌کند.
۴) حرکت مردم را درون سازه کنترل می‌کند و با سیستم حمل و نقل اصلی یک ارتباطی برقرار می‌کند.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

An extensive people mover system will transfer people between parking facilities and mass transit outside and the building's interior, as well as move people around within the structure.

**۱۰- برج ماهاریشی زمانی که تکمیل شود ..... .**

۱) در سومین شهر بزرگ برزیل قرار خواهد گرفت.
۲) حداقل ۸۰۰۰۰ نفر را در روز در خود جای می‌دهد.
۳) بلندترین و بزرگترین ساختمان در جهان خواهد بود.
۴) مقاوم‌ترین ساختمان در برابر زلزله خواهد بود.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

Guthard estimates 50,000 people will live or work in the building and the convention center and buisiness could pull in as many as 30000 visitors a day.

**۱۱- طراحان معتقدند که برج ماهاریشی زودتر از برج هند کامل می‌شود زیرا ..... .**

۱) سرمایه‌گذارانش نسبت به سرمایه‌گذاران برج هندوستان برنامه‌ریزی کرده‌اند تا ساخت و ساز را زودتر جلو ببرند.
۲) روی یک ریل سریع‌السیر واقع شده است که جابه‌جایی مصالح ساختمانی را تسهیل کرده است.
۳) در سائوپولو تقاضای بیشتری برای فضای مسکونی و تجاری وجود دارد تا جبل‌پور.
۴) سیستم جابه‌جا کننده مردم، کارگران ساختمان را زودتر بین محل کار و منزلشان انتقال می‌دهد.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

… The Brazilian structure is "on the fast track" …

***متن ۳ را بخوانید و ۴ سؤال زیر را جواب دهید.***

## متن ۳

***پل عابر پیاده، یادآور میراث دریانوردی شهر:***

بعد از بدنه کشتی، دکل‌ها و بادبان‌های یک کشتی بادبانی، پل عابر پیادهٔ خلیج ترکیه در لاساله، آنتاریو، برای تکریم یک کاشف فرانسوی رابرت لاساله (۸۷-۱۶۴۳) طراحی شد که شهر نام او را گرفته است. پل عابر پیادهٔ کابلی که ۴۰ متر طول و دهانهٔ ۳۰ متری دارد، پروژه‌ای با پشتیبانی جامعه بود که با مصالح اهدایی داوطلبانی از دبیرستان‌ها، دانشکده‌ها و شرکت‌های مهندسی محلی در واکنش به افزایش شمار تصادفات جاده‌ای عابرین پیاده طراحی و ساخته شد. پس از جلسات دوره‌ای چندماهه، در نهایت داوطلبان طرح نهایی را مطرح کردند، سازه‌ای چوبی با عرشه‌ای شامل مقاطعی با پهنای $m$ ۲ و طول ۲/۴ متر و دو دکل ۹/۸ متری با ظرفیت تحمل ۴۵۳۶۰ کیلوگرم. هر یک از دکل‌ها با ۱۸۱۴۰ کیلوگرم بتن نگه‌داشته شده‌اند و حدود ۱ کیلومتر کابل فولادی گالوانیزه را به‌کار برده‌اند. برطبق یک سنت قدیم کشتی‌سازی، داوطلبان زیر هر دکل تعدادی سکه برای خوش‌شانسی قرار می‌دادند. چون در ساخت از جرثقیلی استفاده نشد، طراحان هر نیمه از عرشه را در دو کناره خلیج کوچک موازی ساحل ساختند. سپس نیمه‌ها را روی خلیج چرخاندند و یک دهانه مرکزی ۵ متری با استفاده از سیستم طناب و قرقره در جای خود قرار داده شد.
در این ماه‌های گذشته از تکمیل (پل) در بهار گذشته، پل عابر پیاده ۱۳۰۰۰۰ دلاری (۸۸۰۰۰ دلار آمریکا) به سرعت به یک سازه معروف و مفید در جامعه تبدیل شده است. نرم بکر، مهندسی که نقش مهمی در این طرح و پیشرفت پروژه ایفا کرد اشاره دارد که این (پل) در حال تبدیل شدن به نماد شهر است.

**۱۲- پل عابر پیاده ..... .**

۱) دهانه‌ای ۴۰ متری دارد.
۲) در شهری کوچک در ترکیه قرار دارد.
۳) توسط اعضای محلی جامعه توسعه و ساخته شده است.
۴) از مصالح بازیافته از یک کشتی بادبانی قدیمی ساخته شده است.

گزینه ۳ صحیح است.

**۱۳- دکل‌های پل ..... .**

۱) از بتن ساخته شده‌اند.
۲) تیرهایی که روی دره پل می‌سازند.
۳) گنجایش تحمل حداقل ۱۸۱۴۰ کیلوگرم را دارند.
۴) تیرهای عمودی در انتهای پل هستند.

گزینه ۴ صحیح است.

**۱۴- در ابتدا عرشه ..... .**

۱) در یک مقطع در محل روی پل ساخته شد.
۲) در مراحلی روی ساحل ساخته شد و سپس چرخید.
۳) جداگانه ساخته شده و با استفاده از یک جرثقیل قرار داده شد.
۴) از الوارهای چوبی ۹/۸ متری حاصله از کشتی بادبانی اصلی ساخته شد.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

Because a crane was not used in the construction, the designers built each half of the deck on opposite sides of the creek parallel to the shore, then they rotated the halves over the creek …

**۱۵- کلمه "eponym" به معنی ..... است.**

۱) خلیج ترکیه به فرانسوی
۲) شخصی که مکانی بعد از او نام‌گذاری شده
۳) ثروتمندترین فرد یک جامعه
۴) شخصی که در یک پروژه بیشترین همکاری را دارد.

گزینه ۲ صحیح است.

## ریاضیات

**۱۶- (۲)**

با توجه به رابطه $L\left\{\frac{g(t)}{t}\right\}=\int_s^{+\infty} G(u)\,du$ که در آن $G(s)=L\{g(t)\}$ و با فرض $g(t)=\sin t$ داریم:

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du=Arctan\,u\Big|_s^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-Arctan(s)$$

**۱۷- (۳)**

از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس گرفته، سپس شرایط اولیه را نیز اعمال می‌کنیم:

تبدیل لاپلاس : $L\{x''+x\}=L\{f(t)\}$

$$\Rightarrow\ s^2L\{x\}-sx(0)-x'(0)+L\{x\}=F(s)\ \ ;\ \ F(s)=L\{f(t)\}\ ;\ X(s)=L\{x\}\ \Rightarrow\ (s^2+1)X(s)=F(s)$$

$$\Rightarrow\ X(s)=\frac{1}{s^2+1}\cdot F(s)$$

با توجه به تبدیل لاپلاس کانوولوشن (انتگرال تلفیقی) دو تابع داریم:

$$x(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}F(s)\right\}=\sin t*f(t)=\int_0^t f(u)\sin(t-u)\,du$$

**۱۸- (۴)**

نقطه $x=0$ یک نقطه غیرعادی معادله است؛ با تقسیم طرفین معادله بر ضریب $y''$، داریم:

$$y''-2y'+\frac{4x^2+1}{4x^2}y=0\ \Rightarrow\ P(x)=-2\,,\,Q(x)=\frac{4x^2+1}{4x^2}$$

برای بررسی منظم بودن نقطه $x=0$، داریم:

$$\alpha=\lim_{x\to 0}x\,P(x)=\lim_{x\to 0}-2x=0\ ,\ \ \beta=\lim_{x\to 0}x^2Q(x)=\lim_{x\to 0}x^2\,\frac{4x^2+1}{4x^2}=\frac{1}{4}$$

بنابراین نقطه $x=0$ منظم است و معادله مشخصه عبارت است از:

$$r^2+(\alpha-1)r+\beta=0\ \Rightarrow\ r^2-r+\frac{1}{4}=0\ \Rightarrow\ \left(r-\frac{1}{2}\right)^2=0\ \Rightarrow\ r=\frac{1}{2},\frac{1}{2}$$

لذا، جواب‌های پایه معادله دیفرانسیل عبارتند از:

$$y_1=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\ \ ;\ \ y_2=y_1\ln x+x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$$

**۱۹- (۱)**

با توجه به اینکه تفاوت گزینه‌ها در جواب خصوصی آنها می‌باشد، تنها جواب خصوصی را از روش عملگر معکوس به دست می‌آوریم:

$$y_P = \frac{1}{D^2+1}\{2\sin x\} = 2\frac{1}{D^2+1}\{\sin x\} = 2x\frac{1}{2D}\{\sin x\} = 2x\cdot\frac{1}{2}\int \sin x = -x\cos x$$

**۲۰- (۱)**

ابتدا معادله دیفرانسیل داده شده را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست می‌آوریم:

معادله مشخصه : $m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1, 2 \Rightarrow$ جواب عمومی : $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$\begin{aligned} y(0) = \alpha &\Rightarrow c_1 + c_2 = \alpha \\ y'(0) = 2 &\Rightarrow -c_1 + 2c_2 = 2 \end{aligned} \Rightarrow c_2 = \frac{\alpha+2}{3}$$

اگر $c_2$ مخالف صفر باشد، به‌ازای $t \to +\infty$ جواب معادله واگرا خواهد شد. لذا باید:

$$c_2 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha+2}{3} = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

**۲۱- (۳)**

ژاکوبین این تغییر متغیرها عبارت است از:

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix}} = \frac{1}{4x^2+4y^2} = \frac{1}{4(x^2+y^2)}$$

مرزهای $D'$ : $1 \le u \le 9$ و $4 \le v \le 8$

$$\text{انتگرال} = \iint_{D'} (x^2+y^2)\,|J|\,du\,dv = \int_{v=4}^{8}\int_{u=1}^{9} (x^2+y^2)\frac{1}{4(x^2+y^2)}\,du\,dv$$

$$= \int_4^8\int_1^9 \frac{1}{4}\,du\,dv = \frac{1}{4}\int_4^8 dv \int_1^9 du = \frac{1}{4}(8-4)(9-1) = 8$$

**۲۲- (۲)**

$$f_x = 2x - 4y = 0 \Rightarrow x = 2y \;,\; f_{xx} = 2 \;,\; f_{xy} = -4$$

$$f_y = -4x + 3y^2 + 4 = 0 \Rightarrow 3y^2 = 4x - 4 \;,\; f_{yy} = 6y$$

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \Rightarrow \Delta = 2\times 6y - 16 > 0 \Rightarrow 12y > 16 \Rightarrow y > \frac{4}{3}$$

فقط گزینه (۲) در این نامساوی صدق می‌کند.

**۲۳- (۳)**

بردار $F = (P, Q, R) = (2xy^3 - y^2\cos x, 1 - 2y\sin x + 3x^2y^2, 0)$ دارای کرل برابر صفر بوده و بنابراین پایستار است. لذا انتگرال $\oint_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ از مسیر مستقل بوده و تنها به نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد. به یافتن تابع پتانسیل می‌پردازیم:

$$\text{پتانسیل} = u(x,y) = \int p\,dx + \int Q^*\,dy$$

$Q^*$: جملاتی از $Q$ که فاقد $x$ اند.

$$u(x,y) = x^2y^3 - y^2\sin x + y + c \Rightarrow \text{انتگرال} = u(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},1)} = \frac{\pi^2}{4} - 1 + 1 - 0 = \frac{\pi^2}{4}$$

**۲۴- (۴)**

سطح $S$ بسته است و طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$I = \oiint_{s} \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_{V} div\, F\ dv$$

$$div\, F = 6x^5 + cos^3 x + 2 \Rightarrow I = \iiint_{V} (6x^5 + cos^3 x + 2)\, dv$$

عبارت $6x^5$ تابعی فرد است که با توجه به متقارن بودن ناحیه $V$ نسبت به متغیر $x$، حاصل $\iiint_{V} 6x^5\ dv$ صفر است، بنابراین داریم:

$$I = \iiint_{V} (cos^3 x + 2)\, dv = \iint_{D} \int_{x=-\pi}^{\pi} (cos^3 x + 2)\, dx\, dy\, dz$$

$D$ همان سطح تصویر شده حجم استوانه در صفحه $yz$ می‌باشد.

$$= \iint_{D} \left(sin\, x - \frac{1}{3} sin^3 x + 2x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} dy\, dz = \iint_{D} 4\pi\, dy\, dz = 4\pi\,(\text{مساحت ناحیه } D) = 4\pi(\pi \times 1 \times 2) = 8\pi^2$$

**۲۵- (۱)**

بردار هادی این خط بر گرادیان هر دو سطح در نقطه $(2, -2, 0)$ عمود می‌باشد و در نتیجه از ضرب خارجی آن‌ها به دست می‌آید:

$$\phi_1 = x^2 + y^2 - z - 8 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\phi_1 = \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}, \frac{\partial\phi_1}{\partial y}, \frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right) = (2x\ ,\ 2y\ ,\ -1) \Rightarrow \vec{\nabla}\phi_1(2,-2,0) = (4,-4,-1)$$

$$\phi_2 = x - y^2 + z^2 + 2 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\phi_2 = \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x}, \frac{\partial\phi_2}{\partial y}, \frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right) = (1\ ,\ -2y\ ,\ 2z) \Rightarrow \vec{\nabla}\phi_2(2,-2,0) = (1,4,0)$$

هادی $\vec{\ell} = \vec{\nabla}\phi_1 \times \vec{\nabla}\phi_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - \vec{j} + 20\vec{k}$

بنابراین، معادلات تقارنی خط عبارت است از:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{20}$$

**۲۶- (۲)**

نرمال صفحه خواسته شده، همان گرادیان رویه در نقطه مزبور است.

$$\phi = 4x^2 + y^2 + 2z^2 - 26 = 0$$

$$\nabla\phi = (8x\ ,\ 2y\ ,\ 4z) \Rightarrow \nabla\phi(1,-2,3) = (8\ ,\ -4\ ,\ 12) \Rightarrow \text{معادله صفحه}: 8(x-1) - 4(y+2) + 12(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow 8x - 4y + 12z = 52 \Rightarrow 2x - y + 3z = 13$$

توجه کنید که نقطه داده شده فقط در گزینهٔ ۲ صدق می‌کند، بنابراین بدون حل می‌توانستیم گزینهٔ درست را تشخیص دهیم.

**۲۷- (۴)**

طبق قضیه مشتق انتگرال داریم:

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^2 g(t)\, dt \Rightarrow f'(x) = \overbrace{(x-x)^2}^{\text{صفر}} g(x) + \int_0^x 2(x-t) g(t)\, dt \Rightarrow f''(x) = \int_0^x 2g(t)\, dt$$

بنابراین، نتیجه می‌شود که:

$$f''(1) = \int_0^1 2g(t)\, dt = 2\int_0^1 g(t)\, dt = 2$$

**۲۸- (۲)**

با توجه به بسط مک لورن $e^x$ داریم:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\xrightarrow{\times x} xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} e^x + xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!}$$

$$\xrightarrow{x=1} 2e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \Rightarrow 2e = 1 + 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = 2e - 3$$

**۲۹- (۱)**

انتگرال در $x=\infty$ ناسره است، پس هم ارز تابع تحت انتگرال را در بی‌نهایت به‌دست می‌آوریم:

$$x\to\infty:\ \frac{cx}{2x^2+1}-\frac{1}{x+1}\sim\left(\frac{c}{2}-1\right)\frac{1}{x}$$

می‌دانیم $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ واگرا است، بنابراین برای همگرایی کافی است که $\frac{c}{2}-1=0$، که نتیجه می‌دهد:

$$c=2$$

**۳۰- (۳)**

رابطه مربوط به طول قوس منحنی از نقطه $A$ تا $B$ به صورت زیر است: ($ds$ المان طول قوس)

$$l=\int_A^B ds$$

معادله مسیر به صورت پارامتری بوده و داریم:

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\ dt=\sqrt{(1)^2+(\sinh t)^2+0}\ dt=\sqrt{1+\sinh^2 t}\ dt=\cosh t\,dt$$

$$\Rightarrow\ l=\int_A^B \cosh t\ dt$$

نقطه $A(0\ ,1)$ به‌ازای $t=0$ و نقطه $B(x\ ,\cosh x)$ به‌ازای $t=x$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$l=\int_{t=0}^{t=x}\cosh t\ dt=\sinh t\ \Big|_{t=0}^{t=x}=\sinh x-\sinh 0=\sinh x$$

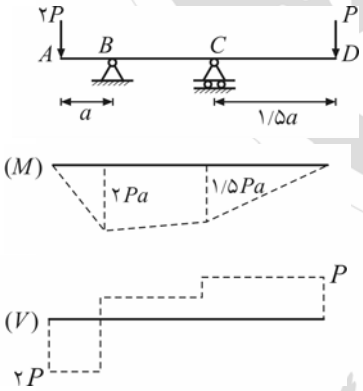
## مقاومت مصالح و تحلیل سازه‌ها

**۳۱- (۴)**

با توجه به ثابت بودن سطح مقطع تیر، نسبت تنش‌های خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_{max_{AB}}}{\sigma_{max_{CD}}}=\frac{M_{max_{AB}}}{M_{max_{CD}}}\ ,\ \frac{\tau_{max_{AB}}}{\tau_{max_{CD}}}=\frac{V_{max_{AB}}}{V_{max_{CD}}}$$

باتوجه به نمودارهای لنگر خمشی و نیروی برشی برای تیر داده شده، می‌توان نوشت:



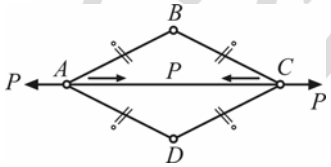

$$\frac{\sigma_{max_{AB}}}{\sigma_{max_{CD}}}=\frac{M_{max_{AB}}}{M_{max_{CD}}}=\frac{2Pa}{1/5\ Pa}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{\tau_{max_{AB}}}{\tau_{max_{CD}}}=\frac{V_{max_{AB}}}{V_{max_{CD}}}=\frac{2P}{P}=2$$

**۳۲- (۴)**

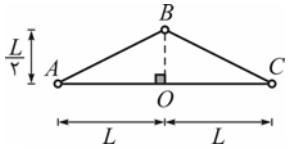
**روش اول:** با توجه به این‌که در گره‌های $B$ و $D$ نیرویی وارد نشده است، با توجه به نکات حل خرپا در درس استاتیک، اعضای $AB$ ، $AD$،$BC$ و $DC$ صفر نیرویی می‌باشند و تغییر طول آنها صفر است.

با توجه به ثابت بودن طول اعضای صفر نیرویی می‌توان نوشت:




$$F_{AC}=+P\ \Rightarrow\ \Delta_{AC}=\frac{2PL}{AE}$$

به دلیل متقارن بودن سازه حول محور قائم میانی، نقطهٔ $O$ ثابت می‌باشد. حال از روش دیفرانسیل‌گیری استفاده کرده، می‌نویسیم:

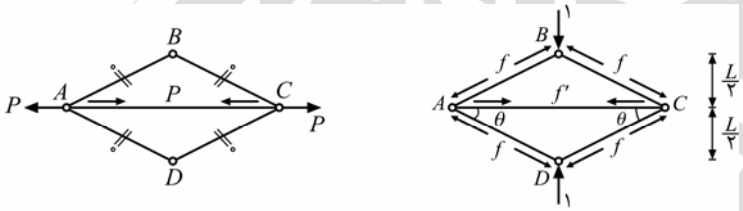



$$OA^{۲}+OB^{۲}=AB^{۲} \Rightarrow ۲\times OA\times \Delta L_{OA}+۲\times OB\times \Delta L_{OB}=۲\times AB\times \Delta L_{AB}\ ,\ \Delta L_{AB}=۰$$

$$\Rightarrow\ \Delta L_{OB}=-\frac{OA}{OB}\Delta L_{OA}=-\frac{L}{\frac{L}{۲}}\times\frac{۱}{۲}\Delta L_{AC}=-۲\times\frac{۱}{۲}\frac{۲PL}{AE}=-\frac{۲PL}{AE}$$

با توجه به مقدار $\Delta L_{OB}$، نقطهٔ $B$ به اندازهٔ $\frac{۲PL}{AE}$ پایین آمده و با توجه به تقارن، نقطهٔ $D$ نیز به اندازهٔ $\frac{۲PL}{AE}$ بالا رفته و نقاط $B$ و $D$ به اندازهٔ $\frac{۴PL}{AE}$ به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

**روش دوم:** از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. سازه تحت اثر بارهای اصلی و واحد به صورت زیر می‌باشد:




(سازه اصلی) (سازه واحد)

در تحلیل سازه واحد داریم:

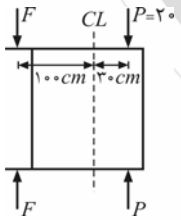
$$\begin{cases} B\ \text{گره}: \sum F_y=۰ \Rightarrow ۲f\times \sin\theta=۱ \\ C\ \text{گره}: \sum F_x=۰ \Rightarrow ۲f\times \cos\theta=f' \end{cases} \Rightarrow\ f'=\cot\theta=\frac{L}{\frac{L}{۲}}=۲$$

بنابراین تغییرفاصله $B$ و $D$ برابر است با:

$$۱\times \Delta_{BD}=\sum\frac{FfL}{EA}=\frac{P\times f'\times ۲L}{EA}=\frac{P\times ۲\times ۲L}{EA}=\frac{۴PL}{EA}$$

**۳۳- (۲)**

در اثر سفت کردن پیچ، نیروی $F$ در آن ایجاد شده و عکس این نیرو مطابق شکل به قطعه مکعب مستطیل اعمال می‌شود. برای آنکه این قطعه تحت تنش‌های یکنواخت قرار بگیرد، باید لنگرهای ناشی از خروج از مرکزیت بارها، یکدیگر را خنثی کنند. به عبارتی دیگر باید داشته باشیم:




$$۲۰\times ۳۰=F\times ۱۰۰\ \Rightarrow\ F=۶\,ton$$

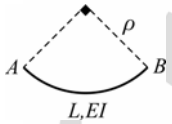
بنابراین تغییرطول لازم برای پیچ برابر است با:

$$\Delta=\frac{FL}{EA}=\frac{۶\times ۱۰^{۳}\times ۳\times ۱۰^{۲}}{۲\times ۱۰^{۶}\times ۵}=۰/۱۸\,cm=۱/۸\,mm$$

گام پیچ ۱ میلیمتر می‌باشد. بنابراین باید پیچ را به اندازه ۱/۸ دور بچرخانیم تا به اندازه ۱/۸ میلیمتر کاهش طول بدهد.

**۳۴- (۳)**

اگر میله به‌صورت یک ربع دایره خم شود و شعاع انحنای آن را $\rho$ بنامیم، خواهیم داشت:




$$AB\ \text{طول کمان}=L=\rho\times\frac{\pi}{۲}\ \Rightarrow\ \rho=\frac{۲L}{\pi}$$

ازطرفی می‌دانیم $\rho=\frac{EI}{M}$. داریم:

$$\frac{EI}{M}=\frac{۲L}{\pi}\ \Rightarrow\ M=\frac{\pi EI}{۲L}$$

**۳۵- (۱)**

برای یافتن تغییرطول قطر $AB$ ، کافیست کرنش در راستای $\theta = ۴۵^\circ$ را بیابیم:

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{(\theta=۴۵^\circ)} = \varepsilon_x \cos^۲\theta + \varepsilon_y \sin^۲\theta - \frac{\gamma_{xy}}{۲}\sin ۲\theta$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = \frac{۴۰۰۰}{۲\times ۱۰^۶} - ۰ = ۲\times ۱۰^{-۳}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = ۰ - \frac{۰/۳\times ۴۰۰۰}{۲\times ۱۰^۶} = -۰/۶\times ۱۰^{-۳}$$

$$\tau_{xy} = ۰ \Rightarrow \gamma_{xy} = ۰$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{AB} = ۲\times ۱۰^{-۳}\times\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ + (-۰/۶\times ۱۰^{-۳})\times\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ - ۰ = ۷\times ۱۰^{-۴}$$

بنابراین تغییرطول قطر $AB$ برابر است با:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{|AB|} \Rightarrow \Delta_{AB} = \varepsilon_{AB}\times|AB| = ۷\times ۱۰^{-۴}\times ۵\sqrt{۲} = ۳۵\sqrt{۲}\times ۱۰^{-۴} cm$$

**۳۶- (۴)**

تنش برشی در $B$ صفر می‌باشد. زیرا در محاسبه $Q$ مربوط به این مقطع (که از المان $EAB$ محاسبه می‌شود)، $\bar{y} = ۰$ است.

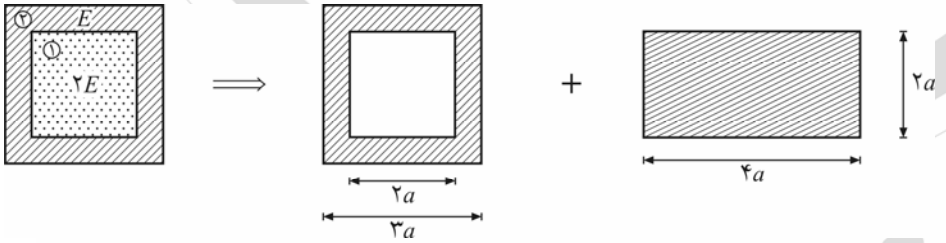
**۳۷- (۱)**

به علت وجود تکیه‌گاه‌های صلب، کرنش طولی استوانه صفر است. داریم:

$$\begin{cases} \varepsilon_l = ۰ \Rightarrow \dfrac{\sigma_l}{E} - \dfrac{\nu\sigma_r}{E} = ۰ \Rightarrow \sigma_l = \nu\sigma_r \\ \sigma_r = \dfrac{Pr}{t} = \dfrac{۳۰\times\frac{۸۰}{۲}}{۲} = ۶۰۰\ kg/cm^۲ \end{cases} \Rightarrow \sigma_l = ۰/۳\times ۶۰۰ = ۱۸۰\ kg/cm^۲$$

**۳۸- (۲)**

مصالح با مدول الاستیسیته $۲E$ را به مصالح با مدول الاستیسیته $E$ تبدیل می‌کنیم. ضریب تبدیل $n = \frac{۲E}{E} = ۲$ می‌باشد.




$$I = \frac{(۳a)^۴ - (۲a)^۴}{۱۲} + \frac{۴a\times(۲a)^۳}{۱۲} = \frac{۹۷a^۴}{۱۲}$$

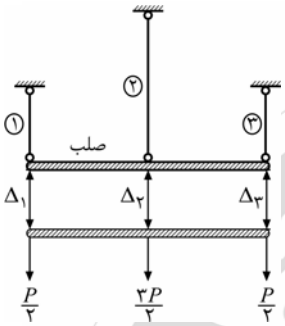
باید تنش خمشی حداکثر در هر دو قسمت از تنش مجاز $\sigma_a$ کمتر باشد:

$$\begin{cases} \sigma_{max_۱} = n\times\dfrac{M\times a}{I} \le \sigma_a \Rightarrow M \le \dfrac{I\sigma_a}{۲a} \\ \sigma_{max_۲} = \dfrac{M\times ۱/۵a}{I} \le \sigma_a \Rightarrow M \le \dfrac{I\sigma_a}{۱/۵a} \end{cases} \Rightarrow M_{max} = min\left\{\frac{I\sigma_a}{۲a}, \frac{I\sigma_a}{۱/۵a}\right\} = \frac{I\sigma_a}{۲a}$$

$$\Rightarrow M_{max} = \frac{\frac{۹۷a^۴}{۱۲}\times\sigma_a}{۲a} = \frac{۹۷}{۲۴}a^۳\sigma_a$$

**۳۹- (۱)**

سازه متقارن و بارگذاری آن نیز متقارن است. بنابراین تغییر شکل سازه نیز باید متقارن باشد. به عبارت دیگر عضو صلب باید به صورت افقی و بدون دوران پایین بیاید. لذا تغییرطول میله‌ها باهم برابر بوده و مثل فنرهای موازی عمل می‌کنند و نیروی وارد شده بر سازه بـه نـسبت سـختی محـوری میله‌ها، بین آنها توزیع می‌شود.




$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta$$

$$K_1 = K_3 = \frac{EA}{\frac{L}{2}} = \frac{2EA}{L} \quad , \quad K_2 = \frac{EA}{L}$$

$$F_1 = \frac{5P}{2} \times \frac{K_1}{\sum K} = \frac{5P}{2} \times \frac{\frac{2EA}{L}}{2 \times \frac{2EA}{L} + \frac{EA}{L}} = P \quad , \quad F_3 = F_1 = P$$

$$F_2 = \frac{5P}{2} \times \frac{K_2}{\sum K} = \frac{5P}{2} \times \frac{\frac{EA}{L}}{2 \times \frac{2EA}{L} + \frac{EA}{L}} = 0/5P$$

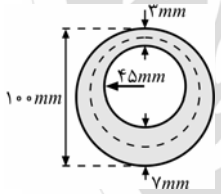
**۴۰- (۳)**

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\Delta = 0 \;\Rightarrow\; \alpha L \Delta T = \frac{PL}{EA} \;\Rightarrow\; P = \alpha \Delta T EA$$

$$P = P_{cr} \;\Rightarrow\; \alpha \Delta T_{cr} EA = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \;\Rightarrow\; \Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 I}{A \alpha L^2}$$

**۴۱- (۱)**



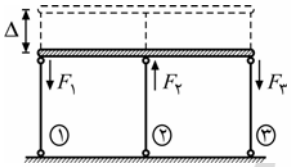

ابتدا توجه شود که حداکثر تنش برشی در یک مقطع جدار نازک بسته، در کمترین ضخامت رخ می‌دهـد. بـرای محاسبهٔ تنش برشی ابتدا باید مقدار $A_m$ را به‌دست آوریم که برای این منظور خط‌چینی را که از وسط ضخامت مقطع عبور می‌کند، را رسم کرده و مساحت آن را با میانگین‌گیری از مساحت دایرهٔ داخلی و خـارجی بـه‌دسـت می‌آوریم.

$$A_m = \frac{1}{2}[\pi R_{in}^2 + \pi R_{out}^2] = \frac{1}{2}[\pi \times 45^2 + \pi \times 50^2] = \frac{1}{2}\pi \times 4525\ mm^2$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{2A_m t_{min}} = \frac{200\pi \times 10^3}{2 \times \frac{1}{2}\pi \times 4525 \times 3} = 14/7\ N/mm^2 = 14/7\ MPa$$

**۴۲- (۳)**

در اثر تغییر دمای میله میانی، عضو صلب به‌طور متقارن به‌اندازه $\Delta$ بالا می‌رود. در این حالت میله میانی تحت فشار و میله‌های کناری تحت کشش قرار می‌گیرند.




$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$$

$$\frac{F_1 L}{EA} = \alpha \Delta T L - \frac{F_2 L}{EA} \qquad (I)$$

از طرفی باتوجه به تقارن سازه و تعادل نیروها در راستای قائم می‌توان گفت:

$$F_1 = F_3 = \frac{F_2}{2} \;\Rightarrow\; F_2 = 2F_1$$

با جایگذاری $F_2 = 2F_1$ در رابطه $(I)$ داریم:

$$\frac{F_1 L}{EA} = \alpha \Delta T L - \frac{2F_1 L}{EA} \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{F_1}{A} = \frac{1}{3}\alpha E \Delta T$$

**۴۳- (۲)**

باتوجه به صفر بودن تنش برشی روی صفحات المان، تنش‌های داده شده همان تنش‌های اصلی این المان می‌باشند.

$$\sigma_۱ = ۰ \ , \ \sigma_۲ = -۵۰۰ \ , \ \sigma_۳ = -۱۰۰۰$$

بنابراین تنش برشی حداکثر برابر است با:

$$\tau_{max} = \frac{۱}{۲}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \frac{۱}{۲}(۰ - (-۱۰۰۰)) = ۵۰۰ \ kg/cm^۲$$

**۴۴- (۳)**

کرنش سطحی ورق به‌صورت زیر بدست می‌آید:

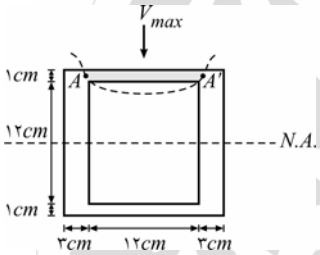
$$\varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E} = \frac{۱-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \Rightarrow \varepsilon_A = \frac{۱-۰/۳}{۲۰۰\times۱۰^۳}\times(۴۰۰+(-۲۰۰)) = ۷\times۱۰^{-۴}$$

بنابراین تغییرمساحت ورق برابر است با:

$$\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A_۰} \Rightarrow ۷\times۱۰^{-۴} = \frac{\Delta A}{۱۵۰\times۱۰^۲} \Rightarrow \Delta A = ۱۰/۵ \ mm^۲$$

**۴۵- (۲)**

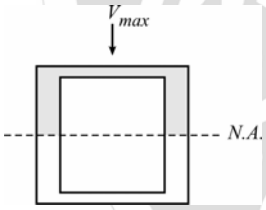
تنش برشی را در مقاطع بحرانی به دست می‌آوریم. با توجه به تنش برشی افقی ایجاد شده در نقطهٔ $A$، برش قائم حداکثر برابر است با:




$$\begin{cases} \tau_{max} = \tau_{all} = \dfrac{VQ}{It} \Rightarrow V_{max} = \tau_{all}\times t\times\dfrac{I}{Q} \\ I = \dfrac{۱۸\times۱۴^۳}{۱۲} - \dfrac{۱۲\times۱۲^۳}{۱۲} = ۲۳۸۸ \ cm^۴ \ , \ t = ۱+۱ = ۲ \ cm \end{cases}$$

$$(V_{max})_۱ = ۹۶۰\times۲\times\frac{۲۳۸۸}{۱۲\times۱\times۶/۵} = ۵۸۷۸۱/۵ \ kg \simeq ۵۸/۸ \ ton$$

از طرفی ظرفیت برشی با توجه به تنش برشی در محل محور خنثی عبارت است از:




$$(V_{max})_۲ = ۹۶۰\times۶\times\frac{۲۳۸۸}{\left[۱۸\times۷\times\frac{۷}{۲} - ۱۲\times۶\times\frac{۶}{۲}\right]} = ۶۱۱۳۲/۸ \ kg \simeq ۶۱/۱ \ ton$$

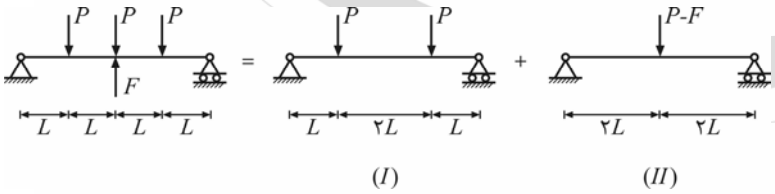
بنابراین حداکثر برش مجاز وارد بر مقطع برابر است با:

$$V_{max} = min\{(V_{max})_۱ \ , \ (V_{max})_۲\} = ۵۸/۸ \ ton$$

**تذکر:** این مقطع با تقریب مناسبی جدار نازک بوده و در $A$ و $A'$، تنش برشی به موازات جداره‌ها حائز اهمیت است.

**۴۶- (۳)**

نیروی ایجادشده در فنر را $F$ می‌نامیم. می‌توان تیر داده شده در شکل «ج» را به‌صورت زیر تفکیک کرد:




تغییرمکان قائم وسط تیر سمت چپ از شکل بالا باید با تغییرطول فنر برابر باشد.

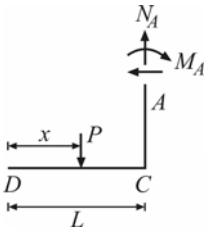
$$\Delta_{تیر} = \Delta_I + \Delta_{II} \ , \ \Delta_{فنر} = \frac{F}{K_S} = \frac{F}{\frac{EI}{۵L^۳}} = \frac{۵FL^۳}{EI}$$

$$\begin{cases} \Delta_I = \dfrac{۱۱PL^۳}{۶EI} \\ \Delta_{II} = \dfrac{۴(P-F)L^۳}{۳EI} \end{cases} \Rightarrow \Delta_{تیر} = \frac{۱۱PL^۳}{۶EI} + \frac{۴(P-F)L^۳}{۳EI}$$

رابطه سازگاری: $\Delta_{تیر} = \Delta_{فنر} \Rightarrow \dfrac{۱۱PL^۳}{۶EI} + \dfrac{۴(P-F)L^۳}{۳EI} = \dfrac{۵FL^۳}{EI} \Rightarrow F = \dfrac{P}{۲}$

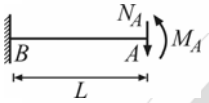
**۴۷- (۲)**

اگر تعادل قطعه $ACD$ را به‌طور جداگانه بررسی کنیم، خواهیم داشت:




$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N_A = P$$
$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow M_A = P(L-x) \qquad (۱)$$

لنگر خمشی $M_A$ و نیز نیروی $N_A$ (به صورت برشی) به تیر $AB$ اعمال می‌شوند. برای صفر شدن $\Delta_A$ باید داشته باشیم:




$$\Delta_A = \frac{N_A L^۳}{۳EI} - \frac{M_A L^۲}{۲EI} = ۰ \Rightarrow M_A = \frac{۲}{۳} N_A L \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \Rightarrow P(L-x) = \frac{۲}{۳}PL \Rightarrow L - x = \frac{۲L}{۳} \Rightarrow x = \frac{L}{۳}$$

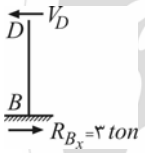
**۴۸- (۱)**

ابتدا درجه نامعینی سازه را می‌یابیم:

$$n = ۳k + r - (C+۳) = ۰ + ۵ - (۲+۳) = ۰$$

بنابراین سازه معین است و نشست تکیه‌گاهی هیچ نیرویی در آن ایجاد نمی‌کند.

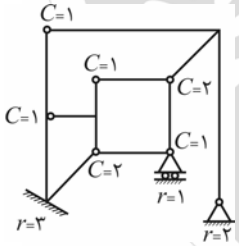
کل سازه: $\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{B_x} = ۳\,ton$




$$BD: \sum F_x = ۰ \Rightarrow V_D = ۳\,ton$$
$$\Delta_D = \frac{V_D L^۳}{۳EI} = \frac{۳ \times ۳^۳}{۳EI} = \frac{۲۷}{EI}$$

**۴۹- (۳)**

با استفاده از روش فضای بسته $k$، درجه نامعینی سازه را می‌یابیم:




$$n = ۳k + r - (C+۳) = ۳ \times ۳ + ۶ - (۸+۳) = ۴$$

**۵۰- (۴)**

از قضیه تقابل کار ماکسول استفاده می‌کنیم:

$$F_{D\,(\text{الف})} \times \Delta_{D\,(\text{ب})} = M_{B\,(\text{ب})} \times \theta_{B\,(\text{الف})}$$
$$(-۱) \times \Delta_{D\,(\text{ب})} = (-۲) \times (۰/۰۱) \Rightarrow \Delta_{D\,(\text{ب})} = ۰/۰۲\,m = ۲\,cm$$

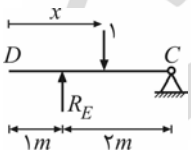
علامت مثبت نشان می‌دهد که نقطه $D$ در سازه (ب) به سمت بالا می‌رود.

**۵۱- (۱)**

**روش اول:** نمودار خط تأثیر فقط در قسمتی از سازه ترسیم می‌شود که بار روی آن قسمت حرکت می‌کند.

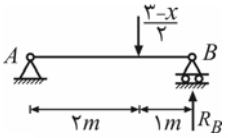
بنابراین نقطه شروع برای رسم خط تأثیر، $D$ می‌باشد و در فاصله $AD$ ارتفاع خط تأثیر صفر است. با قرار دادن بار واحد روی $C$، ملاحظه می‌شود که $R_B = ۰$ است. (زیرا تمامی بار را تکیه‌گاه $C$ می‌گیرد.) بنابراین (۱) صحیح است.

جهت رسم دقیق نمودار خط تأثیر، بار واحد را به فاصله $x$ از $D$ روی $DC$ اعمال نموده و معادله عکس‌العمل $B$ را برحسب $x$ می‌یابیم.




$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow R_E \times ۲ = ۱ \times (۳-x) \Rightarrow R_E = \frac{۳-x}{۲}$$

عکس این نیرو به $AB$ وارد می‌شود:



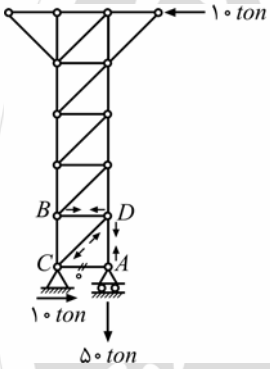

$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow R_B \times ۳ = (\frac{۳-x}{۲}) \times ۲ \Rightarrow R_B = ۱ - \frac{x}{۳} \qquad (۰ \le x \le ۳)$$

معادله بدست آمده مربوط به نمودار رسم شده در گزینهٔ (۱) است.

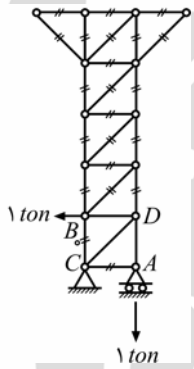
**روش دوم:** برای رسم خط تأثیر $R_B$ با استفاده از اصل مولر برسلاو، قید تکیه‌گاهی $B$ را حذف کرده و این تکیه‌گاه را به میزان واحد به سمت بالا جابجا می‌کنیم. با این جابجایی محل غلتک $E$ به میزان $\frac{۲}{۳}$ به سمت بالا جابجا می‌شود و با توجه به تغییر شکل تیر $CD$، انتهای $D$ به میزان واحد به سمت بالا جابجا می‌شود و شکل گزینه اول برای خط تأثیر $R_B$ به دست می‌آید.

**۵۲- (۴)**

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. تحت اثر بارگذاری‌های حقیقی و مجازی عضوهای صفر نیرویی خرپاها را تعیین می‌کنیم. پس از بررسی و تعیین اعضای صفر نیرویی در دو سازه، مشخص می‌شود که باید نیروی عضوهای $AD$، $CD$ و $BD$ تعیین شود.




**سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی**




**سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی**

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{C_x} = ۱۰ ton$$
$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow ۱۰ \times ۵ \times ۳ = R_{A_y} \times ۳$$
$$\Rightarrow R_{A_y} = ۵۰ ton$$
$$A: \sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{CA} = ۰$$
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{AD} = ۵۰ ton \text{ (کششی)}$$

$$B: \sum F_y = ۰ \Rightarrow f_{BC} = ۰$$
$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow R_{A_y} = ۱ ton$$
$$A: \sum F_y = ۰ \Rightarrow f_{DA} = ۱ ton \text{ (کششی)}$$
$$D: \sum F_y = ۰ \Rightarrow f_{CD} = \sqrt{۲}\, ton \text{ (فشاری)}$$
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow f_{BD} = ۱ ton \text{ (کششی)}$$

$$C: \sum F_x = ۰ \Rightarrow ۱۰ = F_{CD} \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow F_{CD} = ۱۰\sqrt{۲}\, ton \text{ (فشاری)}$$

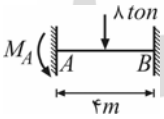
$$D: \sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{BD} = F_{CD} \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰ ton \text{ (کششی)}$$

حال با قرار دادن نیروهای به‌دست آمده در رابطه بار واحد، داریم:

$$۱ \times \Delta_{B_H} = \sum_{k=۱}^{۳} (\frac{FfL}{EA})_k = \frac{۵۰ \times ۱ \times ۳}{EA} + \frac{۱۰\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲}}{EA} + \frac{۱۰ \times ۱ \times ۳}{EA} = \frac{۲۶۴}{EA}$$

**۵۳- (۲)**

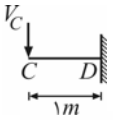
این سازه متقارن و بارگذاری روی آن نیز متقارن است. از طرفی چون سختی محوری ستون $BD$ داده نشده است، از تغییرطول این ستون صرف‌نظر می‌کنیم. لذا در نقطه $B$، تغییرمکان قائم و دوران صفر می‌باشد و این نقطه مانند یک تکیه‌گاه گیردار عمل می‌کند.




$$M_A = -\frac{PL}{۸} = -\frac{۸ \times ۴}{۸} = -۴\, ton.m$$

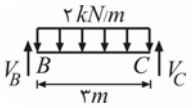
**۵۴- (۱)**

تیر $CD$ مطابق شکل مقابل بارگذاری می‌شود:




$$\Delta_C = \frac{V_C L^3}{3EI}$$

بنابراین کافیست $V_C$ را بیابیم. این نیرو را از تحلیل تیر میانی $BC$ می‌یابیم:

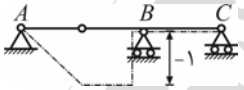



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_C \times 3 = \frac{2\times 3^2}{2} \Rightarrow V_C = 3\ kN$$

$$\Delta_C = \frac{3\times 1^3}{3EI} = \frac{1}{EI}$$

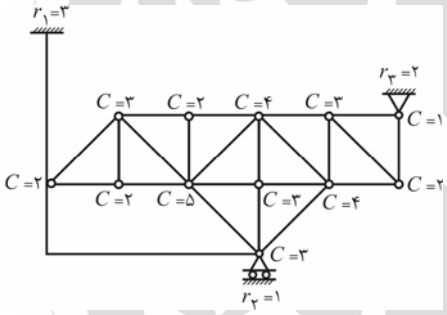
**۵۵- (۳)**

خط تأثیر خواسته شده به صورت شکل مقابل است:




**۵۶- (۳)**

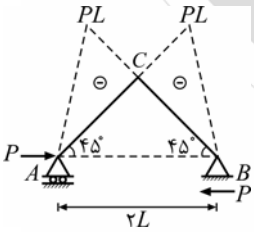
برای تعیین درجهٔ نامعینی با استفاده از روش حلقه داریم:



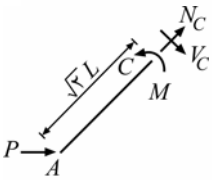

$$\begin{cases} r = 6 \\ C = 34 \\ k = 12 \end{cases} \Rightarrow n = (3k + r) - (C + 3) = 5$$

**۵۷- (۴)**

تکیه گاه $B$ ثابت است. بنابراین میزان نزدیک شدن $A$ و $B$ نسبت به هم، همان تغییرمکان افقی $A$ می‌باشد که با استفاده از روش بار واحد محاسبه می‌شود. توجه داریم که سازه اصلی و سازه واحد مشابه هستند. فقط در سازهٔ واحد، به جای بار $P$، بار واحد (۱) قرار می‌گیرد.




$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{B_x} = P$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_{B_y} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{A_y} = 0$$



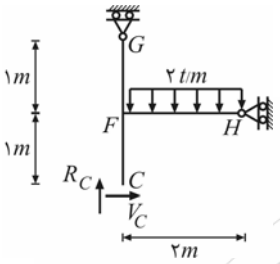

(عضو $AC$)

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_C = -PL$$

$$1\times \Delta_{A_H} = 2\times \frac{A_M\,\bar{m}}{EI} = 2\times \frac{\left[\frac{1}{2}(PL\times\sqrt{2}L)\right]\times\left[\frac{2L}{3}\right]}{EI} = \frac{2\sqrt{2}\,PL^3}{3EI}$$

**۵۸- (۲)**

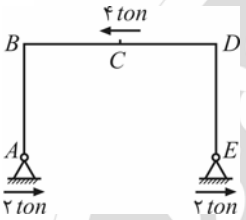
قطعه $CFGH$ را به صورت مقابل و به طور جداگانه در نظر گرفته و تعادل نیروها را برای آن می‌نویسیم:




$$\sum M_F = ۰ \Rightarrow ۲\times\frac{۲^۲}{۲} = V_C \times ۱ \Rightarrow V_C = ۴\,ton$$

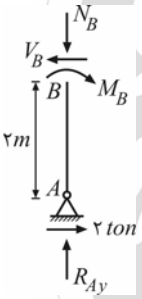
چون از تغییرطول اعضا صرف‌نظر می‌شود، $R_C = ۰$ است و تنها نیروی $V_C$ به قاب پایینی به صورت زیر وارد می‌شود.

با توجه به تقارن سازه عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه‌های $A$ و $E$ برابر می‌باشند.




$$R_{A_x} = R_{E_x} = \frac{۴}{۲} = ۲\,ton$$

حال اگر ستون $AB$ به صورت جداگانه در نظر بگیریم، خواهیم داشت:




$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow M_B = ۲\times۲ = ۴\,ton.m$$
$$M_{BA} = M_{BC} = ۴\,ton.m$$

**۵۹- (۴)**

ابتدا $\theta_B$ را از رابطه شیب افت می‌یابیم:

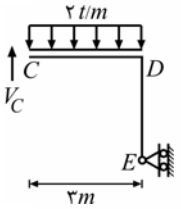
$$M_{BA} + M_{BC} = ۰$$
$$\frac{۲EI}{L}\left(۲\theta_B + \theta_A - \frac{۳\Delta_{B/A}}{L}\right) + \frac{۲EI}{L}\left(۲\theta_B + \theta_C - \frac{۳\Delta_{B/C}}{L}\right) = ۰$$
$$\frac{۲EI}{L}\left(۲\theta_B + ۰ - \frac{۳\delta}{L}\right) + \frac{۲EI}{L}\left(۲\theta_B + ۰ - \frac{۳(\delta-\delta)}{L}\right) = ۰ \Rightarrow ۴\theta_B = \frac{۳\delta}{L} \Rightarrow \theta_B = \frac{۳\delta}{۴L}$$

حال می‌توان $M_{AB}$ را به‌دست آورد.

$$M_{AB} = \frac{۲EI}{L}\left(۲\theta_A + \theta_B - \frac{۳\Delta_{A/B}}{L}\right) = \frac{۲EI}{L}\left(۰ + \frac{۳\delta}{۴L} - \frac{۳\delta}{L}\right) \Rightarrow |M_{AB}| = \frac{۴/۵EI\,\delta}{L^۲}$$

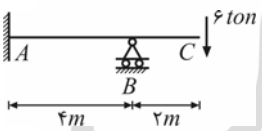
**۶۰- (۲)**

ابتدا قطعه $CDE$ را درنظر بگیرید:

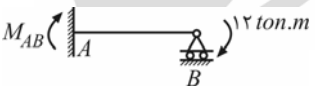



$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow V_C = ۲\times۳ = ۶\,ton$$

این نیروی برشی در $C$ به تیر $ABC$ منتقل می‌شود.




چون $M_{AB}$ خواسته شده، می‌توان عضو کنسول $BC$ را حذف نموده و لنگر نظیر نیروی $۶\,ton$ را روی $B$ اعمال کرد.




$$M_{AB} = M_A = \frac{۱}{۲}\times۱۲ = ۶\,ton.m$$

## مکانیک خاک و پی

**۶۱- (۳)**

می‌دانیم در حالت صعود موئینگی برای محاسبه تنش مؤثر نمی‌توان از رابطه $\sigma' = \gamma' z$ استفاده کرد و بایستی از اصل تنش مؤثر استفاده نمود. در این سؤال برای نقطه $M$ خواهیم داشت:

$$\sigma_M = ۱۸\times۲+۲۰\times۲/۵ = ۸۶\ kN/m^۲$$
$$u_M = -\gamma_w z = -۱۰\times۲/۵ = -۲۵\ kN/m^۲$$
$$\sigma'_M = \sigma_M - u_M = ۸۶-(-۲۵) = ۱۱۱\ kN/m^۲$$

**۶۲- (۱)**

به‌دلیل متراکم بون خاکریز، مصالح خاکریز نشست نداشته و تغییر مکان نقطه $A$ همان نشست لایه رسی است که به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}\Delta H = H_\circ m_v \Delta\sigma' \\ \Delta\sigma' = (\gamma-\gamma')\Delta h = (۱۸-۱۰)(۲) = ۱۶\ kN/m^۲\end{cases} \Rightarrow \Delta H = (۴۰۰)(۵\times۱۰^{-۴})(۱۶) = ۳/۲\ cm$$

**۶۳- (۱)**

$F_{۲۰۰} = ۱۴\% < ۵۰\% \Rightarrow$ خاک درشت‌دانه است $(G$ یا $S)$

$F_۴^* = (\frac{F_۴ - F_{۲۰۰}}{۱۰۰-F_{۲۰۰}})\times۱۰۰ = (\frac{۹۰-۱۴}{۱۰۰-۱۴})\times۱۰۰ = ۸۸/۳\% > ۵۰\% \Rightarrow$ خاک ماسه‌ای $(S)$ است.

درصد ریزدانه (درصد عبوری از الک شمارهٔ $F_{۲۰۰} = ۲۰۰$) در این خاک ماسه‌ای از ۱۲٪ بیشتر است، بنابراین حرف دوم خاک براساس خصوصیات ریزدانه تعیین می‌شود و $C$ یا $M$ خواهد بود. باتوجه به گزینه‌ها واضح است که تنها گزینهٔ (۱) در این شرط صدق می‌کند. خودتان نام کامل خاک را که $SM$ است، به‌دست آورید.

**۶۴- (۱)**

امتداد جریان عمود بر سطح لایه‌هاست، بنابراین خواهیم داشت:

$$Q_۱ = Q_۲ \Rightarrow k_۱ A_۱ (\frac{\Delta h_۱}{L_۱}) = k_۲ A_۲ (\frac{\Delta h_۲}{L_۲}) \xrightarrow[L_۱=L_۲]{A_۱=A_۲} (۳k_۲)(\Delta h_۱) = (k_۲)(\Delta h_۲)$$

$$\Rightarrow \Delta h_۲ = ۳\Delta h_۱ \quad (I) \text{ رابطه} \quad \text{و} \quad \Delta h_۱ + \Delta h_۲ = \Delta H = ۴۰۰mm \quad (II) \text{ رابطه}$$

از روابط $(I)$ و $(II)$ به‌دست می‌آید:

$$\Delta h_۱ = h = ۱۰۰mm \quad , \quad \Delta h_۲ = ۳۰۰mm$$

**۶۵- (۳)**

ارتباط بین وزن مخصوص خشک و وزن مخصوص طبیعی یک خاک طبق رابطهٔ $\gamma_d = \frac{\gamma}{۱+\omega}$، بیان می‌شود. برای خاک در دو حالت اشباع و خشک، با استفاده از این رابطه داریم:

$$\begin{cases} \text{خاک اول اشباع است.} \Rightarrow ۱۶ = \frac{۲۰}{۱+\omega_۱} \Rightarrow \omega_۱ = \frac{۱}{۴} = ۲۵\% \\ \text{خاک دوم خشک است.} \Rightarrow \omega_۲ = ۰ \end{cases}$$

اگر دو خاک با رطوبت‌های $\omega_۱$ و $\omega_۲$ را با هم مخلوط کنیم و بخواهیم که خاک مخلوط دارای رطوبت $\omega$ شود، در آن صورت نسبت حجم این دو خاک قبل از مخلوط شدن برابر است با:

$$\frac{V_۱}{V_۲} = (\frac{\omega_۲-\omega}{\omega-\omega_۱})(\frac{\gamma_{d۲}}{\gamma_{d۱}})$$

که در رابطه بالا $\gamma_{d_۱}$ و $\gamma_{d_۲}$ وزن مخصوص خشک این دو خاک قبل از اختلاط می‌باشند. چون وزن مخصوص خشک هر دو خاک قبل از اختلاط باهم برابر است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{V_۱}{V_۲} = (\frac{\omega_۲-\omega}{\omega-\omega_۱}) = (\frac{۰-۰/۱}{۰/۱-۰/۲۵}) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow x_۱ = \frac{۲}{۵} = ۴۰\% \ , \ x_۲ = \frac{۳}{۵} = ۶۰\%$$

**۶۶- (۴)**

به‌دلیل اینکه خاک بیشتری در طرف چپ دیوار حائل وجود دارد، بنابراین منطقی است که دیوار به سمت راست دوران کند و سمت چپ در حالت محرک رانکین قرار بگیرد. خاک سمت راست نیز طبق صورت سؤال در حالت مقاوم قرار دارد، بنابراین می‌نویسیم:

$$P_a = P_p \;\Rightarrow\; \frac{۱}{۲}K_a\gamma H_a^۲ = \frac{۱}{۲}K_p\gamma H_p^۲ \;\Rightarrow\; K_a = \frac{H_p^۲}{H_a^۲}K_p = \frac{۱^۲}{۳^۲}K_p = \frac{۱}{۹}K_p$$

از طرف دیگر می‌دانیم که:

$$K_a = \frac{۱}{K_p} \;\Rightarrow\; K_p^۲ = ۹ \;\Rightarrow\; K_p = ۳ = \frac{۱+\sin\phi}{۱-\sin\phi} \;\Rightarrow\; \phi = ۳۰^\circ$$

**۶۷- (۴)**

چون تغییر سطح آب در خارج از خاک اتفاق افتاده است، بنابراین تنش مؤثر ثابت بوده و هیچگونه نشست تحکیمی در خاک رخ نمی‌دهد.

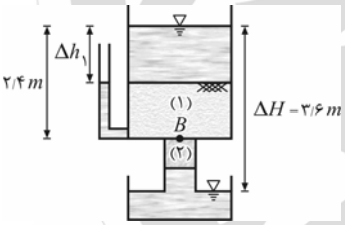
**۶۸- (۲)**

امتداد جریان عمود بر سطح لایه‌هاست، بنابراین خواهیم داشت:

$$Q_۱ = Q_۲ \;\Rightarrow\; k_۱A_۱\left(\frac{\Delta h_۱}{L_۱}\right) = k_۲A_۲\left(\frac{\Delta h_۲}{L_۲}\right) \;\Rightarrow\; (۱)(۰/۴)\left(\frac{\Delta h_۱}{۱/۲}\right) = (۰/۵)(۰/۲)\left(\frac{\Delta h_۲}{۰/۶}\right)$$

$$\Rightarrow\; \Delta h_۲ = ۲\Delta h_۱ \quad (I) \text{ رابطهٔ} \quad \text{و} \quad \Delta h_۱ + \Delta h_۲ = \Delta H = ۳/۶\,m \quad (II) \text{ رابطهٔ}$$

از روابط $(I)$ و $(II)$، $\Delta h_۱ = ۱/۲\,m$ و $\Delta h_۲ = ۲/۴\,m$ به‌دست می‌آیند. حال با قرار دادن یک پیزومتر در نقطهٔ $B$، ارتفاع ستون آب در آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:




$$(h_p)_B = ۲/۴ - \Delta h_۱ = ۲/۴ - ۱/۲ = ۱/۲\,m$$

$$\Rightarrow\; u_B = \gamma_w\,(h_p)_B = ۱۰\times ۱/۲ = ۱۲\,kN/m^۲$$

**۶۹- (۱)**

مرحله دوم هر آزمایش سه‌محوری $CU$ را می‌توان در حکم یک آزمایش تک‌محوری دانست. در مرحله دوم آزمایش $CU$ در حالیکه شیرهای زهکشی بسته‌اند، نمونه تحت تنش انحرافی قرار گرفته و بدون تنش محفظه‌ای، بارگذاری و گسیخته می‌شود. در این سؤال هنگام اعمال تنش انحرافی نمونه اول عادی‌تحکیم‌یافته است ولی نمونه‌های دوم و سوم پیش‌تحکیم‌یافته می‌باشند. در این حالت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} OCR_۱ = \dfrac{۱۰۰}{۱۰۰} = ۱ \\ OCR_۲ = \dfrac{۲۰۰}{۱۰۰} = ۲ \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{c_u}{\sigma'_z}\right)_۲ = \left(\dfrac{c_u}{\sigma'_z}\right)_۱ \times OCR^{۰/۸} = \left(\dfrac{c_u}{\sigma'_z}\right)_۱ \times ۲^{۰/۸} = ۱/۷۴\left(\dfrac{c_u}{\sigma'_z}\right)_۱ \\ OCR_۳ = \dfrac{۳۰۰}{۱۰۰} = ۳ \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{c_u}{\sigma'_z}\right)_۳ = \left(\dfrac{c_u}{\sigma'_z}\right)_۱ \times OCR^{۰/۸} = \left(\dfrac{c_u}{\sigma'_z}\right)_۱ \times ۳^{۰/۸} = ۲/۴\left(\dfrac{c_u}{\sigma'_z}\right)_۱ \end{cases}$$

در شروع مرحله‌ای که تنش انحرافی اعمال می‌شود، تنش مؤثر قائم $(\sigma'_z)$ برای تمام نمونه‌ها یکسان و برابر $۱۰۰\,kN/m^۲$ است. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که:

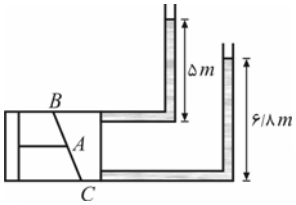
$$c_{u_۱} < c_{u_۲} < c_{u_۳}$$

حال اگر منظور طراح از مقاومت محوری مؤثر را همان تنش انحرافی در نقطه گسیختگی فرض کنیم، در آن‌صورت با توجه به اینکه $\Delta\sigma_d = ۲c_u$ است، خواهیم داشت:

$$\Delta\sigma_{d_۳} > \Delta\sigma_{d_۲} > \Delta\sigma_{d_۱} \quad \text{یا} \quad \sigma'_{d_۳} > \sigma'_{d_۲} > \sigma'_{d_۱}$$

یعنی هرچه تنش وارده برای تحکیم خاک بیشتر باشد، خاک بیشتر متراکم شده و در نتیجه مقاومت بیشتری از خود نشان می‌دهد.

**۷۰- (۲)**




باتوجه به خطی بودن توزیع فشار آب حفره‌ای در خاک از نقطهٔ $B$ تا $C$ خواهیم داشت:

$$(h_p)_A = \frac{۶/۸+۵}{۲} = ۵/۹m \;\Rightarrow\; u_A = \gamma_w\ (h_p)_A = ۱۰\times ۵/۹ = ۵۹\,kN/m^۲$$

$$\sigma'_A = \sigma_A - u_A = (۲۰\times ۶) - ۵۹ = ۶۱\,kN/m^۲$$

**۷۱- (۳)**

رابطه $\sigma_۱ = \sigma_۳ tan^۲\theta + ۲c\,tan\theta$ را براساس تنش مؤثر و با استفاده از پارامترهای مؤثر مقاومت برشی می‌نویسیم:

$$(\sigma_۱ - u_f) = (\sigma_۳ - u_f)\,tan^۲\theta + ۲c'tan\,\theta \quad , \quad c' = ۰$$ (رس عادی تحکیم یافته)

$$(۳۰۰+۳۱۰-۱۴۵) = (۳۰۰-۱۴۵)\,tan^۲\theta + ۰ \;\Rightarrow\; \theta = ۶۰^\circ$$

**۷۲- (۴)**

برای محاسبه دبی (در واحد طول) در زیر بند بتنی مذکور، با استفاده از از رابطه $q = k\,\Delta H\,(\frac{N_f}{N_d})$ ، خواهیم داشت:

$$q = k\,\Delta H\,(\frac{N_f}{N_d}) = (۴/۵\times ۱۰^{-۶})(۱۲)(\frac{۴}{۱۲}) = ۱۸\times ۱۰^{-۶}\ m^۳/s.m = ۰/۰۱۸\ Lit/s.m$$

که برای $L = ۱۰۰\,m$ از طول بند، برابر است با:

$$Q = q\times L = (۰/۰۱۸)(۱۰۰) = ۱/۸\ Lit/s$$

در ادامه برای محاسبه فشار آب حفره‌ای در نقطه $A$ ، سطح آب در پایین‌دست را به‌عنوان سطح مبنا انتخاب می‌کنیم و با استفاده از روابط $H_A = \Delta H - (N_d)_A\,\Delta h$ ، $(h_p)_A = H_A - (h_z)_A$ و $u_A = (h_p)_A\,\gamma_w$ می‌نویسیم:

$$u_A = \left[\Delta H - (N_d)_A\,\Delta h - (h_z)_A\right]\gamma_w = \left[۱۲ - ۱۰\times(\frac{۱۲}{۱۲}) - (-۲)\right]\times ۱۰ = ۴۰\,kN/m^۲$$

**تذکر:** باتوجه به گزینه‌ها، تنها با محاسبه دبی جریان نیز می‌توانستیم پاسخ صحیح را تعیین کنیم.

**۷۳- (۱)**

با توجه به اینکه پارامترهای مؤثر مقاومت برشی در صورت سؤال داده شده است، رابطه $\sigma_۱ = \sigma_۳\,tan^۲(۴۵+\frac{\phi}{۲}) + ۲c\,tan(۴۵+\frac{\phi}{۲})$ را براساس تنش مؤثر برای آزمایش $CD$ می‌نویسیم:

$$\sigma'_۱ = \sigma'_۳\,tan^۲(۴۵+\frac{\phi'}{۲}) + ۲c'tan(۴۵+\frac{\phi'}{۲})$$

$$\Rightarrow ۱۲۱ = \sigma'_۳\,tan^۲(۴۵+\frac{۳۰}{۲}) + ۲\times ۲۰\sqrt{۳}\times tan(۴۵+\frac{۳۰}{۲}) \Rightarrow ۱۲۱ = ۳\sigma'_۳ + ۱۲۰ \;\Rightarrow\; \sigma'_۳ \simeq ۰/۳\,kN/m^۲$$

**۷۴- (۲)**

طبق روابط توزیع تقریبی (۲ به ۱) تنش در توده خاک می‌نویسیم:

$$\Delta\sigma_{z(A)} = \frac{q\times B}{B+z} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z(A)} = \frac{۲۰\times ۲}{۲+۳} = ۸\,kN/m^۲$$

$\Delta\sigma_{z(B)} = ۰$ (نقطهٔ $B$ خارج از محدودهٔ توزیع تنش قرار دارد.)

**۷۵- (۳)**

بر اساس معیار گسیختگی مور - کولمب، تنش قائم و برشی حداکثر هیچ‌کدام به تنهایی باعث گسیختگی خاک نمی‌شوند بلکه ترکیبی بحرانی از آنهاست که خاک را گسیخته می‌کند. بنابراین گزینه (۳) پاسخ صحیح خواهد بود.

**تذکر:** این تست تکرار سؤال (۶۴) از آزمون سال ۸۰ است.

**۷۶- (۲)**

حداقل ظرفیت باربری مجاز خاک بایستی با حداکثر تنش ایجاد شده در زیر پی برابر باشد. همچنین خروج از مرکزیت بار ستون $۰/۱m$ است که لنگری معادل $۱۰t.m$ در خلاف جهت لنگرِ خود ستون تولید می‌کند. پس در مجموع یک لنگر به اندازه $M = ۲۰-۱۰ = ۱۰t.m$ در روی پی وجود دارد. با جمع‌بندی توضیحات فوق، می‌نویسیم:

$$(q_{all})_{min} = q_{max} = \frac{P}{BL} + \frac{۶M}{BL^۲} = \frac{۱۰۰}{۳\times۴} + \frac{۶\times۱۰}{۳\times۴^۲} = ۹/۵۸\ t/m^۲ = ۰/۹۵۸\ kg/cm^۲ \simeq ۰/۹۶\ kg/cm^۲$$

**۷۷- (۴)**

آزمایش $SPT$ معمولی‌ترین و کم‌هزینه‌ترین آزمایش درجا محسوب می‌شود. روش کار در این آزمایش بدین صورت است که نمونه‌گیر $(split-spoon)$ استاندارد را در سه مرحله ۱۵ سانتی‌متری در داخل خاک فرو می‌برند. برای این کار از وزنه‌ای ۶۳/۵ کیلویی که از ارتفاع ۷۶ سانتی‌متری سقوط می‌کند، استفاده می‌شود. در این آزمایش:

۱- تعداد ضربه‌های لازم برای فرو بردن نمونه‌گیر در دو مرحله آخر (دو ۱۵ سانتی‌متر آخر) را $N$ یا عدد $SPT$ می‌نامند.

۲- تعداد ضربه‌های لازم برای فرو بردن نمونه‌گیر در ۱۵ سانتی‌متر اول ثبت می‌شود ولی به علت دست‌خوردگی به حساب آورده نمی‌شود.

پس در حل این سؤال، خواهیم داشت:

$N_۱ = ۱۲$ ۱۵ سانتی‌متر اول $\rightarrow$ صرف‌نظر می‌شود

$$\left.\begin{array}{ll} N_۲ = ۱۳ & \text{۱۵ سانتی‌متر دوم} \\ N_۳ = ۱۸ & \text{۱۵ سانتی‌متر سوم} \end{array}\right\} N = N_۲ + N_۳ = ۱۳ + ۱۸ = ۳۱\times۱/۱۵ = ۳۵/۶۵ \approx ۳۶$$

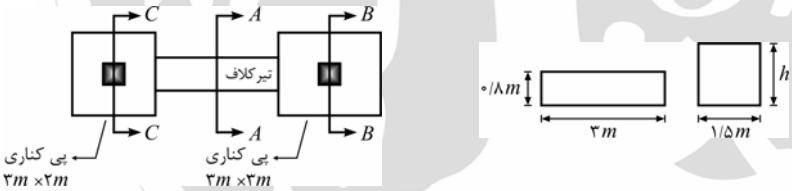
ضریب اصلاح قطر گمانه

**۷۸- (۲)**

طراحی ابعاد تیر کلاف در پی‌های باسکولی برمبنای صلبیت آنهاست. تیر کلاف باید بتواند از کج شدن شالوده‌های کناری خود جلوگیری کند و برای این منظور بایستی ممان اینرسی آن، حداقل برابر ممان اینرسیِ بیشتر در شالوده‌های کناری باشد:

کلاف $I \geq max\{I_۱, I_۲\}$

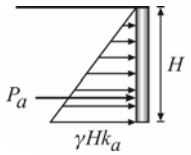
در حل این سؤال داریم:




کلاف $I \geq I_۱ = I_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۱۲}\times۱/۵\times h^۳ \geq \frac{۱}{۱۲}\times۳\times۰/۸^۳ \Rightarrow h \geq ۱m$

**۷۹- (۱)**

با توجه به ماسه‌ای بودن خاک $(c = ۰)$ خواهیم داشت:




$$\sigma_a = \sigma'_v K_a = \gamma H K_a \Rightarrow F_a = \frac{۱}{۲}\gamma H^۲ K_a$$

با توجه به نمودار واضح است که جابجایی کمتر مربوط به حالت محرک بوده و $F_a = ۵\ t/m$ است. بنابراین می‌نویسیم:

$$۵ = \frac{۱}{۲}\times۲\times۵^۲\times K_a \Rightarrow K_a = ۰/۲$$

**۸۰- (۱)**

در حالت اول می‌بایست از $\gamma_{wet}$ (وزن مخصوص حالت مرطوب) و در حالت دوم که سطح آب زیرزمینی در تراز کف پی قرار دارد، از $\gamma'$ استفاده کنیم. همچنین توجه داریم که به علت ماسه‌ای بودن خاک و نیز قرارگیری پی روی سطح زمین، از ترم‌های چسبندگی و عمق صرف‌نظر کردیم:

$$\frac{q_{u(۲)}}{q_{u(۱)}} = \frac{۰/۵\,B\,\gamma' N_\gamma}{۰/۵\,B\,\gamma_{wet}\,N_\gamma} \simeq \frac{\gamma_{sat}-\gamma_w}{\gamma_{sat}} = \frac{۲۰-۱۰}{۲۰} = \frac{۱}{۲}$$

**تذکر:** چون مقدار $\gamma_{wet}$ در صورت مسأله داده نشده بود، بنابراین به جای آن از $\gamma_{sat}$ استفاده کردیم.

**۸۱- (۳)**

با توجه به جدول زیر مشخص است که هرچه خاک ریزدانه‌تر بوده و تراکم کمتری داشته باشد، برای ایجاد فشار محرک جابجایی بیشتری در آن موردنیاز است. بر این اساس گزینه (۳) درست است.

| نوع خاک | جابجایی لازم برای ایجاد حالت فشار محرک | جابجایی لازم برای ایجاد حالت فشار مقاوم |
|---|---|---|
| ماسه شل | $۰/۰۰۲H \sim ۰/۰۰۴H$ | $۰/۰۱H$ |
| ماسه متراکم | $۰/۰۰۱H \sim ۰/۰۰۲H$ | $۰/۰۰۵H$ |
| رس نرم | $۰/۰۲H \sim ۰/۰۴H$ | $۰/۰۴H \sim ۰/۰۵H$ |
| رس سفت | $۰/۰۱H \sim ۰/۰۲H$ | $۰/۰۱H \sim ۰/۰۲H$ |

**۸۲- (۲)**

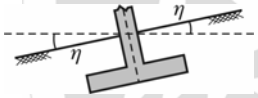
اندازه‌گیری توزیع واقعی تنش و نشست در زیر یک پی بسیار مشکل و پیچیده است. بر اساس فرضیات ساده کننده وسترگارد، شدت تنش ایجاد شده در زیر یک پی متناسب با نشست الاستیک پی می‌باشد:

$$q = k_f \cdot s$$

که در این رابطه $q$ = تنش زیر پی، $s$ = نشست الاستیک پی و ضریب $k_f$ به عنوان ضریب عکس‌العمل خاک شناخته می‌شود و واحد آن $kg/cm^۳$ می‌باشد.

$$s = \frac{q}{k_f} = \frac{P}{A\,k_f} = \frac{۸۰\times۱۰۰۰}{۲۰۰\times۲۰۰\times۱} = ۲\,cm$$

**۸۳- (۳)**




اگر پی در کنار شیب قرار گیرد، ظرفیت باربری آن کاهش می‌یابد. علت این موضوع، کاهش سربار (تنش موثر) و کاهش طول سطح گسیختگی در مجاورت شیب می‌باشد. همچنین افزایش زاویه $\eta$ نیز موجب کاهش بیشتر ظرفیت باربری می‌شود. اما باید توجه داشت که اثر کاهش ظرفیت باربری به هنگام قرار گرفتن پی در کنار شیب، بیشتر است (به دلیل این که در این حالت هم طول سطح گسیختگی و هم میزان سربار کاهش می‌یابند). از این رو گزینه (۳) پاسخ صحیح خواهد بود.

**۸۴- (۴)**

مقدار مقاومت انتهایی شمع با تنش مؤثر در تراز کف شمع و مقاومت جانبی نیز با میزان تنش مؤثر در پیرامون شمع رابطه مستقیم دارد. هنگامی که سطح آب از سطح زمین بالا می‌آید، به همان مقدار که تنش کل افزایش می‌یابد به فشار آب نیز افزوده می‌شود، بنابراین هیچ‌گونه تغییری در مقدار تنش مؤثر، مقاومت انتهایی و جانبی شمع رخ نمی‌دهد. در ضمن به علت عدم تغییر در مقدار تنش مؤثر، نشست تحکیم و پدیده اصطکاک منفی نیز رخ نمی‌دهد.

**۸۵- (۳)**

در تعیین کارایی یک گروه شمع با استفاده از قاعدهٔ فلد فرض می‌شود که ظرفیت باربری هر شمع قرار گرفته در گروه، به تعداد شمع‌های قرار گرفته در مجاور آن با ضریب $\frac{۱}{۱۶}$ کم می‌شود. با این فرض اگر در مجاورت شمعی ۳ شمع قرار داشته باشد، به مقدار $\frac{۳}{۱۶}$ از ظرفیت باربری آن کم می‌شود و ظرفیت باربری شمع $\frac{۱۳}{۱۶}Q_u$ خواهد شد. با تعیین ظرفیت باربری کلیه شمع‌ها می‌توان کارایی گروه را به‌دست آورد.

$$\eta = \frac{Q_{u_۱} + Q_{u_۲} + \cdots + Q_{u_n}}{n\,Q_u}$$

ظرفیت باربری شمع‌های گوشه $= Q_u - \frac{۳}{۱۶}Q_u = \frac{۱۳}{۱۶}Q_u$

ظرفیت باربری شمع‌های جانبی $= Q_u - \frac{۵}{۱۶}Q_u = \frac{۱۱}{۱۶}Q_u$

ظرفیت باربری شمع وسط $= Q_u - \frac{۸}{۱۶}Q_u = \frac{۸}{۱۶}Q_u$

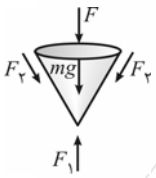
$$\eta = \frac{۴\times\frac{۱۳}{۱۶} + ۴\times\frac{۱۱}{۱۶} + ۱\times\frac{۸}{۱۶}}{۹} = ٪۷۲$$

**توجه:** ایراد این روش، عدم در نظر گرفتن نوع پی و مشخصات خاک و شمع‌ها می‌باشد.

## مکانیک سیالات و هیدرولیک

**۸۶- (۲)**

دیاگرام آزاد جسم مخروطی شکل را رسم می‌کنیم. توجه شود که منظور از نیروهای $F_۲$، نیروهای ناشی از جت خروجی از کناره‌های مخروط می‌باشند که خلاف جهت دور شدن خود از مخروط، به آن نیرو وارد می‌کنند.




$$Q_۱ = VA_۱ = (۴۰)\left(\frac{\pi \times ۰/۱^۲}{۴}\right) = ۰/۳\ m^۳/s$$

$$Q_۲ = \frac{Q_۱}{۲} = \frac{۰/۳}{۲} = ۰/۱۵ m^۳/s$$ (با توجه به معادله پیوستگی و تقارن نیروهای $F_۲$)

$$F_۱ = \rho Q_۱ V = (۱/۲۵)(۰/۳)(۴۰) = ۱۵\ N$$

$$F_۲ = \rho Q_۲ V = (۱/۲۵)(۰/۱۵)(۴۰) = ۷/۵\ N$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_۱ - ۲F_۲ \cos ۳۰ - mg - F = ۰ \Rightarrow ۱۵ - ۲\times ۷/۵ \cos ۳۰ - (m)(۱۰) - ۰/۲۵ = ۰ \Rightarrow m = ۰/۲\ kg$$

**۸۷- (۲)**

از برابری عدد فرود در مدل و نمونه اصلی نتیجه می‌شود:

$$(Fr)_m = (Fr)_p \Rightarrow \frac{V_m}{\sqrt{g y_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g y_p}} \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{y_m}{y_p}} \Rightarrow \frac{y_m}{y_p} \times \frac{t_p}{t_m} = \sqrt{\frac{y_m}{y_p}} \Rightarrow t_r = \sqrt{L_r}$$

$$\frac{t_m}{۲۴} = \sqrt{\frac{۱}{۴۰۰}} \Rightarrow t_m = ۱/۲$$ ساعت

**۸۸- (۴)**

ابتدا دیمانسیون متغیرهای مؤثر در مسئله و سپس تعداد کمیت‌های بدون بعد را به‌دست می‌آوریم:

$$Q \equiv L^۳T^{-۱},\ \ \rho \equiv ML^{-۳},\ d \equiv L\ ,\ \Delta P \equiv ML^{-۱}T^{-۲}$$

$$j = n - m = ۴ - ۳ = ۱$$

حال با استفاده از روش هانساکر و رایتمایر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} L \equiv d \\ \rho \equiv ML^{-۳} \equiv Md^{-۳} \Rightarrow M \equiv \rho d^۳ \\ \Delta P \equiv ML^{-۱}T^{-۲} \equiv \rho d^۲ T^{-۲} \Rightarrow T \equiv d\sqrt{\frac{\rho}{\Delta P}} \end{cases}$$

$$Q \equiv L^۳T^{-۱} \equiv (d)^۳\left(d\sqrt{\frac{\rho}{\Delta P}}\right)^{-۱} \equiv d^۲\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}} \Rightarrow \pi = \frac{Q}{d^۲\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}} \Rightarrow Q = kd^۲\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

**توجه:** این تست را می‌توانستیم با کنترل دیمانسیون $k$ در هر یک از گزینه‌های نیز پاسخ دهیم. با این روش مشاهده می‌شود که در گزینه (۴)، $k$ بدون بعد و در سایر گزینه‌ها $k$ دارای بعد است.

**۸۹- (۳)**

برای لوله خروجی از توربین داریم:

$$\Delta H_T = f\frac{L}{D}\cdot\frac{V^۲}{۲g} \Rightarrow (۱۰۰-۹۵) = ۰/۰۲\left(\frac{۱۰}{۰/۲}\right)\left(\frac{V^۲}{۲g}\right) \Rightarrow V = ۱۰\ m/s$$

$$Q = VA = (۱۰)\left(\frac{\pi \times ۰/۲^۲}{۴}\right) = ۰/۳\ m/s$$

توربین $N_u = \gamma Q H_T = (۱۰)(۰/۳)(۱۱۰-۱۰۰) = ۳۰\ kW$

**توجه:** البته توان تولیدی توربین قطعاً از این مقدار کمتر است ($\eta < ۱$ و $N_a = \eta N_u$) اما گویا طراح به اشتباه $\eta$ را برابر با یک در نظر گرفته است!

**۹۰- (۳)**

برای حل این مسئله نقطهٔ (۰) را روی سطح آزاد مایع، نقطهٔ (۱) را در مقطع $A$ و نقطهٔ (۲) را در دهانهٔ خروجی نازل در نظر می‌گیریم. سپس معادله پیوستگی جریان را بین دو نقطه (۱) و (۲) می‌نویسیم:

$$Q_1 = Q_2 \ , \ D_1 = 3D_2 \ \Rightarrow \ V_2 = 9V_1$$

حال با استفاده از معادله برنولی بین سطح آزاد مایع (نقطهٔ ۰) و نقطهٔ (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} + z_0 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta H_{(0-2)} \ \Rightarrow \ 0+0+20 = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + 0 + \left(10/9\frac{V_1^2}{2g} + 0/1\frac{V_2^2}{2g}\right)$$

$$\xrightarrow{V_2 = 9V_1} \ 20 = \frac{81V_1^2}{2\times 10} + 10/9\frac{V_1^2}{2\times 10} + 0/1\frac{(81V_1^2)}{2\times 10} = 100\frac{V_1^2}{2\times 10} \ \Rightarrow \ V_1 = 2\ m/s$$

و در نهایت مقدار دبی را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$Q = V_1 A_1 = (2)\left(\frac{\pi \times 0/3^2}{4}\right) = 0/06\ m^3/s = 60\ lit/s$$

**۹۱- (۳)**

با نوشتن معادله برنولی بین سطح آزاد مخازن خواهیم داشت:

$$z_A + H_P = z_B + \Delta H \ \Rightarrow \ H_P = \Delta z + \Delta H = (57-12) + (2/5+6/5) = 54\ m$$

بنابراین توان پمپ با احتساب راندمان، به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \eta_P = \dfrac{N_u}{N_a} \\ N_u = \gamma Q H_P \end{cases} \ \Rightarrow \ N_a = \frac{8\times 150\times 10^{-3}\times 54}{0/8} = 81\ kW$$

**۹۲- (۴)**

ابتدا رژیم جریان را تعیین می‌کنیم:

$$V = \frac{Q}{A} = \left(\frac{90\times 10^{-3}}{\dfrac{\pi\times 0/2^2}{4}}\right) = 3\ m/s$$

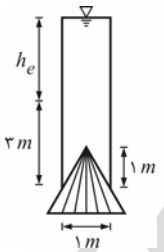
$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{3\times 0/2}{0/001} = 600 < 2000 \ \Rightarrow$$ جریان آرام است.

با توجه به آرام بودن جریان، از رابطه هاگن - پوازی استفاده کرده و می‌نویسیم:

$$\Delta H = \frac{32\mu VL}{\gamma D^2} \ , \ \mu = \rho\nu \ \Rightarrow \ \Delta H = \frac{32\nu VL}{gD^2} = \frac{32\times 0/001\times 3\times 300}{10\times 0/2^2} = 72\ m$$

**۹۳- (۲)**

در حل این مسئله ابتدا بجای فشار نسبی هوا، معادل آن آب جایگزین می‌کنیم و سپس براساس سطح آزاد جدید، وزن ستون آب قرار گرفته برروی مخروط را محاسبه می‌کنیم که برابر نیروی عمودی ناشی از فشار آب و هوا برروی مخروط است.




$$h_e = \frac{P_g}{\gamma_w} = \frac{60}{10} = 6\ m$$

$$F_V = \gamma V = 10\times\left[\left(\frac{\pi\times 1^2}{4}\right)(3+6) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi\times 1^2}{4}\right)(1)\right] = 65\ kN$$

**۹۴- (۳)**

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow \ F_B = Drag + W \ , \ Drag = \frac{1}{2}C_D\rho A V^2 \ \Rightarrow \ \left(\frac{\pi\times 0/04^3}{6}\right)(10^4) = \frac{1}{2}(0/4)(1000)\left(\frac{\pi\times 0/04^2}{4}\right)(V^2) + 0/26$$

$$0/32 = 0/24V^2 + 0/26 \ \Rightarrow \ V^2 = 0/25 \ \Rightarrow \ V = 0/5\ m/s$$

**۹۵- (۴)**

با توجه به تعادل نیروهای وارد بر صفحه میانی، باید داشته باشیم $\tau_{up} = \tau_{bot}$.

$$\tau_{up} = \tau_{bot} \Rightarrow \mu_1\left(\frac{du}{dy}\right)_1 = \mu_2\left(\frac{du}{dy}\right)_2 \Rightarrow \mu_1\left(\frac{V_1 - V_2}{t_1}\right) = \mu_2\left(\frac{V_2 - 0}{t_2}\right) \Rightarrow 0/1\times\left(\frac{2 - V_2}{2}\right) = 0/05\left(\frac{V_2}{1}\right) \Rightarrow V_2 = 1\, m/s$$

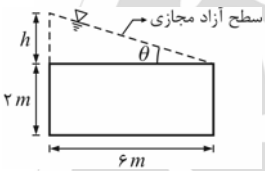
**۹۶- (۱)**

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W = F_B \Rightarrow \begin{cases} W = \gamma_w A(h-10) \\ W = 1/5\,\gamma_w A(h-15) \end{cases} \Rightarrow 1/5\times(h-15) = (h-10) \Rightarrow h = 25\, cm$$

$$W = F_B \Rightarrow \gamma_s Ah = \gamma_w A(h-10) \Rightarrow \frac{\gamma_s}{\gamma_w} = \frac{h-10}{h} = \frac{25-10}{25} = 0/6$$

**۹۷- (۴)**

برای حل مسئله ابتدا شیب سطح آزاد مایع را وقتی مخزن تحت شتاب ثابت $\frac{g}{2}$ قرار دارد، به‌دست می‌آوریم. سپس سطح آزاد مجازی را مطابق شکل زیر ترسیم می‌کنیم:




$$\tan\theta = \frac{a_x}{g} = \frac{\left(\frac{g}{2}\right)}{g} = \frac{1}{2}$$

$$h = 6\times\tan\theta = 6\times\frac{1}{2} = 3\, m$$

با توجه به سطح آزاد ترسیم شده، نمودار توزیع فشار بر روی صفحات جلویی و عقبی مخزن به‌صورت زیر خواهد بود:

و از آنجا مقادیر نیروهای وارد بر صفحات مخزن محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} F_{(Back)} = \left(\frac{3\gamma + 5\gamma}{2}\right)(2\times 2) = 16\gamma \\ F_{(Forward)} = \left(\frac{2\gamma + 0}{2}\right)(2\times 2) = 4\gamma \end{cases} \Rightarrow \frac{F_{(Back)}}{F_{(Forward)}} = \frac{16\gamma}{4\gamma} = 4$$

**۹۸- (۱)**

سرعت برخورد جت به صفحه را با $V$ و سرعت خروج جت از شیپوره را با $V_0$ نشان داده و می‌نویسیم:

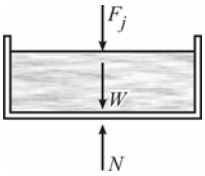
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W = F_j \;,\; F_j = \rho QV \Rightarrow W = \rho QV \quad , \; Q = V_0 A_0$$

$$45 = (1000)\left(15\times\frac{\pi\times 0/02^2}{4}\right)(V) \Rightarrow V = 10\, m/s$$

$$V_0^2 - V^2 = 2gh \Rightarrow 15^2 - 10^2 = 2\times 10\times h \Rightarrow h = 6/25\, m$$

**۹۹- (۱)**

با ترسیم دیاگرام آزاد مخزن (همراه با مایع درون آن) و نوشتن رابطه تعادل نیروها در امتداد قائم، خواهیم داشت:



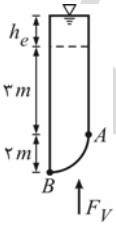

$$F_j = \rho QV = (1000)(0/04)(7/5) = 300\, N$$

$$W = 800 + 1000\times 10\times 0/3\times 1 = 3800\, N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = W + F_j = 3800 + 300 = 4100\, N$$

**۱۰۰- (۴)**

در حل این مسئله بجای فشار نسبی هوا، معادل آن روغن جایگزین می‌کنیم و سپس براساس سطح آزاد جدید و با استفاده از روش مایع مجازی، مقدار نیروی قائم وارد بر صفحهٔ $AB$ را به‌دست می‌آوریم:




$$h_e = \frac{P_g}{\gamma_{oil}} = \frac{16}{8} = 2\, m$$

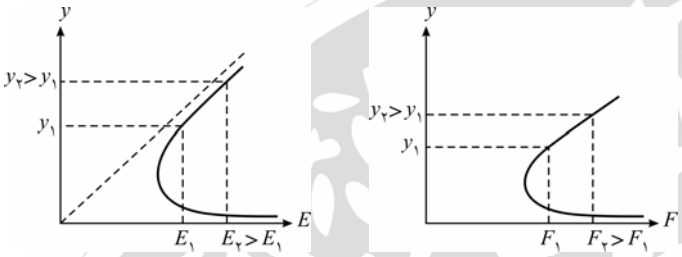
$$F_V = \gamma V = 8\times\left[\frac{1}{4}(\pi\times 2^2) + (5\times 2)\right] = 104\, kN$$

**۱۰۱- (۴)**

در برخورد شیب تند به شیب ملایم، همواره پرش هیدرولیکی رخ می‌دهد، ولی محل آن وابسته به مشخصات و طول شیب‌ها می‌باشد.

**۱۰۲- (۴)**

در پاسخ به این سؤال از نمودارهای $E-y$ و $F-y$ استفاده می‌کنیم. در کانال با شیب $M$ جریان زیر بحرانی است و بایستی شاخه زیر بحرانی این نمودارها در نظر گرفته شوند. همچنین پروفیل $M_1$ یک پروفیل صعودی است که افزایش عمق را نتیجه می‌دهد. از جمع‌بندی مطالب گفته شده، با توجه به نمودارها می‌توان نتیجه گرفت که در راستای جریان با افزایش $F$ و $E$ مواجه می‌شویم.




**۱۰۳- (۳)**

عمق‌های قبل و بعد از برآمدگی، عمق‌های متناوب هم بوده، لذا جریان روی برآمدگی وضعیت بحرانی دارد:

$$y_{\text{برآمدگی}} = y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} = 1/6 \Rightarrow \frac{q^2}{10} = 1/6^3 \Rightarrow q = 6/4\,\frac{m^3/s}{m}$$

**۱۰۴- (۲)**

یکی از روش‌های محاسبهٔ فاصلهٔ طولی بین دو مقطع از جریان، روش عددی اولر است. طبق این روش داریم:

$$y_2 = y_1 + \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_2}\right]\frac{\Delta x}{2}\ ,\ \frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1-Fr^2} = f(y)$$

بنابراین فاصله $\Delta x$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y_2 = y_1 + \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2\right]\frac{\Delta x}{2} \Rightarrow 3/2 = 3 + (0/0007 + 0/0009)\times\frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \Delta x = 250\ m$$

**۱۰۵- (۱)**

به ازاء یک انرژی مخصوص معین، جریان در حالت بحرانی ($Fr=1$)، دبی ماکزیمم را ایجاد می‌کند. لذا به‌ازاء $Fr=1$، دبی جریان ماکزیمم می‌شود.

**۱۰۶- (۲)**

فرض می‌کنیم شیب کانال همواره تند باقی خواهد ماند و تغییر $n$، باعث تغییر نوع شیب ($S$) نمی‌شود. بنابراین جریان به صورت بحرانی وارد کانال شده و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} E_1(n \text{ قبل از تغییر}) = E_{min_1} = E_{\text{دریاچه}} \\ E_2(n \text{ بعد از تغییر}) = E_{min_2} = E_{\text{دریاچه}} \end{cases} \Rightarrow E_{min_1} = E_{min_2}$$

$$E_{min} = 1/5\left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 1/5\left(\frac{q_1^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} = 1/5\left(\frac{q_2^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow q_1 = q_2$$

از آنجا که عرض کانال نیز تغییر نکرده است، می‌توان نوشت:

$$Q = qb \Rightarrow Q_1 = Q_2$$

**۱۰۷- (۲)**

برای کانال ذوزنقه‌ای داریم:

$$\frac{D}{R} = \frac{\left(\frac{A}{T}\right)}{\left(\frac{A}{P}\right)} = \frac{P}{T} = \frac{b+2y\sqrt{1+z^2}}{b+2zy} \xrightarrow{z=1} \frac{D}{R} = \frac{b+2\sqrt{2}\,y}{b+2y}$$

با توجه به بزرگ بودن $y$ در مقابل $b$ (صورت سؤال)، می‌توان از $b$ در صورت و مخرج کسر صرف‌نظر کرده و نوشت:

$$\frac{D}{R} = \frac{2\sqrt{2}\,y}{2y} = \sqrt{2}$$

**۱۰۸- (۲)**

در حالت اول (کانال با شیب $S = ۰/۰۱۵۶$) داریم:

$$\begin{cases} V = \frac{۱}{n} R_۱^{\frac{۲}{۳}} S_۱^{\frac{۱}{۲}} \\ Fr_۱ = \frac{V}{\sqrt{g y_۱}} = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲\sqrt{g y_۱} = \frac{۱}{n} R_۱^{\frac{۲}{۳}} S_۱^{\frac{۱}{۲}} \quad (I)$$

در حالت دوم که قرار است عمق ثابت مانده و جریان از حالت اولیه به حالت بحرانی ($Fr = ۱$) تبدیل شود، خواهیم داشت:

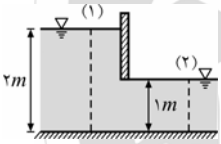
$$\begin{cases} V = \frac{۱}{n} R_۲^{\frac{۲}{۳}} S_۲^{\frac{۱}{۲}} \\ Fr_۲ = \frac{V}{\sqrt{g y_۲}} = ۱ \end{cases} \Rightarrow \sqrt{g y_۲} = \frac{۱}{n} R_۲^{\frac{۲}{۳}} S_۲^{\frac{۱}{۲}} \quad (II)$$

از تقسیم روابط ($I$) و ($II$) بر هم و توجه به اینکه $y_۱ = y_۲$ می‌باشد، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۲\sqrt{g y_۱}}{\sqrt{g y_۲}} = \frac{\frac{۱}{n} R_۱^{\frac{۲}{۳}} S_۱^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{n} R_۲^{\frac{۲}{۳}} S_۲^{\frac{۱}{۲}}} \Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲} = ۴ \Rightarrow S_۲ = \frac{S_۱}{۴} = \frac{۰/۰۱۵۶}{۴} = ۳/۹ \times ۱۰^{-۳}$$

**۱۰۹- (۴)**

با توجه به اصل انرژی و در نظر گرفتن مقطع‌های (۱) و (۲) مطابق شکل روبرو، خواهیم داشت:




$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow y_۱ + \frac{V_۱^۲}{۲g} = y_۲ + \frac{V_۲^۲}{۲g} \Rightarrow y_۱ + \frac{Q^۲}{۲g A_۱^۲} = y_۲ + \frac{Q^۲}{۲g A_۲^۲}$$

سطح مقطع کانال مثلثی از رابطه $A = zy^۲$ بدست می‌آید، بنابراین می‌نویسیم:

$$y_۱ = ۲m \ , \ A_۱ = zy_۱^۲ = ۱ \times ۲^۲ = ۴m^۲ \qquad y_۲ = ۱m \ , \ A_۲ = zy_۲^۲ = ۱ \times ۱^۲ = ۱m^۲$$

حال با جایگذاری این مقادیر در رابطهٔ انرژی، خواهیم داشت:

$$۲ + \frac{Q^۲}{۲ \times ۱۰ \times ۴^۲} = ۱ + \frac{Q^۲}{۲ \times ۱۰ \times ۱^۲} \Rightarrow Q^۲ = \frac{۳۲۰}{۱۵}$$

انرژی مخصوص قبل از مانع، در مقطع (۱)، برابر است با:

$$E_۱ = y_۱ + \frac{Q^۲}{۲g A_۱^۲} = ۲ + \frac{\frac{۳۲۰}{۱۵}}{۲ \times ۱۰ \times ۴^۲} = ۲ + \frac{۱}{۱۵} \Rightarrow E_۱ = ۲\frac{۱}{۱۵} m$$

**۱۱۰- (۲)**

$$\frac{y_۱}{y_۲} = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۱ + ۸Fr_۲^۲} - ۱\right) = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۱ + ۸ \times \left(\frac{\sqrt{۳}}{۵}\right)^۲} - ۱\right) = ۰/۲ \Rightarrow \frac{y_۲}{y_۱} = ۵$$

**۱۱۱- (۲)**

رابطهٔ بین انرژی‌های مخصوص در بالادست جریان و نیز روی برآمدگی در این حالت، به‌صورت مقابل است: $E_۲ = E_۱ - \Delta z - h_f$

از طرفی طبق خواستهٔ مسئله، جریان روی پله بحرانی است، بنابراین باید $E_۲ = E_c$ باشد.

$$\begin{cases} E_۲ = E_c = \frac{۳}{۲} y_c = \frac{۳}{۲}\left(\frac{q^۲}{g}\right)^{\frac{۱}{۳}} \\ q = \frac{Q}{b} = \frac{۱۳/۵}{۵} = ۲/۷ \end{cases} \Rightarrow E_۲ = \frac{۳}{۲} \times \left(\frac{۲/۷^۲}{۱۰}\right)^{\frac{۱}{۳}} = ۱/۳۵ \, m$$

مقدار $E_۱$ نیز برابر است با:

$$E_۱ = y_۱ + \frac{V_۱^۲}{۲g} = ۱/۵ + \frac{V_۱^۲}{۲g}$$

در نهایت با جایگذاری مقادیر $E_۱$، $E_۲$ و $h_f$ در معادلهٔ انرژی مخصوص خواهیم داشت:

$$۱/۳۵ = ۱/۵ + \frac{V_۱^۲}{۲g} - \Delta z - \frac{V_۱^۲}{۲g} \Rightarrow \Delta z = ۰/۱۵ \, m = ۱۵ \, cm$$

**۱۱۲- (۱)**

$$\frac{F_{min}}{b}=\frac{F_c}{b}=y_cE_c=\frac{۳}{۲}y_c^{۲}$$

**۱۱۳- (۲)**

انرژی مخصوص برای کانال‌های مستطیلی برابر است با:

$$E=y+\frac{q^{۲}}{۲gy^{۲}}$$

در جریان مطرح شده، انرژی مخصوص ثابت و برابر $\bar{E}=۱/۵\ m$ می‌باشد.

$$۱/۵=y+\frac{q^{۲}}{۲gy^{۲}}$$

حال از روی نمودار $q-y$ که در صورت سؤال داده شده است، ملاحظه می‌شود که $y_{max}$ به‌ازاء $q=۰$ به‌دست می‌آید، بنابراین خواهیم داشت:

$$۱/۵=y_{max}+۰\ \Rightarrow\ y_{max}=۱/۵\ m$$

در ادامه می‌توان رابطه‌ای برای دبی برحسب $y$ به‌صورت مقابل به‌دست آورد:

$$۱/۵=y+\frac{q^{۲}}{۲gy^{۲}}\ \Rightarrow\ q=[۲gy^{۲}(۱/۵-y)]^{\frac{۱}{۲}}$$

برای ماکزیمم شدن $q$، باید عبارت داخل کروشه ماکزیمم شود، بنابراین می‌نویسیم:

$$\frac{dq}{dy}=۰\ \Rightarrow\ ۲g(۳y-۳y^{۲})=۰\ \Rightarrow\ y=۱m\ \Rightarrow\ q_{max}=[۲gy^{۲}(۱/۵-y)]^{\frac{۱}{۲}}\Big|_{y=۱}=\sqrt{۱۰}\ \frac{m^{۳}/s}{m}$$

**۱۱۴- (۴)**

چون $Fr<۱$ به معنی زیربحرانی بودن جریان است، گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ که معرف جریان فوق‌بحرانی می‌باشند، نادرست بوده و تنها گزینه ۴ می‌تواند صحیح باشد.

**۱۱۵- (۳)**

ابتدا عمق بحرانی کانال را به‌صورت مقابل می‌یابیم:

$$y_c=(\frac{q^{۲}}{g})^{\frac{۱}{۳}}=(\frac{(\frac{۴}{۴})^{۲}}{۱۰})^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۰/۱}\ \ m$$

برای به‌دست آوردن عمق نرمال نیز (با استفاده از نمودار پیوست شدهٔ تعیین عمق نرمال در انتهای دفترچه همین سال) داریم:

$$AR^{\frac{۲}{۳}}=\frac{Qn}{\sqrt{S}}=\frac{۴\times۰/۰۱}{\sqrt{۰/۰۰۱۶}}=۱\ \Rightarrow\ \frac{AR^{\frac{۲}{۳}}}{b^{\frac{۸}{۳}}}=\frac{۱}{\frac{۸}{۴^{۳}}}=\frac{۱}{۴۰}=۰/۰۲۵\ \xrightarrow{\text{نمودار}}\ \frac{y_۰}{b}\simeq۰/۱۲\ \Rightarrow\ y_۰=۰/۱۲\times۴=۰/۴۸\ m$$

حال با توجه به عمق‌های به‌دست آمده می‌توان گفت:

$$y>y_۰>y_c$$

بنابراین پروفیل سطح آزاد شکل گرفته، $M_۱$ بوده و عمق آب در جهت جریان، افزایش می‌یابد.

## سازه‌های فولادی و بتنی

**۱۱۶- (۲)**

ابتدا باید مشخص کنیم کمانش ستون در دو حالت چگونه است، یعنی با داشتن مقدار $\lambda$ و مقایسه آن با مقادیر $C_c$ در دو حالت، الاستیک یا غیرالاستیک بودن کمانش را تعیین کرده و بار مجاز را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases}F_y=۲۴۰۰\ kg/cm^{۲}\ \Rightarrow\ C_c=۱۳۱\\ F_y=۳۶۰۰\ kg/cm^{۲}\ \Rightarrow\ C_c=۱۰۷\end{cases}$$

با توجه به اینکه $\lambda=۱۸۰$ می‌باشد، در هر دو حالت ضریب لاغری از مقدار $C_c$ بیشتر است و بنابراین کمانش ستون در هر دو حالت الاستیک بوده و تنش مجاز فشاری به نوع فولاد ($F_y$) وابسته نمی‌باشد. به عبارتی با تغییر تنش تسلیم فولاد، تنش مجاز فشاری تغییر نمی‌کند. با توجه به این موضوع، بار مجاز ستون در حالت دوم نیز ۱۰۰ تن می‌باشد.

**۱۱۷- (۲)**

می‌دانیم ظرفیت باربری خمشی از رابطهٔ $M_{max} = F_b \times S$ به‌دست می‌آیدکه در آن $F_b$ تنش مجاز خمشی می‌باشد. با توجه به اینکه مقدار $S$ برای هر دو مقطع، یکسان درنظر گرفته شده است، مقطعی که تنش مجاز خمشی بیشتری داشته باشد، ظرفیت خمشی بالاتری خواهد داشت. بنابراین تنش مجاز خمشی را برای هر دو مقطع محاسبه می‌کنیم:

مقطع الف: مهار جانبی شده، خمش حول محور ضعیف و فشرده $\Rightarrow F_b = ۰/۷۵\, F_y$

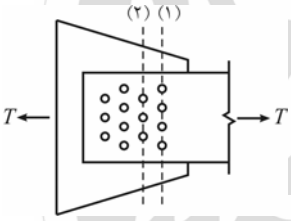
مقطع ب: خمش حول محور قوی و فشرده
$$\begin{cases} \text{مهار جانبی شده} \Rightarrow F_b = ۰/۶۶\, F_y \\ \text{مهار جانبی نشده} \Rightarrow F_b = max\,\{F_{b_۱}, F_{b_۲}\} \le ۰/۶\, F_y \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود در هر صورت (مهار جانبی شده یا مهار جانبی نشده) تنش مجاز خمشی برای مقطع (الف) بیشتر بوده و درنتیجه ظرفیت خمشی آن نیز بیشتر خواهد بود.

**۱۱۸- (۲)**

برای محاسبهٔ سطح‌مقطع خالص ورق، باید مسیرهای بحرانی گسیختگی را پیدا کرده و آنها را کنترل کنیم:

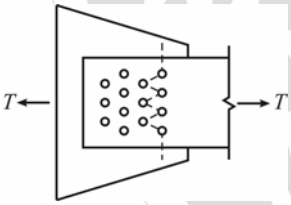
$$b = ۳۰۰ + ۲\times ۴۰ = ۳۸۰\, mm \;,\; t = ۱۲\, mm$$




مسیر ۱:
$$A_{n_۱} = (۳۸۰ - ۴\times ۲۰)\times ۱۲ = ۳۶۰۰\, mm^۲$$

مسیر ۲:
$$A_{n_۲} = \frac{۱۴}{۱۰}(۳۸۰ - ۳\times ۲۰)\times ۱۲ = ۵۳۷۶\, mm^۲$$

مسیر ۳ (مسیر زیگزاگ):

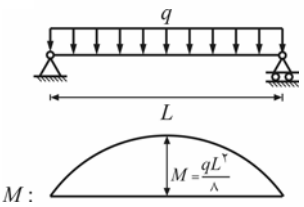



$$A_{n_۳} = \left(۳۸۰ - ۷\times ۲۰ + ۶\times \frac{۴۰^۲}{۴\times ۵۰}\right)\times ۱۲ = ۳۴۵۶\, mm^۲$$

$$A_n = min\,(A_{n_۱}, A_{n_۲}, A_{n_۳}) = ۳۴۵۶\, mm^۲$$

**۱۱۹- (۱)**

ابتدا نیاز به وجود ورق‌های تقویتی را بررسی می‌کنیم. بدین منظور لنگر ایجاد شده در اثر بارگذاری وارد بر تیر را با ظرفیت خمشی مجاز تیر مقایسه می‌کنیم:




$$M = \frac{qL^۲}{۸} = \frac{۲\times ۶^۲}{۸} = ۹\, t.m$$

$$M_\circ = F_b \times S_\circ = ۱۴۴۰\times ۴۲۹ = ۶۱۷۷۶۰\, kg.cm = ۶/۱۸\, t.m$$

با توجه به اینکه لنگر ایجاد شده در اثر بارهای خارجی از ظرفیت خمشی مقطع بیشتر است، به ورق تقویتی نیاز داریم. در ادامه اساس مقطع مورد نیاز برای تحمل لنگر $۹t.m$ را به‌دست آورده و به محاسبهٔ مساحت ورق‌ها با کمک رابطهٔ تقریبی ارائه شده می‌پردازیم:

$$F_b = \frac{M}{S} \;\Rightarrow\; S = \frac{M}{F_b} = \frac{۹\times ۱۰^۵}{۱۴۴۰} = ۶۲۵\, cm^۳$$

$$S_x = (S_x)_{beam} + Ad \;\Rightarrow\; A = \frac{S_x - (S_x)_{beam}}{d} = \frac{۶۲۵ - ۴۲۹}{۲۷} = ۷/۲۶\, cm^۲$$

**۱۲۰- (۳)**

می‌دانیم برای تعیین تنش مجاز خمشی در تیرها، باید وضعیت فشرده یا غیرفشرده بودن مقطع و مهار جانبی بودن یا مهار جانبی نبودن تیر را بررسی کرد. با توجه به یکسان بودن وضعیت فشردگی و تکیه‌گاه‌های جانبی طبق اطلاعات مسئله، دو تیر دارای تنش مجاز خمشی یکسان می‌باشند.

$$\begin{cases} f_{b_1} = \dfrac{M_1}{S_1} = \dfrac{\frac{qL^2}{8}}{S_t} \\ f_{b_2} = \dfrac{M_2}{S_2} = \dfrac{\frac{\alpha q(\frac{L}{2})^2}{8}}{S_t} \end{cases} \quad ; \quad f_{b_1} = f_{b_2} \Rightarrow \dfrac{\frac{qL^2}{8}}{S_t} = \dfrac{\frac{\alpha q(\frac{L}{2})^2}{8}}{S_t} \Rightarrow \alpha = 4$$

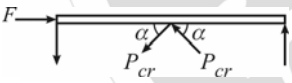
**تذکر ۱:** در تیر یکسرهٔ دو دهانه تحت اثر بار گستردهٔ یکنواخت، بیشترین لنگر در روی تکیه‌گاه میانی رخ می‌دهد و مقدار آن برابر $\frac{qL^2}{8}$ می‌باشدکه $L$ طول هر دهانه است.

**تذکر۲:** با توجه به مهار جانبی بودن تیر، اضافه شدن تکیه‌گاه به وسط، وضعیت مهار جانبی تیر را تغییر نمی‌دهد.

**تذکر ۳:** برای محاسبهٔ تنش خمشی حداکثر، باید لنگر را بر اساس مقطع مینیمم تقسیم کرد. از طرفی در هر دو حالت تنش خمشی حداکثر می‌تواند با تنش مجاز برابر شود و با توجه به یکسان بودن تنش مجاز در هر دو حالت، مقادیر $f_{b_1}$ و $f_{b_2}$ با یکدیگر برابر می‌باشد. توجه شود که در مقاطع غیرفشرده و مهار جانبی شده، تنش مجاز کششی و فشاری در خمش یکسان بوده و برابر $0/6\,F_y$ می‌باشد.

**۱۲۱- (۲)**

ابتدا باید توجه شود که نیروی دو بادبند با یکدیگر برابر می‌باشد (چرا؟) و در لحظهٔ کمانش بادبند سمت راست، مقدار نیروی بادبند سمت چپ نیز برابر $P_{cr}$ می‌باشد:




$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F = 2P_{cr}\cos\alpha \Rightarrow F = 2P_{cr} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}P_{cr}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \times \frac{1}{F.S.},\ L = 5\,m \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^6 \times 1000}{(500)^2} \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 40\,ton$$

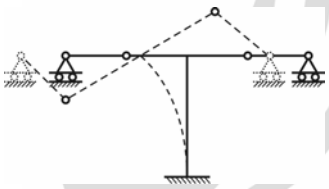
$$F = \frac{6}{5}P_{cr} = \frac{6}{5} \times 40 = 48\,ton$$

**تذکر:** بادبند سمت چپ تحت بار نشان داده شده به‌صورت کششی عمل کرده و کمانش نمی‌کند و تنها مقدار نیروی آن برابر $P_{cr}$ بادبند سمت راست است.

**۱۲۲- (۴)**

در این قاب هیچ مانعی برای جلوگیری از حرکت جانبی وجود ندارد و قاب مهار جانبی نشده محسوب می‌شود، بنابراین ضریب طول مؤثر ستون مربوطه لزوماً بزرگتر از یک خواهد بود.

در ادامه با توجه به اینکه انتهای ستون می‌تواند نسبت به آن جابه‌جا شود، یک تغییرشکل فرضی برای قاب در نظر می‌گیریم، همانطور که در شکل زیر ملاحظه می‌شود انتهای ستون می‌تواند آزادانه جابه‌جا شود که در این صورت می‌توانیم آن را مانند یک ستون یکسر گیردار، یکسر آزاد در نظر بگیریم که در آن $K = 2$ می‌باشد.



**۱۲۳- (۴)**

برای محاسبهٔ ضریب تشدید لنگر، ابتدا مقادیر $f_a$ و $F'_e$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f_a=\frac{P}{A}=\frac{۶۰\times۱۰^۳}{۱۰۰}=۶۰۰\ kg/cm^۲\ ,\quad F'_e=\frac{۱۲}{۲۳}\frac{\pi^۲E}{\lambda^۲}=\frac{۱۲}{۲۳}\times\frac{۱۰\times۲/۳\times۱۰^۶}{\lambda^۲}=\frac{۱۲\times۱۰^۶}{\lambda^۲}$$

در نهایت با به‌دست آوردن ضریب $C_m$ برای هر گزینه، ضریب تشدید لنگر را به‌دست می‌آوریم:

$$A_m=\frac{C_m}{۱-\frac{f_a}{F'_e}}=\frac{C_m}{۱-\frac{۶۰۰}{\frac{۱۲\times۱۰^۶}{\lambda^۲}}}=\frac{C_m}{۱-\frac{\lambda^۲}{۲\times۱۰^۴}}$$

$(a)$ تیر ستون: $\begin{cases}C_m=۰/۸۵\ \text{(مهار جانبی‌نشده)}\\ \lambda=۱۰۰\Rightarrow A_m=\dfrac{۰/۸۵}{۱-\dfrac{۱۰۰^۲}{۲\times۱۰^۴}}=۱/۷\end{cases}$

$(b)$ تیر- ستون: $\begin{cases}C_m=۰/۶-۰/۴\left(\dfrac{M_۱}{M_۲}\right)=۰/۶-۰/۴\left(\dfrac{-۱}{۴}\right)=۰/۷\\ \lambda=۱۱۰\Rightarrow A_m=\dfrac{۰/۷}{۱-\dfrac{۱۱۰^۲}{۲\times۱۰^۴}}=۱/۷۷\end{cases}$

$(c)$ تیر- ستون: $\begin{cases}C_m=۰/۶-۰/۴\times(۱)=۰/۲<۰/۴\Rightarrow C_m=۰/۴\\ \lambda=۱۱۰\Rightarrow A_m=\dfrac{۰/۴}{۱-\dfrac{۱۱۰^۲}{۲\times۱۰^۴}}=۱/۰۱\end{cases}$

$(d)$ تیر- ستون: $\begin{cases}C_m=۱\ \text{(ستون دوسر مفصل با بار جانبی)}\\ \lambda=۱۰۰\Rightarrow A_m=\dfrac{۱}{۱-\dfrac{۱۰۰^۲}{۲\times۱۰^۴}}=۲\end{cases}$

بنابراین تیرستون $(d)$ بیشترین ضریب تشدید لنگر را دارد.

**۱۲۴- (۱)**

در این تیرستون با انتقال نیروهای محوری به نقطهٔ $B$ مقادیر $M_x$، $M_y$ و $P$ عبارتند از:

$$M_x=۱۰\times۱=۱۰t.m=۱۰^۶kg.cm\ ,\ P=۱۰+۱=۱۱ton=۱۱۰۰۰kg$$

$$M_y=۱\times۱=۱t.m=۱۰^۵\ kg.cm$$

در ادامه با بررسی نسبت $\frac{f_a}{F_a}$، وضعیت تشدید لنگر در ستون را مشخص می‌کنیم:

$$f_a=\frac{P}{A}=\frac{۱۱۰۰۰}{۱۰۶}=۱۰۴\ kg/cm^۲$$

$$\frac{f_a}{F_a}=\frac{۱۰۴}{۸۹۰}\simeq۰/۱۲<۰/۱۵$$

در نتیجه موضوع تشدید لنگر در این ستون حائز اهمیت نبوده و معیار مقاومت بر طراحی آن حاکم است. بنابراین به محاسبهٔ مقادیر $f_{bx}$ و $f_{by}$ و کنترل معیار مقاومت می‌پردازیم:

$$f_{bx}=\frac{M_x}{S_x}=\frac{۱۰^۶}{۹۳۸}=۱۰۶۶\ kg/cm^۲\ ,\quad f_{by}=\frac{M_y}{S_y}=\frac{۱۰^۵}{۳۲۷}=۳۰۶\ kg/cm^۲$$

$$\frac{f_a}{F_a}+\frac{f_{bx}}{F_{bx}}+\frac{f_{by}}{F_{by}}=\frac{۱۰۴}{۸۹۰}+\frac{۱۰۶۶}{۰/۶\times۲۴۰۰}+\frac{۳۰۶}{۰/۷۵\times۲۴۰۰}\simeq۱/۰۳$$

با توجه به این که باید حاصل‌جمع فوق به یک محدود شود، بنابراین این تیرستون مورد تأیید نبوده و از ۱۰۰ درصد ظرفیت آن استفاده شده است.

**تذکر:** در خمش حول محور ضعیف با توجه به فشرده بودن مقطع، مقدار $F_{by}$ برابر $۰/۷۵\,F_y$ درنظر گرفته شده است.

**۱۲۵- (۴)**

همانطور که می‌دانیم، ابعاد صفحه‌ستون با توجه به تنش لهیدگی بتن فونداسیون محاسبه می‌شود، پس داریم:

$$f_p = \frac{P}{B \times D} \le F_p \;\Rightarrow\; B \times D = \frac{P}{F_p} = \frac{۲۴۰ \times ۱۰^۳}{۸۰} = ۳۰۰۰\, cm^۲ \;\Rightarrow\; B \times D = ۳۰۰۰ \quad (I)$$

از رابطه فوق ابعاد متفاوتی را می‌توان به‌دست آورد. از طرفی برای بهینه شدن طراحی باید مقادیر $m$ و $n$ با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} m = \dfrac{D - ۰/۹۵d}{۲} = \dfrac{D - ۰/۹۵ \times ۴۰}{۲} = \dfrac{D - ۳۸}{۲} \\ n = \dfrac{B - ۰/۸b_f}{۲} = \dfrac{B - ۰/۸ \times ۳۰}{۲} = \dfrac{B - ۲۴}{۲} \end{cases}$$

$$m = n \;\Rightarrow\; D - ۳۸ = B - ۲۴ \;\Rightarrow\; D = B + ۱۴ \qquad (II)$$

از روابط $(I)$ و $(II)$ خواهیم داشت:

$$(I),(II) \;\Rightarrow\; B\,(B + ۱۴) = ۳۰۰۰ cm^۲ \;\Rightarrow\; B = ۴۸/۲cm \;,\; D = ۶۲/۲cm$$

با توجه به مقادیر محاسبه شده بالا و با توجه به گزینه‌ها، از یک صفحه به ابعاد $D = ۶۰cm$ و $B = ۵۰cm$ استفاده می‌کنیم. در ادامه برای محاسبهٔ ضخامت از رابطهٔ $t \ge ۲m'\sqrt{\dfrac{f_p}{F_y}}$ استفاده می‌کنیم:

$$f_p = \frac{P}{A} = \frac{۲۴۰ \times ۱۰^۳}{۵۰ \times ۶۰} = ۸۰\, kg/cm^۲$$

$$\begin{cases} m = \dfrac{D - ۰/۹۵d}{۲} = \dfrac{۶۰ - ۰/۹۵ \times ۴۰}{۲} = ۱۱ \\ n = \dfrac{B - ۰/۸b_f}{۲} = \dfrac{۵۰ - ۰/۸ \times ۳۰}{۲} = ۱۳ \end{cases}$$

$$m' = max\,\{m, n\} = ۱۳ \;\Rightarrow\; t = ۲ \times ۱۳\sqrt{\frac{۸۰}{۳۰۰۰}} \;\Rightarrow\; t \simeq ۴/۲۴\, cm$$

با توجه به گزینه‌ها، برای صفحه‌ستون از ورق $۶۰ \times ۵۰ \times ۴/۵\, cm$ استفاده می‌کنیم.

**۱۲۶- (۴)**

در بتن با مقاومت فشاری بالاتر، کرنش نظیر بیشترین مقاومت فشاری تقریباً ثابت بوده ولی کرنش نهایی با افزایش مقاومت فشاری کاهش می‌یابد.

**۱۲۷- (۲)**

در مقاطع $T$ شکل با عملکرد $T$ شکل، فولاد بالانس عبارت است از:

$$\begin{cases} A_{s_b}^T = A_{s_f} + A_{s_b} \\ A_{s_f} = ۰/۸۵ \dfrac{\phi_c}{\phi_s} \dfrac{f_c}{f_y} (b - b_w)\, h_f \;,\; A_{s_b} = ۰/۸۵ \beta_۱ \dfrac{\phi_c}{\phi_s} \dfrac{f_c}{f_y} \dfrac{۶۰۰}{۶۰۰ + f_y} b_w\, d \end{cases}$$

$$A_{s_f} = ۰/۸۵ \times ۱ \times \frac{۳۰}{۴۰۰} \times ۱۷۰ \times (۶۰۰ - ۲۸۰) = ۳۴۶۸\, mm^۲$$

$$A_{s_b} = ۰/۸۵ \times ۰/۸۵ \times ۱ \times \frac{۳۰}{۴۰۰} \times \frac{۶۰۰}{۶۰۰ + ۴۰۰} \times ۲۸۰ \times ۶۵۰ = ۵۹۱۷\, mm^۲$$

$$A_{s_b}^T = ۳۴۶۸ + ۵۹۱۷ = ۹۳۸۵\, mm^۲$$

**۱۲۸- (۲)**

با افزایش فولاد فشاری $(\rho')$، $\overline{\rho}_b$ یعنی فولاد متوازن مقطع در حالت مقطع دارای فولاد فشاری افزایش می‌یابد. در این صورت اگر فولاد کششی $(\rho)$ در مقطع ثابت باشد، اختلاف $\rho$ و $\overline{\rho}_b$ بیشتر شده و گویی مقطع کم فولادتر می‌شود. به عبارت بهتر، مقطع کم فولادتر یعنی مقطع شکل‌پذیرتر که با افزودن فولاد فشاری، شکل‌پذیری افزایش می‌یابد.

**۱۲۹- (۴)**

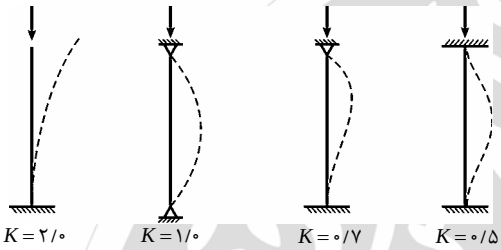
با توجه به مفاهیم بلوک توزیع تنش ویتنی، عبارت گزینهٔ ۴ دلیل استفاده از توزیع تنش معادل است.

**۱۳۰- (۳)**

مطابق تعریف، طول مهاری طولی است که در آن، تنش در آرماتور می‌تواند از صفر به حد جاری شدن فولاد برسد.

**۱۳۱- (۲)**

ضریب طول مؤثر $K$ را می‌توان برای ستون‌های با شرایط تکیه‌گاهی خاص، با توجه به اشکال زیر تعیین کرد.




ضریب طول مؤثر در قاب‌های مهار شده (بدون حرکت جانبی) بین ۰/۵ تا ۱/۰ و در قاب‌های مهار نشده (با حرکت جانبی) بین ۱ تا $\infty$ می‌باشد و ستون داده شده همانند یک تیر کنسولی عمل می‌کند که ضریب طول مؤثر در آن ۲ می‌باشد:

$$r=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{۱}{۱۲}b\,h^{۳}}{b\,h}}=\sqrt{\frac{h^{۲}}{۱۲}}=\sqrt{\frac{۶۰۰^{۲}}{۱۲}}\simeq ۱۷۳\ mm$$

چون ستون به‌صورت منفرد ساخته شده و قیدی در برابر حرکت جانبی آن وجود ندارد، همانند ستون در یک قاب مهار نشده عمل می‌کند و در این صورت حداکثر ضریب لاغری آن براساس آیین‌نامه برابر ۲۲ می‌باشد.

$$\frac{Kl_u}{r}=\frac{۲\times l_u}{۱۷۳}\le ۲۲\ \Rightarrow\ l_u\le ۱۹۰۳\ mm=۱/۹\ m$$

**۱۳۲- (۱)**

**روش اول:** برای بارگذاری‌های خمشی و محوری به‌صورت خالص داریم:

$$M_{\circ}=\rho f_y\,b\,d^{۲}\left(۱-۰/۵۹\rho\frac{f_y}{f_c}\right)\ ,\ T_{\circ}=f_y\,A_s$$

در صورتی که بار کششی $\frac{۲}{۳}T_{\circ}$ به مقطع وارد شود، چون $A_s$ ثابت است پس تنش در فولادها در این حالت $\frac{۲}{۳}f_y$ خواهد بود. چون تنش حداکثر فولادها $f_y$ است، پس به مقدار $\frac{۱}{۳}f_y$ نیروی کششی اضافی ناشی از خمش می‌تواند به فولادها وارد شود. بنابراین می‌توان فرض کرد که تنش تسلیم فولادها از ابتدای بارگذاری خمشی $\frac{۱}{۳}f_y$ است.

$$M'=\rho\left(\frac{۱}{۳}f_y\right)b\,d^{۲}\left(۱-۰/۵۹\rho\frac{\frac{۱}{۳}f_y}{f_c}\right)$$

تغییرات عبارت داخل پرانتز دوم ناچیز است و می‌توان از آن صرفنظر کرد. بنابراین ظرفیت خمشی مقطع ($M'$) تقریباً یک سوم $M_{\circ}$ خواهد بود.

**روش دوم:** در این‌گونه مسائل با توجه به رابطهٔ خطی در ناحیهٔ نیروی کششی در منحنی اندرکنش ستون می‌توان نوشت:

$$\frac{T}{T_{\circ}}+\frac{M}{M_{\circ}}=۱$$

$$\frac{\frac{۲}{۳}T_{\circ}}{T_{\circ}}+\frac{M}{M_{\circ}}=۱\ \Rightarrow\ M=\frac{۱}{۳}M_{\circ}$$

**۱۳۳- (۳)**

در جان مقطع از دو نوع آرماتور برشی استفاده شده است که ظرفیت آنها را باید با هم جمع کنیم. آرماتور $\Phi ۱۲$ در فواصل $۱۰۰\ mm$ به‌صورت دو شاخه و آرماتور $\Phi ۱۰$ در فواصل $۸۰\ mm$ به‌صورت قلاب (تک‌شاخه) به کار رفته است.

$$V_s=\sum A_{sv}f_{yv}\frac{d}{s}=\left(\frac{۲\times\pi\times ۱۲^{۲}}{۴}\right)\times ۴۰۰\times\frac{۸۰۰}{۱۰۰}+\left(\frac{۱\times\pi\times ۱۰^{۲}}{۴}\right)\times ۳۰۰\times\frac{۸۰۰}{۸۰}$$

$$V_s=۶۹۱۲۰۰+۲۲۵۰۰۰=۹۱۶۲۰۰\ N=۹۱۶/۲\ kN$$

دقت شود که آرماتورهای عرضی در بال تیر، در تحمل برش نقش کمی داشته و از آن صرف‌نظر می‌شود.

**۱۳۴- (۱)**

در صورتی که بخواهیم خاموت‌های بستهٔ پیچشی را تنها در یکی از مستطیل‌های مقطع $L$ شکل یا $T$ شکل قرار دهیم، مستطیل بزرگتر را انتخاب می‌کنیم تا حاصل عبارت $x^{۲}y$ ماکزیمم شود.

**۱۳۵- (۳)**

اثر مقاوم فولادهای طولی در مقاومت برشی در عبارت $V_c$ ، به‌صورت عبارت $\rho_w$ ظاهر می‌شود.

$$V_c = \left(۰/۱۹\,\phi_c\sqrt{f_c} + ۱۲\,\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right) b_w\, d$$

## راهسازی و روسازی راه

**۱۳۶- (۴)**

گزینه‌ها را تک‌تک بررسی می‌کنیم:

گزینه اول) **ناصحیح:** مقدار بربلندی مطابق رابطه $e = \frac{V^{۲}}{۱۲۷R} - f$ به شعاع قوس بستگی دارد.

گزینه دوم) **ناصحیح:** مقدار حداکثر بربلندی به نوع راه نیز بستگی دارد و برای آزادراه بیش‌ترین مقدار و برای راه فرعی کم‌ترین مقدار را داراست.

گزینه سوم) **ناصحیح:** مطابق رابطه $R = \frac{V^{۲}}{۱۲۷(e+f)}$ ، با افزایش مقدار بربلندی، شعاع قوس لازم کاهش خواهد یافت.

$$\text{کاهش} \downarrow R = \frac{V^{۲}}{۱۲۷(\underset{\text{افزایش}\uparrow}{e}+f)}$$

گزینه چهارم) **صحیح:** حداکثر مقدار بربلندی در منطقه سردسیر کم‌تر از حداکثر مقدار بربلندی در منطقه سردسیر است؛ چراکه احتمال سُرخوردن وسیله نقلیه در جهت بزرگ‌ترین شیب در منطقه سردسیر بیش‌تر است.

**۱۳۷- (۱)**

از رابطهٔ درجه قوس، شعاع را محاسبه می‌کنیم.

$$D = \frac{۵۷۳}{R} = ۳ \Rightarrow R = \frac{۵۷۳}{۳} \Rightarrow R = ۱۹۱\ m$$

حال از رابطهٔ حداقل شعاع قوس، میزان دِوِر بدست می‌آید:

$$R = \frac{V^{۲}}{۱۲۷(e+f)} \Rightarrow ۱۹۱ = \frac{۸۰^{۲}}{۱۲۷(e+۰/۱۴)}$$

$$e + ۰/۱۴ = \frac{۸۰^{۲}}{۱۲۷\times۱۹۱} = ۰/۲۶$$

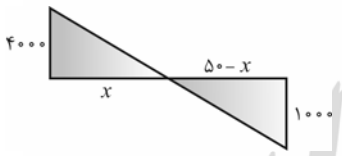
$$e = ۰/۱۲$$

**۱۳۸- (۲)**

از رابطه فاصله متوسط حمل خواهیم داشت:

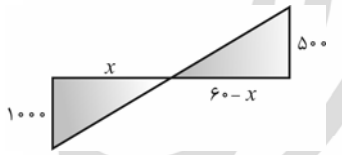
$$\text{فاصله متوسط حمل} = \frac{\text{سطح زیر نمودار}}{\text{حجم}}$$

ابتدا کیلومتراژ نقاط مربوط به تبدیل خاکبرداری به خاکریزی و بالعکس را محاسبه می‌کنیم.




$$\frac{x}{۴۰۰۰} = \frac{۵۰-x}{۱۰۰۰} \Rightarrow ۲۰۰ - ۴x = x \Rightarrow ۵x = ۲۰۰$$

$$\Rightarrow x = ۴۰\ m \Rightarrow KM_C = ۰ + ۱۴۰\ m$$




$$\frac{x}{۱۰۰۰} = \frac{۶۰-x}{۵۰۰} \Rightarrow ۱۲۰ - ۲x = x \Rightarrow ۳x = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow x = ۴۰\ m \Rightarrow KM_E = ۰ + ۱۹۰\ m$$

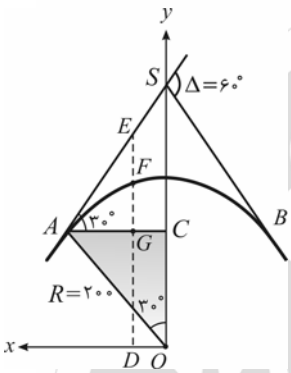
$$\text{فاصله متوسط حمل} = \frac{\frac{۴۰۰۰\times۱۴۰}{۲} + \frac{۱۰۰۰\times۵۰}{۲} + \frac{۵۰۰\times۲۰}{۲}}{۴۰۰۰+۱۰۰۰+۵۰۰} = \frac{۳۱۰۰۰۰}{۵۵۰۰} = ۵۶/۳\ m$$

**۱۳۹- (۲)**

زمان عکس‌العمل در خیابان‌های شهری کمتر از جاده‌های برون‌شهری می‌باشد. در خیابان‌های شهری انتظار (*Expectancy*) وجود دارد که به دلیل آشنایی رانندگان با محیط است. در جاده‌های برون‌شهری چنین حالتی وجود ندارد و در نتیجه زمان درک و عکس‌العمل بیش‌تر از خیابان‌های شهری خواهد بود.

**۱۴۰- (۴)**

ابتدا معادله دایره را برای نقطه $F$ روی قوس می‌نویسیم:




$$x^{۲}+y^{۲}=R^{۲}$$

$$\begin{cases} x=۲۰\ m \\ R=۲۰۰\ m \end{cases} \Rightarrow \quad y=۱۹۸/۹۹۷\ m$$

$$FD=y=۱۹۸/۹۹۷\ m$$

در مثلث $\overset{\Delta}{OAC}$ می‌توان نوشت:

$$OC=R\cos ۳۰^{\circ}$$

$$OC=۲۰۰\cos ۳۰^{\circ}=۱۷۳/۲\ m$$

از طرفی $GD=OC$ می‌باشد:

$$FG=FD-GD=۱۹۸/۹۹۷-۱۷۳/۲=۲۵/۷۹۷\ m$$

حال در مثلث‌های $\overset{\Delta}{AGE}$ و $\overset{\Delta}{ACS}$ قضیه تالس را می‌نویسیم:

$$\frac{EG}{SC}=\frac{AG}{AC}$$

در مثلث $\overset{\Delta}{ACS}$ داریم:

$$SC=AS\sin ۳۰$$

و خود $AS$ همان طول تانژانت یعنی $T=R\tan\frac{\Delta}{۲}$ می‌باشد.

$$SC=(R\tan ۳۰)\sin ۳۰=۵۷/۷۴\ m$$

و در مثلث $\overset{\Delta}{OAC}$ خواهیم داشت:

$$AC=R\sin ۳۰=۱۰۰\ m$$

$$AG=AC-GC \Rightarrow AG=۱۰۰-۲۰ \Rightarrow AG=۸۰\ m$$

سپس به‌دست می‌آید:

$$\frac{EG}{۵۷/۷۴}=\frac{۸۰}{۱۰۰} \Rightarrow EG=۴۶/۱۹۲\ m$$

$$EF=EG-FG=۴۶/۱۹۲-۲۵/۷۹۷=۲۰/۳۹\simeq ۲۰/۴۰\ m$$

**۱۴۱- (۳)**

معادلهٔ سهمی قائم در حالت کلی:

$$Z=\frac{g_{۲}-g_{۱}}{۲L}x^{۲}+g_{۱}x+Z_A$$

ابتدا طول قوس قائم را بدست می‌آوریم:

$$L=KA=K\left|g_{۲}-g_{۱}\right|=۱۰۰\left|-۲-۱\right|=۳۰۰\ m$$

سپس ارتفاع نقطهٔ شروع را محاسبه می‌کنیم:

$$Z_A=Z_I-g_{۱}\times\frac{L}{۲}=۱۵۰۰-۰/۰۱\times\frac{۳۰۰}{۲}=۱۴۹۸/۵\ m$$

و در نهایت معادله‌ای سهمی بدست می‌آید:

$$Z=\frac{-۰/۰۲-۰/۰۱}{۲\times ۳۰۰}x^{۲}+\frac{۱}{۱۰۰}x+۱۴۹۸/۵$$

$$Z=۱۴۹۸/۵+\frac{x}{۱۰۰}-\frac{x^{۲}}{۲۰۰۰۰}$$

**۱۴۲- (۱)**

$$L_i = \frac{\pi R\,\theta_i}{۱۸۰} \Rightarrow ۴۵ = \frac{\pi \times ۲۰۰ \times \theta_i}{۱۸۰}$$

$$\theta_i = ۱۳/۵^\circ$$

$$D_{y_i} = R(۱ - \cos\theta_i) = ۲۰۰(۱ - \cos ۱۳/۵) = ۶\ m$$

$$D_{x_i} = R(\tan\frac{\Delta}{۲} - \sin\theta_i) = ۲۰۰(\tan ۲۰ - \sin ۱۳/۵) = ۲۶\ m$$

$$D_i = \sqrt{D_{x_i}^۲ + D_{y_i}^۲} = ۲۶/۶۸ \simeq ۲۶/۷\ m$$

$$\tan\alpha_i = \frac{D_{y_i}}{D_{x_i}} = \frac{۶}{۲۶} = ۰/۲۳$$

$$\alpha_i = \tan^{-۱} ۰/۲۳ = ۱۳^\circ$$

**۱۴۳- (۲)**

گشتاور = نیرو × بازو

گشتاور نیروی محرک $= (\frac{mV^۲}{R}\cos\beta)\times\overline{Y}$

گشتاور نیروهای مقاوم $= (\frac{mV^۲}{R}\sin\beta)\times\overline{X} + (mg\cos\beta)\times\overline{X} + (mg\sin\beta)\times\overline{Y}$

گشتاور نیروهای مقاوم = گشتاور نیروی محرک

$$(\frac{mV^۲}{R}\cos\beta)\times\overline{Y} = (\frac{mV^۲}{R}\sin\beta)\times\overline{X} + (mg\cos\beta)\times\overline{X} + (mg\sin\beta)\times\overline{Y}$$

$$(\frac{mV^۲}{Rg})\times\overline{Y} = (\frac{mV^۲}{Rg}\tan\beta)\times\overline{X} + (mg\cos\beta)\times m\overline{X} + (m\tan\beta)\overline{Y}$$

$$\frac{V^۲}{Rg} = (\overline{Y} - \overline{X}\tan\beta) = \overline{X} + \overline{Y}\tan\beta \Rightarrow \frac{V^۲}{Rg} = \frac{\overline{X} + \overline{Y}\tan\beta}{\overline{Y} - \overline{X}\tan\beta}$$

**۱۴۴- (۳)**

حجم عملیات خاکی تصحیح شده در قوس از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V = \frac{A_۱ + A_۲}{۲}\times L + C_e$$

که در آن $C_e$ مقدار تصحیح حجم عملیات خاکی نسبت به حالت مستقیم است که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C_e = \frac{L}{۲R}(A_۱ e_۱ + A_۲ e_۲)$$

علامت $e_۱$ و $e_۲$ هنگامی که در سمت خارجی محور راه باشند مثبت و هنگامی که در سمت داخلی محور راه باشند منفی لحاظ می‌گردد. در مورد این تست $e_۱ > ۰$ و $e_۲ < ۰$ خواهد بود.

$$C_e = \frac{۳۰}{۲\times ۲۰۰}(۱۰\times ۰/۷) + ۸\times(-۰/۳)) = ۰/۳۴۵\ m^۳$$

$$V = \frac{A_۱ + A_۲}{۲}\times L + C_e = \frac{۱۰ + ۸}{۲}\times ۳۰ + ۰/۳۴۵ = ۲۷۰/۳۴۵ \simeq ۲۷۰/۳۵\ m^۳$$

**۱۴۵- (۱)**

از رابطه حداقل طول قوس کلوتوئید بر مبنای محدود نمودن تغییرات شتاب جانبی استفاده می‌کنیم.

$$L_S = \frac{V^۳}{۲۸}(\frac{۱}{R_۱} - \frac{۱}{R_۲}) = \frac{۱۰۰^۳}{۲۸}(\frac{۱}{۴۰۰} - \frac{۱}{۵۰۰}) = ۱۷/۸۶\ m$$

**۱۴۶- (۴)**

این تست در واقع یک مسئله هیدرولیک است.

$$\frac{Q^{۲}}{g}=\frac{A^{۳}}{b}$$

$$b=۳+۴d_c$$

$$A=\frac{(۶+۴d_c)}{۲}\times d_c=(۳+۲d_c)\,d_c \;\Rightarrow\; \frac{(۲۸)^{۲}}{۹/۸}=\frac{(۳+۲d_c)^{۳}d_c^{\,۳}}{۳+۴d_c}$$

از سعی و خطا نتیجه می‌شود:

$$d_c=۱/۵\ m$$

**۱۴۷- (۳)**

**روش اول:** روش دقیق

$$\frac{z}{a}=\frac{۱۵}{۱۵}=۱\ ,\ \frac{r}{a}=\frac{۰}{۱۵}=۰$$

میزان افت و خیز قائم $\Delta_z=\frac{P(۱+\mu)a}{E}\left[\frac{z}{a}A+(۱-\mu)H\right]$

$$\begin{cases}\frac{z}{a}=۱\\ \frac{r}{a}=۰\end{cases}\Rightarrow A=۰/۲۹۲۸۲\qquad H=۰/۸۲۲۸۴$$

با جایگذاری مقادیر در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\Delta_z=\frac{۵\times۱/۵\times۱۵}{۱۳۰۰}\left[(۱\times۰/۲۹۲۸۲)+(۰/۵\times۰/۸۲۲۸۴)\right]=۰/۰۶۱\,cm$$

**روش دوم:** روش تقریبی : $\Delta_z=۱/۵\beta\frac{Pa}{E_{۲}}\;\Rightarrow\;\Delta_z=۱/۵\times۰/۸\times\frac{۵\times۱۵}{۱۳۰۰}=۰/۰۶۹\,cm=۰/۶۹\ mm$

**۱۴۸- (۴)**

$$SN=\frac{۱}{۲/۵}(a_{۱}D_{۱}+a_{۲}D_{۲}+a_{۳}D_{۳})$$

$$۵=\frac{۱}{۲/۵}(a_{۱}D_{۱}+a_{۲}D_{۲})+\frac{۱}{۲/۵}(a_{۳}D_{۳})$$

$$۵=۳+\frac{۱}{۲/۵}(a_{۳}D_{۳})\;\Rightarrow\;۲=\frac{۱}{۲/۵}(۰/۴۲D_{۳})$$

$$D_{۳}=\frac{۵}{۰/۴۲}=۱۱/۹\simeq۱۲\,cm$$

**۱۴۹- (۱)**

$V_b=۰/۱۲۷$ حجم قیر

$V_a=۰/۸۶۳$ حجم مصالح سنگی

$$C_v=\frac{V_a}{V_a+V_b}=\frac{۰/۸۶۳}{۰/۱۲۷+۰/۸۶۳}=۰/۸۷۲$$

$$n=۰/۸۳\ log\ \frac{۴\times۱۰^{۵}}{S_b}=۰/۸۳\ log\ \frac{۴\times۱۰^{۵}}{۱۰۰۰}=۲/۱۶$$

$$S_m=S_b\left[۱+(\frac{۲/۵}{n})(\frac{c_v}{۱-c_v})\right]^{n}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در $S_m$ به‌دست می‌آید:

$$S_m=۱۱۱۹۶۵\simeq۱۱۲۰۰۰\,kg/cm^{۲}$$

**۱۵۰- (۳)**

ترک‌های پوست سوسماری با ترک خوردن تمام و یا قسمتی از سطح رویه آسفالتی به شکل تکه‌های نسبتاً کوچک چندضلعی ظاهر شده و با تکرار بارگذاری (خستگی) بر وسعت خرابی آنها افزوده می‌شود.

**۱۵۱- (۲)**

جهت جلوگیری از نفوذ هوا و در نتیجه سفت و شکننده شدن قیر که موجب اکسیداسیون و پیر شدگی آن می‌شود، حجم فضای خالی آسفالت نباید از یک حد معین بیشتر باشد.

**۱۵۲- (۴)**

$$FI = ۳۰\times(|T_{\text{دی}} + T_{\text{بهمن}} + T_{\text{اسفند}}|)$$
$$= ۳۰\times(۱۵) = ۴۵۰ \text{ روز درجه}$$

**۱۵۳- (۱)**

ابتدا اعداد $CBR$ را به صورت صعودی می‌نویسیم.

| درصد تعداد $CBR$ بزرگتر یا مساوی | تعداد $CBR$ بزرگتر یا مساوی | $CBR$ |
|---|---|---|
| ۱۰۰ | ۱۰ | ۳ |
| ۱۰۰ | ۱۰ | ۳ |
| ۸۰ | ۸ | ۴ |
| ۷۰ | ۷ | ۵ |
| ۶۰ | ۶ | ۶ |
| ۶۰ | ۶ | ۶ |
| ۴۰ | ۴ | ۷ |
| ۳۰ | ۳ | ۸ |
| ۲۰ | ۲ | ۹ |
| ۱۰ | ۱ | ۹ |

هفتاد درصد $CBR$ ها از این $CBR$ $(CBR = ۵)$ بزرگتر یا مساوی‌اند.

**۱۵۴- (۲)**

$$M \begin{cases} \dfrac{z}{a} = \dfrac{۰}{۱۵} = ۰ \\ \dfrac{r}{a} = \dfrac{۰}{۰} = \infty \end{cases} \Rightarrow A = ۱ \Rightarrow H = ۰$$

$$N \begin{cases} \dfrac{z}{a} = \dfrac{۱۰}{۱۵} = \dfrac{۲}{۳} \\ \dfrac{r}{a} = \dfrac{۰}{۱۵} = ۰ \end{cases} \Rightarrow A = ۰/۲۹۲۸۲ \Rightarrow H = ۰/۳۵۳۵۵$$

تنش قائم در نقطه $M$ $\sigma_M = P(A+H) = ۵(۱+۰) = ۵ \ kg/cm^۲$

تنش قائم در نقطه $N$ $\sigma_N = P(A+H) = ۵(۰/۲۹۲۸۲+۰/۳۵۳۵۵) = ۳/۲۳ \simeq ۳/۴ \ kg/cm^۲$

**۱۵۵- (۴)**

از رابطه تجربی داریم:

$$M_r = ۱۰۰CBR$$
$$M_r = ۱۰۰\times۱۰ = ۱۰۰۰ \ kg/cm^۲$$

باتوجه به منحنی انستیتو آسفالت برای طرح روسازی‌های آسفالتی (لایه اساس مخلوط امولسیونی نوع ۳) داریم:

$$\begin{cases} M_r = ۱۰^۳ \ kg/cm^۲ \\ \text{ضخامت} = ۲۰ \ cm \end{cases} \Rightarrow \underset{\text{میزان آمد و شد}}{EAL_n} = ۲\times۱۰^۵$$

**۱۵۶- (۳)**

درصد قیر مناسب بتن آسفالتی با استفاده از منحنی‌های آزمایش مارشال تعیین می‌شود.

مقدار قیری که برای ساختن بتن آسفالتی به‌کار می‌رود، میانگین مقادیری است که بیشترین استقامت، بیشترین وزن مخصوص و مناسب‌ترین مقدار فضای خالی را در بتن آسفالتی سبب می‌شود.

نمودار (۱): درصد وزنی قیر به‌ازای وزن مخصوص $max$ آسفالت ← ٪۵/۳

نمودار (۳): درصد وزنی قیر به‌ازای استفامت $max$ مارشال ← ٪۴/۷

نمودار (۲): درصد وزنی قیر به‌ازای درصد هوای ۵ ← ٪۳/۵

نمودار (۲): درصد وزنی قیر به‌ازای درصد هوای ۳ ← ٪۴/۷

متوسط قیر به‌ازای درصد هوای بین ۳ تا ۵ $= \frac{۴/۷+۳/۵}{۲} = ۴/۱٪$

مقدار پیشنهادی قیر بهینه به‌ازای درصد هوای بین ۳ تا ۵ $= \frac{۵/۳+۴/۷+۴/۱}{۳} = ۴/۷٪$

**۱۵۷- (۱)**

$$D_۱ = \frac{۲/۵SN_۲}{a_۱} = \frac{۲/۵\times۲/۵}{۰/۴} = ۱۵/۶۲۵\,cm \;\Rightarrow\; D_۱ = ۱۶\,cm$$

$$SN_۲^* = \frac{a_۱ D_۱}{۲/۵} = \frac{۰/۴\times۱۶}{۲/۵} = ۲/۵۶$$

$$D_۲ = \frac{۲/۵(SN_۳ - SN_۲^*)}{a_۲} = \frac{۲/۵(۳/۵-۲/۵۶)}{۰/۱۲} = ۱۹/۵۷\,cm \;\Rightarrow\; D_۲ = ۲۰\,cm$$

$$SN_۳^* = \frac{a_۲ D_۲}{۲/۵} = \frac{۰/۱۲\times۲۰}{۲/۵} = ۰/۹۶$$

$$D_۳ = \frac{۲/۵(SN_۴ - SN_۳^* - SN_۲^*)}{a_۳} = \frac{۲/۵(۴/۸-۰/۹۶-۲/۵۶)}{۰/۰۹} = ۳۵/۵۵\,cm \;\Rightarrow\; D_۳ = ۳۶\,cm$$

**۱۵۸- (۱)**

با توجه به نموگرام شل برای تعیین ضریب سختی قیرها ابتدا یک ثانیه بر روی محور طول زمان بارگذاری مشخص کرده و به $T_{RB} - t = ۵۳-(-۳۰) = ۸۳$ وصل می‌کنیم و امتداد داده و با تقاطع خط مربوط نشانه درجه نفوذ $(PI = ۰)$ خواهیم داشت:

$$T_{RB} - t = ۵۳-(-۳۰) = ۸۳ \xrightarrow{\text{از نموگرام شل}} \text{سختی قیر} = ۱\times۱۰^۹\ N/m^۲$$

**۱۵۹- (۴)**

با فرض برابر بودن تغییر شکل سطح روسازی با تغییر شکل فصل مشترک لایه می‌توان نوشت:

در سیستم‌های دولایه میزان افت و خیز هر نقطه از فصل مشترک دو لایه از رابطه زیر و منحنی ونگ به‌دست می‌آید.

$$\Delta_s = \gamma\frac{p.a}{E_۲} \qquad (I)$$

حداکثر میزان افت و خیز قائم در زیر نقطه بارگذاری $\Delta_z = ۱/۵\beta\frac{p.a}{E_۲} \qquad (II)$

$$(I) = (II) \;\Rightarrow\; \gamma\frac{p.a}{E_۲} = ۱/۵\beta\frac{p.a}{E_۲} \;\Rightarrow\; \gamma = ۱/۵\beta$$

از روی منحنی ونگ و برمیستر خواهیم داشت $\frac{z}{a} = \frac{۳۰}{۱۵} = ۲ \;\Rightarrow$

$$\frac{E_۱}{E_۲} = ۱۰ \;\Rightarrow\; E_۲ = ۱۰\times۱۵۰۰ = ۱/۵\times۱۰^۴\ kg/cm^۲$$

اگر دانشگاه اصلاح شود، مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

## مجموعه پاسخ‌های تشریحی

# آزمون سراسری سال ۱۳۸۲

## کارشناسی ارشد

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سوالات | از شماره | تا شماره |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | زبان تخصصی | ۱۵ | ۱ | ۱۵ |
| ۲ | ریاضیات | ۱۵ | ۱۶ | ۳۰ |
| ۳ | مکانیک جامدات (مقاومت مصالح ـ تحلیل سازه‌ها) | ۳۰ | ۳۱ | ۶۰ |
| ۴ | مکانیک خاک و پی | ۲۵ | ۶۱ | ۸۵ |
| ۵ | مکانیک سیالات و هیدرولیک | ۲۵ | ۸۶ | ۱۱۰ |
| ۶ | طراحی (سازه‌های فولادی و بتنی ـ راهسازی و روسازی راه) | ۴۲ | ۱۱۱ | ۱۵۲ |

"استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد."

## زبان تخصصی

### متن A

برای ساختمان‌های بزرگ و پیچیده روش‌های استاتیکی تحلیل زلزله به اندازهٔ کافی دقیق نیستند و بسیاری از مراجع، تحلیل‌های دینامیکی را برای انواع و اندازه‌های مشخصی از ساختمان اقتضا می‌کنند. روش‌های گوناگونی با پیچیدگی متفاوت برای تحلیل دینامیکی زلزله در ساختمان‌ها توسعه یافته‌اند. تمام این روش‌ها در راه‌حل معادلات حرکت همانند روابط معمول استاتیکی تعادل و سختی مشترکند. برای هر سازه‌ای با درجه آزادی بیشتر از سه درجه، این قبیل تحلیل‌ها با کمک روش‌های ماتریسی در کامپیوترها انجام می‌گیرند.

سه تکنیک اصلی که در حال حاضر برای تحلیل دینامیکی به‌کار می‌روند عبارتند از:

۱) انتگرال‌گیری مستقیم از معادلات حرکت با روش‌های گام به گام

۲) روش تحلیل نرمال

۳) روش‌های طیف بازتاب

روش انتگرال‌گیری مستقیم قوی‌ترین و پرکاربردترین اطلاعات تحلیل را برای هر حرکت زمین‌لرزه فراهم می‌کند. یک تابع اعمال نیروی وابسته به زمان (شتاب نگار زلزله) به‌کار می‌رود و شرح حال بازتاب مربوط به سازه در طول زلزله محاسبه می‌گردد. اینها همان نمودارهای ممان و نیرو در هر سری از فاصله زمانی‌های تعیین شده هستند که در سرتاسر حرکت اعمال شده پیدا می‌شوند.

برنامه‌های کامپیوتری، هم برای رفتار خطی - ارتجاعی مصالح و هم رفتار غیر خطی - غیر ارتجاعی مصالح با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری گام‌به‌گام نوشته شده‌اند. رفتار خطی به‌ندرت با انتگرال‌گیری مستقیم تحلیل می‌گردد، مگر اینکه در برگیرنده حالت جفت‌شدگی باشد، زیرا تکنیک‌های حالت نرمال، آسان‌تر، ارزان‌تر و تقریباً به همان دقت هستند.

تحلیل‌های سه‌بعدی غیر خطی‌ای ابداع شده است که می‌توانند سه مؤلفه متعامد شتاب‌نگار مربوط به یک زلزله را گرفته و آن‌ها را به‌طور همزمان به سازه اعمال نمایند. در اصل این کامل‌ترین تکنیک تحلیل دینامیک است که تابه‌حال ابداع گردیده است و متأسفانه مطابقاً برای استفاده،گران قیمت است.

روش تحلیل نرمال از انتگرال‌گیری مستقیم، تکنیکی محدودتر است، به این دلیل که بستگی به جداسازی مصنوعی به حالت‌های نرمال لرزش و ترکیب نیروها و جابه‌جایی‌های مربوط به تعداد انتخاب شده‌ای از آن‌ها به کمک اصل بر هم‌نهی آثار دارد. به مانند روش انتگرال‌گیری مستقیم، شتاب‌نگارهای واقعی زلزله می‌توانند برای سازه به کار گرفته شده و یک تاریخچه تنش مشخص شود. اما به دلیل به کار گرفتن اصل بر هم نهی، این روش به رفتار خطی مصالح محدود می‌شود. با اینکه تحلیل های مودال می‌توانند هر درجه دقت دلخواهی را برای رفتار خطی با در بر گرفتن کلیه پاسخ‌های مودال، فراهم کند، با استفاده از فقط چند حالت اول برای صرفه‌جویی در زمان محاسبه تقریب‌هایی زده می‌شود. مشکلات در سیستم‌هایی که حالت‌ها نمی‌توانند به درستی جدا گردند، به وجود می‌آیند. یعنی جایی که جفت‌شدگی رخ می‌دهد.

جدی‌ترین نارسایی تحلیل‌های خطی آن است که آن‌ها با دقت، اعضایی با نیاز به حداکثر شکل‌پذیری را مشخص نمی‌کنند. به عبارت دیگر، الگوی بالاترین تنش‌های ارتجاعی لزوماً مشابه الگوی تغییر شکل پلاستیک در یک سازه لرزه‌ای نیست. برای سازه‌های مهم در مناطقی با خطر لرزه‌ای بالا، گاهی تحلیل دینامیکی غیر خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در واقع تکنیک طیف بازتاب یک مورد ساده شدهٔ ویژه‌ای از تحلیل مودال است. حالت‌های لرزشی در حالت مدت زمان و شکل، به صورت عادی تعیین می‌گردند و مقادیر جواب حداکثر مربوط به هر حالت با ارجاع به یک طیف بازتاب به‌دست می‌آیند. سپس یک قانون اختیاری برای بر هم نهی جواب‌ها در حالت‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. ممان‌ها و نیروهای برآیند در سازه با پوش مقادیر حداکثر مطابقت (بیشتری) دارند تا یک سری از مقادیر موجود هم‌زمان. روش طیف بازتاب، از نظر سرعت و ارزان بودن برتری‌های فراوانی دارد.

با اینکه این روش به دلیل استفاده از اصل برهم‌نهی آثار به شدت به تحلیل خطی محدود شده است، شبیه‌سازی رفتار غیر خطی با استفاده از جفت طیف‌های بازتاب به وجود آمده است. یکی برای تغییر شکل‌ها و یکی برای شتاب‌ها. فاکتور شکل‌پذیری مورد انتظار، پیشاپیش انتخاب می‌شود و طیف‌های مناسب به‌کار گرفته می‌شوند. این روش به وضوح یک روش نسبتاً اختیاری است و غیر ممکن است که از روش طیف بازتاب خطی واقع‌گراتر باشد.

تلاش دیگری برای مطالعه رفتار غیر خطی با استفاده از تکنیک‌های طیفی توسط شپرد *(Shepherd)* ومک کونل *(McConnel)* توصیف شده‌اند. آنها نتیجه گرفتند که تکنیک‌های طیف بازتاب غیر خطی بهترین کاربرد را روی سازه‌هایی دارند که رفتاری شبیه یک سیستم با درجه آزادی منفرد از خود نشان می‌دهند، مثل پایه‌های پل، در حالی که الگوی نقاط مفصلی در سیستم‌های دیگر می‌توانند برای پیشگویی توسط این روش تقریبی بسیار پیچیده باشد.

***متن A را بخوانید و به ۷ سؤال زیر پاسخ دهید:***

**۱- کدام‌یک از گزینه‌های زیر، بهترین عنوان برای این متن خواهد بود؟**

۱) ترکیب پاسخ‌های مودی
۲) پاسخ‌های احتمالی سیستم‌های خطی
۳) انتقاد از روش‌های دینامیکی تحلیل سازه در برابر زلزله
۴) پاسخ بارگذاری دینامیکی عمومی: روش‌های برهم‌نهی آثار

گزینه ۳ صحیح است.

**۲- متن دربرگیرنده کدام‌یک از نتایج زیر است؟**

۱) روش انتگرال‌گیری مستقیم، ارزان‌ترین روش است.
۲) تفاوت نیرو از رفتار پلاستیک حاصل خواهد شد.
۳) روش‌های تحلیل جواب در دامنه فرکانس، قابل فرمول‌بندی کردن است.
۴) استفاده از جفت طیف‌های بازتاب برای شبیه‌سازی رفتار غیر خطی، از روش طیف جواب خطی واقع‌گرایانه‌تر نیست.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

Simulations of non-linear behavior have been made using pairs of response spectra… this is clearly a fairly arbitrary procedure, and is unlikely to be more realistic than the linear response spectrum method.

**۳- بر اساس متن، عیب اصلی تحلیل خطی چیست؟**

۱) روش‌های خطی برتری‌های بزرگی از نظر سرعت و ارزان بودن دارند.
۲) معمولاً با استفاده از فقط چند حالت اول، تقریب‌ها زده می‌شود.
۳) الگوی بالاترین نقش‌های ارتجاعی شبیه الگوی تغییر شکل خمیری نمی‌باشد.
۴) روش‌های خطی قوی‌ترین و کاربردی‌ترین اطلاعات را برای هر حرکت زلزله فراهم می‌کنند.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

The most serious shortcoming of linear analyses is …… the pattern of highest elastic stresses (which) is not necessarily the same as the pattern of plastic deformation in an earthquake structure.

**۴- کدام‌یک از موقعیت‌های زیر ما را از استفاده از روش حالت نرمال منع می‌کند؟**

۱) می‌خواهیم در زمان محاسبه صرفه‌جویی کنیم.
۲) سیستمی با حالت‌های جفت‌شدگی داریم.
۳) یک سیستم بزرگ و پیچیده داریم.
۴) سازه‌ای بیش از سه درجه آزادی داریم.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

Problems are encountered in dealing with systems where the modes cannot be validly seperated, i. e. where made coupling occurs.

**۵- طبق متن، چه زمانی، انتگرال‌گیری مستقیم را برای رفتار خطی مورد استفاده قرار می‌دهیم؟**

۱) زمانی که سازه حالت جفت‌شدگی دارد.
۲) برای هر نوع سازه‌ای با بیش از سه درجه آزادی
۳) زمانی که الگوی نقاط مفصلی برای پیشگویی‌ها بسیار پیچیده هستند.
۴) لازم نیست برای سیستم‌های خطی از روش انتگرال‌گیری مستقیم استفاده کنیم.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

Linear behavior is seldom analysed by direct integration, unless mode coupling is involved …

**۶- برای شبیه‌سازی رفتار غیرخطی چه کاری می‌توانیم کنیم؟**

۱) استفاده از مودهای جفتی
۲) جفت طیف‌های بازتاب را به‌کار بریم.
۳) کلیه حالت‌های سیستم را به‌کار بریم.
۴) ممان‌ها و نیروها در تطابق با پوش‌های مقادیر حداکثر را به‌کار بریم.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

…simulations of non-linear behavior have been made using pairs of response spectra…

**۷- تکنیک‌های طیف بازتاب غیر خطی بهترین کاربرد را در ..... دارند.**

۱) یک دودکش
۲) یک سر قوسی
۳) یک پل معلق
۴) یک ساختمان بلند با حالت‌های جفت‌شدگی

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

They conclude that non-linear response spectrum techniques may be best applied only to structures behaving like a single-degree-of-freedom system, such as bridge piers …

## متن B

سطح شیب‌دار و قوسی سهموی خوش ترکیب اسپیریتو سانتاپلازا (Espirito Santa Plaza) - یک ساختمان بلند با کاربردهای گوناگون - احتمال دارد که آن را تبدیل به یک طرح معروف در خط افق محل نماید. اما (این) ساختمان همچنین برای تدبیری که طراحان آن به کار بردند تا از عهده سیلاب‌ها برآید، نیز قابل توجه است.

الیاس ماتار (Elias Matar)، مدیر پروژه مهندسی سازه شرکت L.E.P می‌گوید: برج ۳۵ طبقه‌ای (مذکور) نزدیک لبه خلیج بیکاین قرار دارد. ۷۰۰۰۰ متر مربع سازه بتنی پس‌تنیده به طبقات اداری، هتل و مسکونی به ترتیب از پایین به بالا، هر یک با ترکیب ستونی متفاوت تقسیم شده است.

ساختمان‌های بلند بسیاری در موقعیت‌های مکانی مشابهی ساخته می‌شوند در نتیجه دیوارهای طبقهٔ همکف در طول یک سیلاب خواهند شکست. با این وجود اسپیریتو سانتاپلازا برای جلوگیری از سیلاب حتی در یک سیل ۱۰۰ ساله زمانی که آب تا ارتفاع ۴/۳ متر بالای سطح دریا - یا ۲/۳ متر بالای سطح طبقه همکف ساختمان می‌آید طراحی شده است. ژا چنگ (Jae chang) یک آرشیتکت شرکت K.P.F که ساختمان را طراحی کرد، می‌گوید: دیوارهای پیرامون برای مقاومت در برابر فشار آب در قسمت بیرونی تقویت شده‌اند. مانند حالت معکوس یک آکواریوم. مجموعه پنجره، ۵۰ میلی‌متر یا حدود دو برابر ضخامت معمول ضخیم است که شامل نزدیک ۲۵ میلی‌متر لایه داخلی است که از دو پانل شیشه‌ای همراه با یک لایه میانی پلی‌کربنات برای مقاومت اضافی ساخته شده است. به علاوه زوارهای پنجره با فولاد کربنی تقویت گشته‌اند.

ماتار می‌گوید: دال طبقه همکف تقویت شده و بر سر شمع‌ها متصل گشته است تا در مقابل فشارهای هیدرواستاتیک رو به بالایی تا ۲۵۰۰۰ پاسکال مقاومت نماید. به‌علاوه، یک دیوار موج‌شکن بتنی با بلندایی در حدود ۴۵۰ میلی‌متر در لبه شرقی تشکیلات ساخته خواهد شد تا انرژی موج را در طی یک سیلاب از بین ببرد. ماتار می‌گوید در این روش، مالکان یک طبقه‌بندی سیلابی برای ساختمان به‌دست آوردند که به آن‌ها اجازه داد که طبقهٔ همکف را به شکل فضای قابل سکونت استفاده نمایند.

سیستم دال تخت برای طبقات هتل و مسکونی مورد استفاده قرار گرفت. اما ساخت دال و تیر در طبقه اداری استفاده شد تا به دهانه‌هایی تا ۱۵ متر برسند. انتقال ستون‌ها در طبقات ۱۶ ام و ۲۵ ام رخ می‌دهد. در طبقات ۲۳ و ۲۴، دو دیوار پیش آمده بتنی با حدود ۹ متر بلندا و ۷۰۰ میلی‌متر ضخامت از هسته ساختمان تا محیط آن امتداد یافته است تا سختی بیشتری حاصل کند. اکنون پروژه ۱۶۰ میلیون دلاری در حال ساخت است و برای تکمیل در تابستان ۲۰۰۳ زمان‌بندی شده است.

***متن B را بخوانید و به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید:***

**۸- تفاوت عمده بین این ساختمان و آن‌هایی که در مناطق سیل‌خیز ساخته شده‌اند این است که:**

۱) سایر ساختمان های بلند، دیوارهای شکننده را در طبقات همکف به کار می‌گیرند.

۲) ساختمان‌های بلند به خاطر خطر سیل‌زدگی، معمولاً نزدیک خلیج‌ها ساخته نمی‌شوند.

۳) سازه‌های بتنی پس‌تنیده، قبلاً برای مناطق سیلابی مناسب به نظر نمی‌رسیدند.

۴) اغلب چنین ساختمان‌های بلندی طبقه همکف را به فضای زندگی تخصیص می‌دهند، زیرا پس از سیل راحت‌تر می‌تواند ترمیم شود.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

Many high-rises in similar locations are built so that the walls of the ground floor will break away during a flood.

**۹- نیروهای بالابرنده در ساختمان در اثر سیلاب‌زدگی، توسط ..... متحمل می‌شوند.**

۱) دو دیوار خارجی بتنی

۲) دیوار آب‌بندی که با فولاد کربنی تقویت شده است.

۳) دال تختی متناوب با ساخت و ساز به صورت دال و تیر

۴) یک دال طبقه همکف تقویت شده که بر سر شمع‌ها متصل شده است.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

The ground floor slab is reinforced and attached to the pile caps to resist upward hydrostatic pressures …

**۱۰- این مقاله اظهار دارد که:**

۱) صلبیت بیشتری با استفاده از دیوارهای خارجی بتنی حاصل می‌شود.

۲) طبقهٔ همکف این‌گونه ساختمان‌ها معمولاً فضاهای قابل سکونت در نظر گرفته نمی‌شوند.

۳) انتقال ستون یک روش مؤثر بهبود مقاومت ساختمان‌ها در برابر سیلاب است.

۴) اینکه ساختمان اگر ساخت سطح مسطح را برای طبقات بالاتر به کار گیرند از صلبیت کافی برخوردار می‌شود.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

… two concrete outrigger walls ……provide additional stiffness.

**۱۱- اولین خط دفاعی در برابر سیلاب‌زدگی ..... است.**

۱) دیوارهای شکننده در طبقات همکف

۲) دیوار بتنی در لبه ساختمان

۳) ساخت دال تختی در طبقات هتل و مسکونی

۴) پنجره‌هایی که از شیشه بیشتر تقویت شده با (ماده) بین لایه‌ای پلی کربنات ساخته شده‌اند.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

In addition, a concrete wave trip wall ……will be constructed on the eastern edge of the property to dissipate wave energy during a flood.

## متن C

در اصل، ساخت و ساز ترکیبی از سازمان‌ها، علم مهندسی، حدس‌های مطالعه شده و خطرات محاسبه شده است. به خاطر همین طبیعتشان، عملیات ساختمانی باید در محل پروژه اجرا گردند. ساخت و ساز یک حرفهٔ پویا، پر تب و تاب و جذاب است.

هر چند که دو عمل پایه‌ای، به تثبیت حرفهٔ ساخت و ساز کمک می‌نمایند. در زمان‌های مساعد، افزایش گسترده و سریعی در تقاضا برای خدمات پیمانکار هم از طرف دولت و هم بخش خصوصی وجود دارد، در طی رکود اقتصادی، دولت‌های فدرال و ایالتی تمایل به سرعت بخشیدن به برنامه کارهای عمومی را دارند تا رکود اقتصادی را جبران نمایند. دیگر عنصر ذاتی پایداری، حرکت صنعت است که آن را کمتر دستخوش افت ناگهانی اقتصادی منطقه‌ای می‌سازد. در اصل ساخت و ساز یک صنعت خدماتی است. ساخت یک پروژه، شامل هزاران جزئیات و ارتباط‌های پیچیده و در هم گره خورده میان مالکان، معماران،مهندسان، بخش‌ها و نمایندگان دولتی، نیروی کار و سایرین است.

پیشرفت‌های تکنولوژی منجر به تسهیلات پیچیده‌تر می‌شود. از این رو ضرورت هماهنگی ماهرانه کلیه عملیات ساختمانی برای حصول به حداکثر کارایی، سرعت و اقتصاد، رو به افزایش است. بنابراین، عملکرد حرفه‌ای مدیریت و هماهنگی عملیات ساختمانی و اجرای کار با سازمان مجرب خودش، پیمانکار را یک عنصر کلیدی در اقتصاد ساخته است.

***متن C را خوانده و به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید:***

**۱۲- بهترین عنوان برای متن فوق ..... است.**

۱) ثبات صنعت ۲) نقش پیمانکاران ۳) مدیریت ساخت ۴) ساختمان و اقتصاد

گزینه ۳ صحیح است.

**۱۳- تسهیلات پیچیده ..... .**

۱) کارآمدتر،اقتصادی‌تر و سریع‌تر است. ۲) به مدیریت ماهر عملیات پروژه نیاز دارند.

۳) منجر به پیشرفت‌های تکنولوژیکی بیشتری شده‌اند. ۴) اقتصاد منطقه‌ای و دولت‌های فدرال را تثبیت می‌کند.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

Technological advances are resulting in more complex facilities. Hence, there is increasing necessity for skillful coordination of all construction operations.

**۱۴- کلمه‌ی "offset" در متن فوق به معنای ..... است.**

۱) صدمه زدن ۲) رشد کردن ۳) تخریب کردن ۴) خنثی کردن

گزینه ۴ صحیح است.

**۱۵- در خلال دوره افت ..... .**

۱) حرکت صنعت مؤثرتر است.

۲) پیمانکاران، عناصر کلیدی در اقتصاد هستند.

۳) دولت باید پروژه ساختمانی را تثبیت کند.

۴) برنامه‌های کارهای دولتی باید بیشتر توسط دولت‌مردان حمایت گردند.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

During periods of recession, Federal and state governments tend to accelerate public-works programs …

## ریاضیات

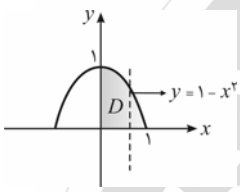
**۱۶- (۱)**

تقاطع این دو رویه عبارت است از:

$$\begin{cases} z = y + ۲ \\ z = x^۲ + ۲y + ۱ \end{cases} \Rightarrow y + ۲ = x^۲ + ۲y + ۱ \Rightarrow x^۲ + y = ۱ \Rightarrow y = ۱ - x^۲$$

این حجم از بالا و پایین به‌ترتیب به رویه‌های $z = x^۲ + ۲y + ۱$ و $z = y + ۲$ و از اطراف به صفحات مختصات محصور است.

تصویر این حجم در صفحه $xy$ به صورت زیر است: (توجه کنید که ناحیهٔ موردنظر در یک هشتم اول می‌باشد)




$$V = \iiint_V dv = \iint_D \int_{z=y+۲}^{z=x^۲+۲y+۱} dz\, dx\, dy = \iint_D (x^۲ + ۲y + ۱ - y - ۲)\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=۰}^{۱} \int_{y=۰}^{۱-x^۲} (x^۲ + y - ۱)\, dy\, dx = \int_{x=۰}^{۱} \left(x^۲ y + \frac{y^۲}{۲} - y\right)\Big|_{y=۰}^{۱-x^۲} dx$$

$$= \int_۰^۱ \left[x^۲(۱-x^۲) + \frac{(۱-x^۲)^۲}{۲} - (۱-x^۲)\right] dx = \int_۰^۱ \frac{۱}{۲}(۱-x^۲)^۲\, dx = \frac{۴}{۱۵}$$

**۱۷- (۳)**

برای آنکه نقطه $x = ۰$ یک نقطه غیرعادی منظم برای معادله دیفرانسیل مزبور باشد، لازم است که هر دو حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{x \to ۰} x\, P(x) = \lim_{x \to ۰} x \frac{\alpha}{x^s} = \lim_{x \to ۰} \frac{\alpha}{x^{s-۱}} \Rightarrow \text{شرط وجود حد}: s - ۱ \le ۰ \Rightarrow s \le ۱$$

$$\lim_{x \to ۰} x^۲ Q(x) = \lim_{x \to ۰} x^۲ \frac{\beta}{x^t} = \lim_{x \to ۰} \frac{\beta}{x^{t-۲}} \Rightarrow \text{شرط وجود}: t - ۲ \le ۰ \Rightarrow t \le ۲$$

بنابراین، به‌ازای $s \le ۱$ و $t \le ۲$ نقطه $x = ۰$ منظم و چنانچه $s > ۱$ و یا $t > ۲$ باشد، این نقطه نامنظم خواهد بود.

**۱۸- (۲)**

معادله دیفرانسیل از نوع کشی اویلر بوده و معادله مشخصه آن عبارت است از:

$$m(m-۱) + ۵m + ۴ = ۰ \Rightarrow m^۲ + ۴m + ۴ = ۰ \Rightarrow m = -۲ , -۲$$

بنابراین، جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_۱ x^{-۲} + c_۲ x^{-۲} ln(x) = x^{-۲}(c_۱ + c_۲ ln(x))$$

**۱۹- (۴)**

به دلیل اینکه تفاوت گزینه‌ها در جواب خصوصی آنها است، تنها به یافتن جواب خصوصی از روش اپراتور معکوس می‌پردازیم:

$$y_P = \frac{۱}{D^۲ + ۴}\{۳cos\, ۲t\} = ۳\frac{۱}{D^۲ + ۴}\{cos\, ۲t\} = ۳t\, \frac{۱}{۲D}\{cos\, ۲t\} = \frac{۳}{۲}t \int cos\, ۲t\, dt = \frac{۳}{۲}t\left(\frac{۱}{۲}sin\, ۲t\right) = \frac{۳}{۴}t\, sin\, ۲t$$

**۲۰- (۲)**

از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می‌گیریم $L\{y\} = Y(s)$ و یادآوری می‌کنیم که؛ $L\{ty\} = -Y'(s)$:

$$L\{y'' - ty\} = L\{۰\} \Rightarrow s^۲ L\{y\} - sy(۰) - y'(۰) + \frac{d}{ds} L\{y\} = ۰$$

با اعمال شرایط اولیه نتیجه می‌شود:

$$s^۲ Y - s + Y' = ۰ \Rightarrow Y' + s^۲ Y = s$$

**۲۱- (۳)**

نقطه $x=0$، نقطهٔ غیرعادی معادله است، با تقسیم طرفین معادله بر ضریب $y''$ نتیجه می‌شود:

$$y''-\frac{1}{2x}y'+\frac{1+x}{2x^2}y=0 \Rightarrow P(x)=\frac{-1}{2x}\ ,\ Q(x)=\frac{1+x}{2x^2}$$

منظم بودن نقطه $x=0$ را بررسی می‌کنیم.

$$\alpha=\lim_{x\to 0} x\,P(x)=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{2}\ ;\ \beta=\lim_{x\to 0} x^2Q(x)=\lim_{x\to 0} x^2\frac{1+x}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

بنابراین، $x=0$ یک نقطهٔ منظم معادله می‌باشد و در نتیجه معادله مشخصه به صورت زیر است:

$$r^2+(\alpha-1)r+\beta=0 \Rightarrow r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow r=\frac{1}{2},1$$

لذا، جواب‌های پایه عبارتند از:

$$y_1=x^1\sum_{x=0}^{\infty}a_n x^n\ ,\ y_2=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$$

**۲۲- (۱)**

ابتدا جواب عمومی معادله داده شده را بدست می‌آوریم:

معادله مشخصه : $m^4-1=0 \Rightarrow (m^2-1)(m^2+1)=0 \Rightarrow m=+1,-1,\pm i$

$\Rightarrow$ جواب عمومی : $y=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\sin t+c_4\cos t$

که البته با توجه به شکل جواب در گزینه‌ها می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$y=k_1\cosh t+k_2\sinh t+k_3\sin t+k_4\cos t$$

حال با اعمال شرایط اولیه می‌توان ضرایب $k_1$ تا $k_4$ را بدست آورد:

$$y(0)=0 \Rightarrow k_1+k_4=0$$
$$y'(0)=0 \Rightarrow k_2+k_3=0$$

این شرایط تنها در گزینه اول و دوم برقرار است. برای تعیین گزینه درست در بین آن‌ها، لازم است شرط بعدی را نیز اعمال نماییم.

$$y''(0)=1 \Rightarrow k_1-k_4=1$$

این شرط تنها در گزینه اول برقرار است، بنابراین، فقط گزینه (۱) می‌تواند درست باشد.

**۲۳- (۳)**

طول منحنی $C$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$l=\int_C ds$$

$$ds=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z)^2}\,dt$$

$$\vec{r}(t):\begin{cases}x=t\\ y=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\\ z=t^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}dx=dt\\ dy=2t^{\frac{1}{2}}dt\\ dz=2t\,dt\end{cases} \Rightarrow ds=\sqrt{1+4t+4t^2}\,dt=(2t+1)\,dt$$

بنابراین، طول منحنی در بازه $t=0$ و $t=b$ عبارت است از:

$$l=\int_{t=0}^{b}(2t+1)\,dt=(t^2+t)\Big|_{t=0}^{b}=b^2+b$$

طبق فرض سؤال، طول این منحنی برابر ۳۰ است، بنابراین داریم:

$$b^2+b=30 \Rightarrow b=5,-6$$

اگر این مسیر، موقعیت مکانی یک ذره در لحظات $t$ فرض شود، زمان $t=-6$ معنادار نخواهد بود و لذا تنها مقدار مثبت $t=b=5$ معتبر خواهد بود.

**۲۴- (۴)**

شرایط قضیه دیورژانس برقرار است، لذا داریم:

$$I=\oiint_{s}\vec{F}\cdot\vec{n}ds=\iiint_{V}div\ F\,dv$$

$$div\ F=3x^2+3y^2+3z^2=3\,(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Rightarrow\ I=\iiint_{V}3(x^2+y^2+z^2)\,dv\ \xlongequal{\text{مختصات کروی}}\ 3\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^{2}\rho^2\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=3\,(\theta)\Big|_{0}^{2\pi}\ (-\cos\phi)\Big|_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\ \left(\frac{\rho^5}{5}\right)\Big|_{\rho=0}^{2}=3\,(2\pi)\,(1)\left(\frac{32}{5}\right)=\frac{192}{5}\pi$$

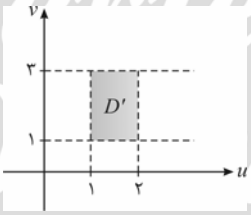
**۲۵- (۱)**

از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+2y\end{cases}\Rightarrow\ J=\frac{1}{\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ dx\,dy=|\,J\,|\,du\,dv=\frac{1}{4}du\,dv$$

و مرزهای ناحیه انتگرال‌گیری نیز به صورت زیر تغییر خواهد نمود:

$$\text{مرزهای قدیم}\begin{cases}x-2y=2\\ x-2y=1\\ x+2y=1\\ x+2y=3\end{cases}\xrightarrow{\text{مرزهای جدید}}\begin{cases}u=2\\ u=1\\ v=1\\ v=3\end{cases}\longrightarrow$$




بنابراین، انتگرال مورد نظر برابر است با:

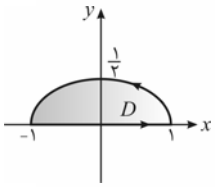
$$I=\iint_{D}\left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)^3dx\,dy=\iint_{D'}\left(\frac{u}{v}\right)^3\left(\frac{1}{4}du\,dv\right)$$

$$=\frac{1}{4}\int_{v=1}^{3}\int_{u=1}^{2}\frac{u^3}{v^3}du\,dv=\frac{1}{16}\int_{1}^{3}\frac{u^4}{v^3}\Big|_{u=1}^{2}dv$$

$$=\frac{15}{16}\int_{1}^{3}\frac{1}{v^3}dv=\frac{15}{16}\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{v^2}\Big|_{v=1}^{3}=\frac{-15}{32}\left(\frac{1}{9}-1\right)=\frac{5}{12}$$

**۲۶- (۲)**

طبق قضیه گرین داریم:




$$I=\oint_{C}xy\,dx+\left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)dy=\iint_{D}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)-\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right]dx\,dy$$

$$=\iint_{D}(x+y-x)\,dx\,dy=\iint_{D}y\,dx\,dy$$

با تغییر متغیر $x=r\cos\theta$ و $y=\frac{1}{2}r\sin\theta$، نتیجه می‌شود:

$dx\,dy=\frac{1}{2}r\,dr\,d\theta$ ( پاسخ تست ۲۸ سال ۸۰ را ملاحظه نمایید )

$$\Rightarrow\ I=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1}\frac{1}{2}r\sin\theta\left(\frac{1}{2}r\,dr\,d\theta\right)=\frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\pi}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_{r=0}^{1}=\frac{1}{4}\times2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

**۲۷- (۴)**

با تغییر متغیرهای $x = ar\cos\theta$ و $y = br\sin\theta$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} dx\,dy = abr\,dr\,d\theta \\ r = ۱\ ,\ ۰ \le \theta \le ۲\pi \end{cases}$$

بنابراین، داریم:

$$\text{انتگرال} = \int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{۱} a^۲r^۲\cos^۲\theta\,(ab)\,r\,dr\,d\theta = a^۳b\,(\int_۰^{۲\pi}\cos^۲\theta\,d\theta)\int_۰^۱ r^۳dr$$

$$= a^۳b\,(\int_۰^{۲\pi}\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}d\theta)(\frac{r^۴}{۴})\Big|_{r=۰}^{۱} = \frac{۱}{۴}a^۳b\,(\frac{۱}{۲}\theta+\frac{۱}{۴}\sin ۲\theta)\Big|_{\theta=۰}^{۲\pi} = \frac{۱}{۴}a^۳b\,(\pi) = \frac{\pi}{۴}a^۳b$$

**۲۸- (۱)**

ابتدا نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f_x = ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰\ ;\ f_y = ۴y - ۴ = ۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow \text{نقطه بحرانی}: (۰,۱)$$

نقطه $(۰\ ,\ ۱)$ در داخل ناحیه قرار دارد. بنابراین، مقدار تابع را در این نقطه به دست می‌آوریم:

$$f\,(۰\ ,\ ۱) = -۱$$

تا اینجا مشخص شد که گزینه‌های دوم و چهارم نادرست هستند.

حال به یافتن مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع بر روی مرز ناحیه یعنی $x^۲ + y^۲ = ۱۶$ می‌پردازیم:

**روش اول:**

$$\begin{matrix} x = ۴\cos t \\ y = ۴\sin t \end{matrix} \xrightarrow{\text{جایگذاری در تابع}} f\,(x\ ,\ y) = ۳\,(۴\cos t)^۲ + ۲\,(۴\sin t)^۲ - ۴\,(۴\sin t) + ۱$$

$$\Rightarrow f\,(t) = ۴۸\cos^۲t + ۳۲\sin^۲t - ۱۶\sin t + ۱ = ۱۶\cos^۲t - ۱۶\sin t + ۳۳$$

$$\frac{df}{dt} = ۰ \Rightarrow -۳۲\cos t\sin t - ۱۶\cos t = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos t = ۰ \Rightarrow t = \frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{۳\pi}{۲} \\ \sin t = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow t = \frac{۷\pi}{۶}\ ,\ \frac{۱۱\pi}{۶} \end{cases}$$

$$t = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow f = ۰ - ۱۶ + ۳۳ = ۱۷$$

$$t = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow f = ۰ + ۱۶ + ۳۳ = ۴۹$$

$$t = \frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow f = ۱۶\,(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ + ۸ + ۳۳ = ۵۳$$

$$t = \frac{۱۱\pi}{۶} \Rightarrow f = ۱۶\,(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ + ۸ + ۳۳ = ۵۳$$

**روش دوم:**

$$x^۲ + y^۲ = ۱۶ \Rightarrow x^۲ = ۱۶ - y^۲ \xrightarrow{\text{جایگذاری در } f\,(x\,,y)} g\,(y) = ۳(۱۶ - y^۲) + ۲y - ۴y + ۱ = -y^۲ - ۴y + ۴۹$$

$$g'(y) = ۰ \Rightarrow y = -۲ \Rightarrow g\,(-۲) = ۵۳$$

بنابراین، بیشترین و کمترین مقدار تابع به‌ترتیب برابر با ۵۳ و ۱- می‌باشد.

**۲۹- (۴)**

این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که بردار گرادیان این سطح موازی نرمال صفحه مزبور گردد:

$$\phi = ۲x^۳ + y - z^۲ - ۵ = ۰ \Rightarrow \overrightarrow{\nabla\phi} = ۶x^۲\,\vec{i} + \vec{j} - ۲z\,\vec{k} = (۶x^۲\ ,\ ۱\ ,\ -۲z)$$

شرط موازی بودن این بردار و نرمال صفحه مزبور آن است که:

$$\frac{۶x^۲}{۲۴} = \frac{۱}{۱} = \frac{-۲z}{-۶} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm ۲ \\ z = +۳ \end{cases}$$

این نتیجه را در معادله سطح قرار می‌دهیم:

$$۲x^۳ + y - z^۲ = ۵ \Rightarrow \pm ۱۶ + y - ۹ = ۵ \Rightarrow \begin{cases} y = -۲ \\ y = ۳۰ \end{cases}$$

بنابراین، تنها گزینه چهارم می‌تواند درست باشد.

**۳۰- (۲)**

با استفاده از قاعده هوپیتال و فرمول مشتق انتگرال داریم:

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt}{bx-\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x}}$$

در حالت $b \neq 1$ حاصل این حد برابر صفر خواهد شد، اما با توجه به داده‌های سؤال که حاصل این حد را برابر ۱ فرض نموده بـه ناچـار بایـد $b = 1$ اتخاذ شود و در نتیجه:

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1-\cos x)\sqrt{a+x}} \overset{\text{هم ارزی}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}\sqrt{a+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{a+x}} = \frac{2}{\sqrt{a}}$$

از تساوی $\frac{2}{\sqrt{a}} = 1$ بدست می‌آید:

$$\boxed{a = 4}$$

## مقاومت مصالح و تحلیل سازه‌ها

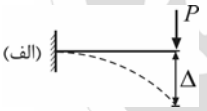
**۳۱- (۳)**

می‌دانیم انرژی کرنشی ذخیره شده در یک عضو که بار متمرکز $P$ به نقطه‌ای از آن وارد شده، برابر است با:

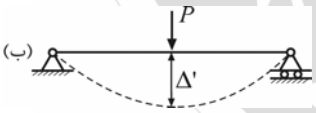
$$U = \frac{1}{2}P\Delta$$

در این رابطه $\Delta$ تغییرمکان محل اثر $P$ در راستای اعمال نیرو می‌باشد.

باتوجه به نکته فوق داریم:




$$\begin{cases} U_{\text{الف}} = \frac{1}{2}P\Delta \\ \Delta = \frac{PL^3}{3EI} \end{cases} \Rightarrow U_{\text{الف}} = U = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

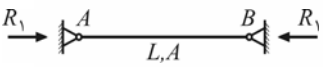



$$\begin{cases} U_{\text{ب}} = \frac{1}{2}P\Delta' \\ \Delta' = \frac{P(2L)^3}{48EI} = \frac{PL^3}{6EI} \end{cases} \Rightarrow U_{\text{ب}} = \frac{1}{2}\left(\frac{P^2L^3}{6EI}\right) = \frac{U}{2}$$

**۳۲- (۲)**

در هر ۳ میله داده شده، فاصله بین دو انتهای میله‌ها تغییر نمی‌کند. میله‌های داده شده را یک به یک بررسی می‌کنیم:

شکل (۱):

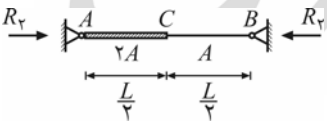



$$\Delta_{AB} = 0 \Rightarrow \alpha\Delta TL - \frac{R_1L}{EA} = 0$$

$$\Rightarrow R_1 = \alpha\Delta TEA$$

$$\sigma_{max_1} = \frac{R_1}{A} = \alpha\Delta TE$$

شکل (۲):




$$\Delta_{AB} = 0 \Rightarrow \Delta_{AC} + \Delta_{CB} = 0$$

$$\alpha\Delta T\frac{L}{2} - \frac{R_2\frac{L}{2}}{2EA} + \alpha\Delta T\frac{L}{2} - \frac{R_2\frac{L}{2}}{EA} = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{4}{3}\alpha\Delta TEA$$

$$\sigma_{max_2} = \sigma_{BC} = \frac{R_2}{A} = \frac{4}{3}\alpha\Delta TE$$

شکل (۳):

$$\Delta_{AB} = 0 \Rightarrow \alpha \Delta T L - \frac{R_3 L}{2EA} = 0$$

$$\Rightarrow R_3 = 2\alpha \Delta T E A$$

$$\sigma_{max_3} = \frac{R_3}{2A} = \alpha \Delta T E$$

بنابراین تنش ماکزیمم در میله شکل (۲) ایجاد می‌شود.

**۳۳- (۳)**

عرض مقطع را ثابت و برابر $b$ در نظر می‌گیریم و ارتفاع قسمت‌های $AB$ و $BC$ را به ترتیب برابر $2h$ و $h$ قرار می‌دهیم. بار $P$ به نسبت سختی اعضا بین آنها تقسیم می‌شود. داریم:

$$\begin{cases} P_{BA} = P \times \dfrac{(\frac{3EI}{L^3})_{BA}}{(\frac{3EI}{L^3})_{BA} + (\frac{3EI}{L^3})_{BC}} \\ P_{BC} = P \times \dfrac{(\frac{3EI}{L^3})_{BC}}{(\frac{3EI}{L^3})_{BA} + (\frac{3EI}{L^3})_{BC}} \end{cases} \Rightarrow \frac{P_{BA}}{P_{BC}} = \frac{(\frac{3EI}{L^3})_{BA}}{(\frac{3EI}{L^3})_{BC}}$$

$$M_A = P_{BA} \times 2L \quad , \quad M_C = P_{BC} \times L$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_{A_{max}}}{\sigma_{C_{max}}} = \frac{\dfrac{M_A \times c_A}{I_{AB}}}{\dfrac{M_C \times c_C}{I_{BC}}} = \frac{M_A}{M_C} \times \frac{I_{BC}}{I_{AB}} \times \frac{c_A}{c_C} = \frac{P_{BA} \times 2L}{P_{BC} \times L} \times \frac{I_{BC}}{I_{AB}} \times \frac{c_A}{c_C} = \frac{P \times \dfrac{3EI_{AB}}{8L^3}}{P \times \dfrac{3EI_{BC}}{L^3}} \times \frac{2L}{L} \times \frac{I_{BC}}{I_{AB}} \times \frac{h}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}$$

**۳۴- (۴)**

درحالت اول، تنش برشی ماکزیمم برابر است با:

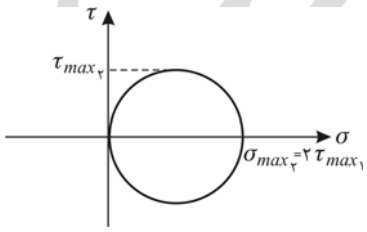
$$\tau_{max_1} = \frac{TR}{J} = 40\,MPa$$

درحالت دوم در مقطع تیر تنش‌های خمشی ایجاد می‌شوند و المان‌های طولی عضو به‌صورت زیر می‌باشند:

تنش خمشی $\sigma$ در المان‌های واقع در تارهای فوقانی و تحتانی حداکثر می‌شود و مقدار آن برابر است با:

$$\begin{cases} \sigma_{max_2} = \dfrac{MR}{I} \\ M = T \quad , \quad I = \dfrac{J}{2} \end{cases} \Rightarrow \sigma_{max_2} = \frac{TR}{\frac{J}{2}} = 2\left(\frac{TR}{J}\right) = 2\tau_{max_1}$$

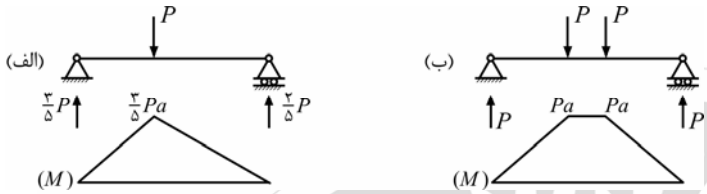
دایره موهر المان‌های طولی تیر در حالت دوم به صورت زیر است. با توجه به دایره رسم شده می‌توان نوشت:




$$\tau_{max_2} = \frac{1}{2}\sigma_{max_2} = \frac{1}{2}(2\tau_{max_1}) = \tau_{max_1} = 40\,MPa$$

**۳۵- (۱)**

تنش خمشی ماکزیمم در محل لنگر خمشی ماکزیمم اتفاق می‌افتد. نمودار لنگر خمشی تیرها به‌صورت زیر است:



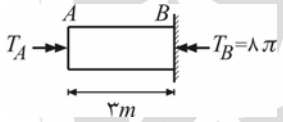

$$M_{max\,\text{الف}} = \frac{۳}{۵}Pa \qquad M_{max\,\text{ب}} = Pa$$

$$\sigma_{max\,\text{الف}} = \frac{M_{max\,\text{الف}}}{S} \Rightarrow ۶۰ = \frac{\frac{۳}{۵}Pa}{S} \Rightarrow \frac{Pa}{S} = ۱۰۰$$

$$\sigma_{max\,\text{ب}} = \frac{M_{max\,\text{ب}}}{S} = \frac{Pa}{S} = ۱۰۰MPa$$

**۳۶- (۴)**

اگر دوران $B$ صفر باشد، $B$ مانند یک تکیه‌گاه گیردار عمل می‌کند و $T_B$ عکس‌العمل این تکیه‌گاه می‌باشد. لذا می‌توان قسمت $AB$ را به‌صورت زیر درنظر گرفت:

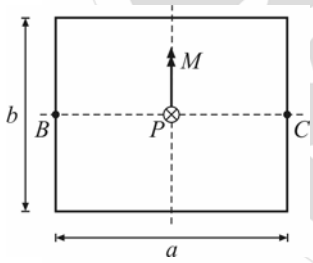



$$T_A = T_B = ۸\pi\ kN.m$$

$$\varphi_A = \frac{T_A L}{GJ} = \frac{۸\pi \times ۱۰^۶ \times ۳ \times ۱۰^۳}{۴ \times ۱۰^۵ \times \frac{\pi \times ۴۰^۴}{۳۲}} = ۰/۷۵\ rad$$

**۳۷- (۱)**

با انتقال نیروی فشاری $P$ به مرکز مقطع، عضو همزمان تحت اثر نیروی محوری فشاری و لنگر خمشی به‌صورت زیر قرار می‌گیرد:




$$M = \alpha Pa$$

تنش‌های کششی و فشاری حداکثر به ترتیب در نقاط $B$ و $C$ ایجاد می‌شوند. داریم:

$$\sigma_B = \frac{M}{S} - \frac{P}{A} = \frac{\alpha Pa}{\frac{ba^۲}{۶}} - \frac{P}{ab} = \frac{۶\alpha P}{ab} - \frac{P}{ab}$$

$$\sigma_C = \frac{M}{S} + \frac{P}{A} = \frac{\alpha Pa}{\frac{ba^۲}{۶}} + \frac{P}{ab} = \frac{۶\alpha P}{ab} + \frac{P}{ab}$$

بنابراین برای آنکه تنش فشاری دو برابر تنش کششی شود، باید داشته باشیم:

$$\sigma_C = ۲\sigma_B \Rightarrow \frac{۶\alpha P}{ab} + \frac{P}{ab} = ۲ \times \left(\frac{۶\alpha P}{ab} - \frac{P}{ab}\right) \Rightarrow \frac{۳P}{ab} = \frac{۶\alpha P}{ab} \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۲}$$

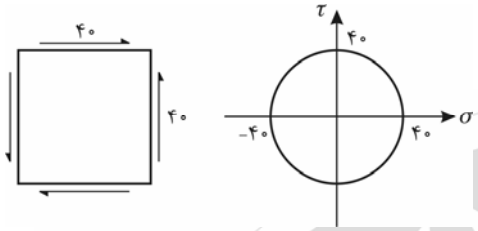
**۳۸- (۱)**

سازه داده شده، متقارن و بارگذاری آن نیز متقارن است. لذا قطعه صلب به همین صورت و بدون دوران به سمت پایین جابجا می‌شود. بنابراین تغییرطول فنرها باهم مساوی بوده و مانند فنرهای موازی، نیروی $P$ به نسبت سختی فنرها، بین آنها توزیع می‌شود.

از آنجا که سختی فنرها یکسان است، نیروی آنها نیز باهم برابر است:

$$F_۱ = F_۲ = \frac{P}{۳}$$

**۳۹- (۲)**




تنش $\sigma_1 = 60MPa$ یکی از تنش‌های اصلی است. زیرا تنش‌های برشی روی صفحه آن صفر است. برای یافتن دو تنش اصلی دیگر، المان شکل مقابل را درنظر می‌گیریم. باتوجه به اینکه این المان، المان برش خالص است، داریم: $\sigma_2 = 40 \ , \ \sigma_3 = -40$

**۴۰- (۴)**

کرنش در راستای قطر $AC$، همان $\varepsilon_{45^\circ}$ است که به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varepsilon_{AC} = \varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon_x \cos^2 45^\circ + \varepsilon_y \sin^2 45^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\times 45^\circ)$$

با استفاده از تعریف کرنش و اندازه‌های مشخص شده روی شکل، مقادیر $\varepsilon_x$ و $\varepsilon_y$ و $\gamma_{xy}$ به‌دست می‌آیند:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{20/25-20}{20} = 0/0125 \qquad \varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{20/35-20}{20} = 0/0175$$

$$\gamma_{xy} = \Delta\theta = (89/4-90)\times\frac{\pi}{180} = -0/01$$

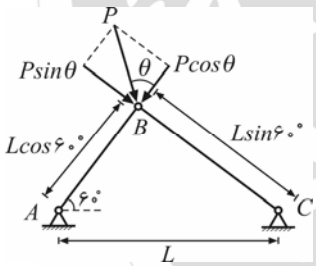
درنهایت $\varepsilon_{AC}$ برابر است با:

$$\varepsilon_{AC} = 0/0125\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0/0175\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{(-0/01)}{2}\times 1 = 0/02$$

**۴۱- (۳)**

بار $P$ را در راستای اعضای $AB$ و $BC$ تصویر کرده، نیروی هر عضو را می‌یابیم: $P_{AB} = P\cos\theta \ , \ P_{BC} = P\sin\theta$

برای آنکه بتوان بیشترین بار $P$ را به خرپا اعمال کرد، باید نیروهای ایجاد شده در اعضاء همزمان با بار بحرانی آنها برابر شوند.



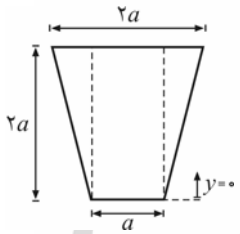

$$\begin{cases} P_{AB} = P_{cr_{AB}} = \dfrac{\pi^2 EI}{L_{AB}^2} \Rightarrow P\cos\theta = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2\cos^2 60} \\ P_{BC} = P_{cr_{BC}} = \dfrac{\pi^2 EI}{L_{BC}^2} \Rightarrow P\sin\theta = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2\sin^2 60} \end{cases}$$

$$\overset{\div}{\Rightarrow} \cot\theta = \left(\frac{\sin 60}{\cos 60}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3 \text{ و یا } \tan\theta = \frac{1}{3}$$

**۴۲- (۲)**

مصالح (۲) را در مقطع به‌دست آمده، به مصالح (۱) تبدیل می‌کنیم. ضریب تبدیل $n = \frac{2E}{E} = 2$ است.

ازطرفی می‌دانیم تغییرشکل‌های خمشی با $EI$ نسبت عکس دارند. با تبدیل مصالح (۲) به (۱)، $E$ نسبت به حالت اولیه تغییر نکرده است و بنابراین کافیست تغییرات $I$ را در حالت دوم نسبت به حالت اول بیابیم. مقطع معادل در حالت دوم به‌صورت زیر است. برای محاسبه محل محور خنثی و ممان اینرسی مقطع، آن را به‌صورت ۲ مثلث و یک مستطیل درنظر گرفته، داریم:




$$I_1 = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{2a^4}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{a\times 2a\times a + 2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times 2a\right)\times\left(\frac{2}{3}\times 2a\right)}{a\times 2a + 2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times 2a\right)} = \frac{10a}{9}$$

$$I_2 = \left[\frac{a\times(2a)^3}{12} + a\times 2a\times\left(a-\frac{10a}{9}\right)^2\right] + 2\times\left[\frac{\frac{a}{2}\times(2a)^3}{36} + \frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times 2a\times\left(\frac{4a}{3}-\frac{10a}{9}\right)^2\right] = \frac{26}{27}a^4$$

بنابراین نسبت تغییرشکل‌های حالت دوم به حالت اول برابر است با:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{\frac{1}{I_2}}{\frac{1}{I_1}} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{2a^4}{3}}{\frac{26a^4}{27}} = 0/692$$

**۴۳- (۳)**

با استفاده از کرنش‌های داده شده، شعاع دایره موهر کرنش به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$R=\sqrt{(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{۲})^۲+(\frac{\gamma_{xy}}{۲})^۲}=\sqrt{(\frac{-۴۰۰-۲۰۰}{۲})^۲+(\frac{۳۰۰}{۲})^۲}\times ۱۰^{-۶}=۱۵۰\sqrt{۵}\times ۱۰^{-۶}$$

$$\frac{\gamma_{max}}{۲}=R \;\Rightarrow\; \gamma_{max}=۲R=۲\times ۱۵۰\sqrt{۵}\times ۱۰^{-۶}=۳۰۰\sqrt{۵}\times ۱۰^{-۶}$$

**۴۴- (۳)**

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{\frac{I_۱}{c_۱}}{\frac{I_۲}{c_۲}}=\frac{I_۱}{I_۲}\times\frac{c_۲}{c_۱}$$

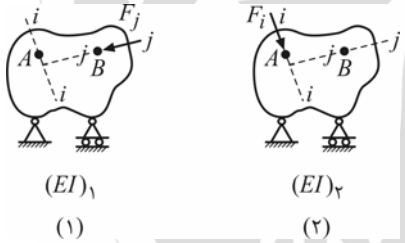
می‌دانیم ممان اینرسی مربع حول محورهای عبوری از مرکز مقطع یکسان است. $(I_۱=I_۲)$

$$\begin{cases}\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{c_۲}{c_۱}\\ c_۱=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\;,\; c_۲=\frac{a}{۲}\end{cases}\Rightarrow\; \frac{S_۱}{S_۲}=\frac{\frac{a}{۲}}{\frac{a\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

**۴۵- (۱)**

سازه داده شده معین بوده و تغییرات درجه حرارت و خطای ساخت، نیروی جدیدی در اعضای آن ایجاد نمی‌کند. بنابراین تنش‌های میله‌ها نسبت به حالت اولیه هیچ تغییری نمی‌کند.

**۴۶- (۴)**




می‌دانیم در استفاده از قضیهٔ تقابل کار ماکسول، هرگاه $EI$ (صلبیت خمشی اعضا) در سازه‌ها با هم متفاوت باشد، رابطه این قضیه به صورت کلی‌تر زیر تبدیل خواهد شد:

$$\Delta_{A_{(۱)}}\times F_{i\,(۲)}\times EI_۱=\Delta_{B_{(۲)}}\times F_{j\,(۱)}\times EI_۲$$

به عبارت دیگر $EI$ اعضای هر سازه در تغییرمکان همان سازه ضرب می‌شود.

برای این سوال داریم:

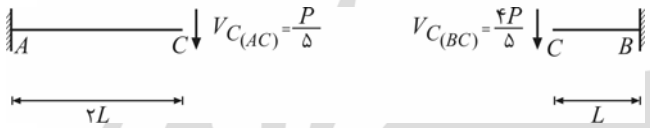
$$M_{A_{(۱)}}\times\theta_{A_{(۲)}}\times(EI)_۲=P_{D_{(۲)}}\times\Delta_{D_{(۱)}}\times(EI)_۱$$

$$(-۱۰)\times(+۰/۰۵)\times(۲EI)=P\times(-۶\times ۱۰^{-۲})\times EI \;\Rightarrow\; P=\frac{۵۰}{۳}ton$$

توجه داریم که چون لنگر برحسب تن متر بیان شده است تغییر مکان $D$ بایستی برحسب متر باشد که تبدیل آن با اعمال ضریب $۱۰^{-۲}$ انجام شده است.

**۴۷- (۲)**

تغییرمکان قائم $C$ از تیرهای $AC$ و $BC$ باهم برابر است. بنابراین این اعضا مثل فنرهای موازی با سختی خمشی $\frac{۳EI}{L^۳}$ عمل کرده و نیروی $P$ به نسبت سختی اعضا، بین آنها توزیع می‌شود.




$$V_{C(AC)}=P\times\frac{\frac{۳(۲EI)}{(۲L)^۳}}{\frac{۳(۲EI)}{(۲L)^۳}+\frac{۳EI}{L^۳}}=\frac{P}{۵}$$

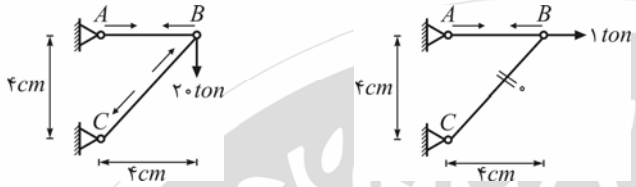
$$V_{C(BC)}=P\times\frac{\frac{۳EI}{L^۳}}{\frac{۳(۲EI)}{(۲L)^۳}+\frac{۳EI}{L^۳}}=\frac{۴P}{۵}$$

$$M_A=V_{C(AC)}\times ۲L=\frac{۲PL}{۵}$$

$$M_B=V_{C(BC)}\times L=\frac{۴PL}{۵}$$

**۴۸- (۴)**

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم.




سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی — سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی

$$B: \sum F_y = ۰ \Rightarrow f_{BC} = ۰$$
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow f_{AB} = ۱\,ton$$

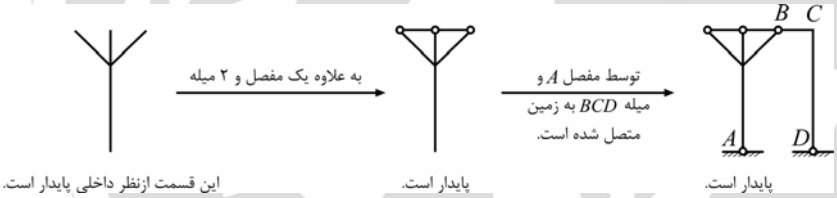
$$B: \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{BC} = ۲۰\sqrt{۲}\,ton$$
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{AB} = ۲۰\,ton$$

$$۱ \times \Delta_{B_H} = \sum \frac{fFL}{EA} = \frac{۱ \times ۲۰ \times ۴ \times ۱۰^{-۲}}{۲۵ \times ۱۰^{-۴} E} = \frac{۳۲۰}{E}\,m = \frac{۳۲۰۰۰}{E}\,cm$$

در جواب بدست آمده واحد $E$، $ton/cm^۲$ فرض شده است.

**۴۹- (۱)**

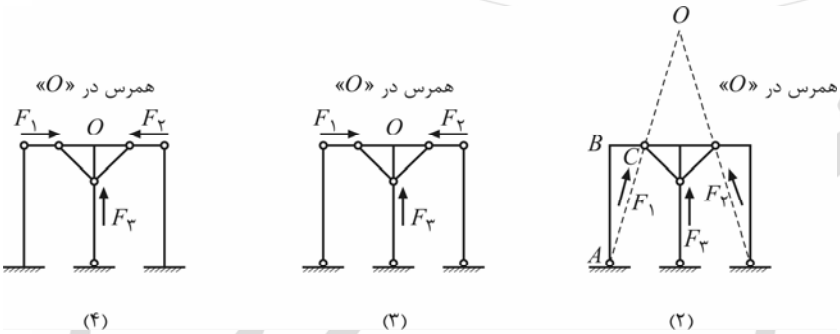
وضعیت پایداری و یا ناپایداری سازه‌ها را یک به یک بررسی می‌کنیم:




می‌دانیم هرگاه قسمتی از سازه پایدار باشد، می‌توان آن را به‌عنوان زمین برای سایر قسمت‌ها درنظر گرفت:

بنابراین ملاحظه می‌شود سازه (۱) پایدار است.

علت ناپایداری سازه‌های گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴، همرس بودن مولفه‌های عکس‌العمل تکیه‌گاهی برای قسمت میانی سازه است که در شکل‌های زیر نمایش داده شده است:

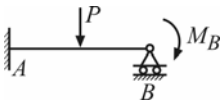



در سازه (۲) علت آنکه $F_۱$ و $F_۲$ باید در راستای نشان‌داده شده باشند آن است که قطعهٔ $ABC$ یک عضو ۲ نیرویی است. لذا $R_A$ باید از نقطه $C$ عبور کند. بنابراین راستای عکس‌العمل $R_A$، $AC$ می‌باشد. به علت تقارن سازه، $F_۱$ و $F_۲$ و $F_۳$ در $O$ همرس می‌شوند.

البته در سازهٔ (۳) می‌توان موازی بودن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را نیز عامل ناپایداری این سازه در نظر گرفت. (همهٔ عکس‌العمل‌ها در راستای قائم هستند)

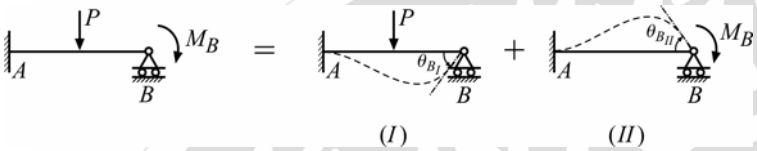
**۵۰- (۳)**

فرض کنید لنگر $M_B$ در فنر پیچشی ایجاد شود. می‌توان بارگذاری روی تیر را به این صورت درنظر گرفت:




با توجه به رابطه سازگاری شیب در $B$ داریم:

رابطه سازگاری: $\theta_{B\,\text{تیر}} = \theta_{\text{فنر}}$

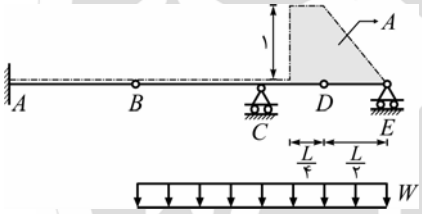



$$\theta_{B\,\text{تیر}} = \theta_{B(I)} - \theta_{B(II)} = \frac{PL^{۲}}{۳۲EI} - \frac{M_B L}{۴EI} \;,\; \theta_{\text{فنر}} = \frac{M_B}{K_{\text{فنر}}} = \frac{M_B}{\frac{۲EI}{L}} = \frac{M_B L}{۲EI}$$

$$\frac{PL^{۲}}{۳۲EI} - \frac{M_B L}{۴EI} = \frac{M_B L}{۲EI} \;\Rightarrow\; M_B = \frac{PL}{۲۴}$$

**۵۱- (۲)**

ابتدا خط تأثیر نیروی برشی را رسم می‌کنیم:




برای حداکثر شدن نیروی برشی در این مقطع، باید بار گسترده روی $BCDE$ قرار بگیرید:

$$V_{max_{m-n}} = WA = W \times \left[ \left(\frac{L}{۴} + \frac{۳L}{۴}\right) \times \frac{۱}{۲} \right] = \frac{WL}{۲}$$

**۵۲- (۱)**

اعضای $AC$ و $BC$ نمی‌توانند لنگر خمشی تحمل کنند. (چرا؟) بنابراین $M_{CA} = M_{CB} = ۰$ می‌باشد و لنگرهای تکیه‌گاه‌های این اعضا نیز صفر می‌شود:

$M_{AC} = M_{BC} = ۰$

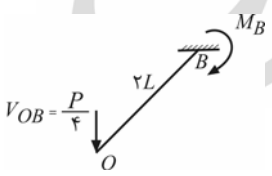
لنگر خمشی $M$ بین دو عضو $CD$ و $CG$ توزیع خواهد شد. چون سختی خمشی دورانی این دو عضو باهم برابر است $(\frac{۴EI}{L})$، لذا هریک از لنگرهای $M_{CD}$ و $M_{CG}$ برابر $\frac{M}{۲}$ خواهد شد.

$$M_{CD} = \frac{M}{۲} \;\Rightarrow\; M_{DC} = (C.O.F.) \times M_{CD} = \frac{۱}{۲} \times \frac{M}{۲} = \frac{M}{۴}$$

**۵۳- (۱)**

تغییرمکان قائم $O$ از هر ۳ تیر با میزان فشردگی فنر انتقالی برابر است. بنابراین این ۴ عضو مانند فنرهای موازی عمل کرده و نیروی $P$ به نسبت سختی اعضا بین آنها توزیع می‌شود. بنابراین نیروی انتقال یافته به عضو $OB$ برابر است با:

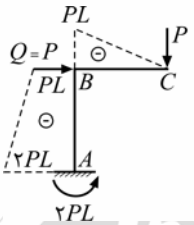
$$V_{OB} = P \times \frac{K_{OB}}{\sum K}$$



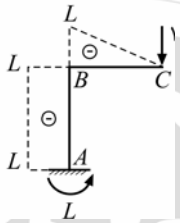

$$V_{OB} = P \times \frac{\frac{۳ \times ۴EI}{(۲L)^{۳}}}{\frac{۳ \times ۴EI}{(۲L)^{۳}} + ۲ \times \frac{۳ \times \frac{EI}{۲}}{L^{۳}} + \frac{۳EI}{۲L^{۳}}} = \frac{P}{۴} \;\Rightarrow\; M_B = \frac{P}{۴} \times ۲L = \frac{PL}{۲}$$

**۵۴- (۳)**

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم.




سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی




سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

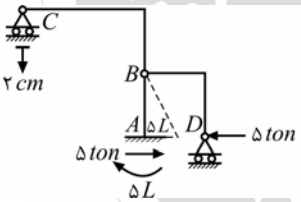
$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow M_A = PL + PL = ۲PL \qquad \sum M_A = ۰ \Rightarrow m_A = ۱ \times L = L$$

$$۱ \times \Delta_{C_y} = (\frac{A_M\,\bar{m}}{EI})_{AB} + (\frac{A_M\,\bar{m}}{EI})_{BC}$$

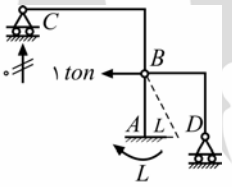
$$\Delta_{C_y} = \frac{\left[\frac{(PL+۲PL)}{۲} \times L\right] \times L}{EI} + \frac{\left[(\frac{۱}{۲} PL \times L)\right] \times \frac{۲L}{۳}}{EI} = \frac{۱۱PL^۳}{۶EI}$$

**۵۵- (۲)**

$n = ۳k + r - (C+۳) = ۳ \times ۰ + ۵ - (۲+۳) = ۰ \Rightarrow$ سازه معین است




سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی




سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

در سازه تحت اثر بارگذاری مجازی: $\begin{cases} BC: \sum M_B = ۰ \Rightarrow r_{C_y} = ۰ \\ BD: \sum M_B = ۰ \Rightarrow r_{D_y} = ۰ \end{cases}$

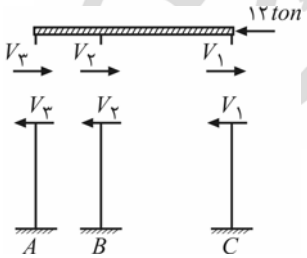
بنابراین در سازهٔ مجازی، هیچ خمشی در $BC$ و $BD$ ایجاد نمی‌شود و کافیست نمودار لنگر خمشی فقط در عضو $AB$ رسم شود.

$$۱ \times \Delta_{B_H} + ۰ \times \Delta_C = \frac{A_M\,\bar{m}}{EI}$$

$$\Delta_{B_H} = \frac{\left[\frac{۱}{۲} \times ۵L \times L\right] \times \frac{۲L}{۳}}{EI} = \frac{۵L^۳}{۳EI}$$

**۵۶- (۳)**

تغییرمکان افقی انتهای ستون‌ها یکسان است. بنابراین ستون‌ها مثل فنرهای موازی عمل می‌کنند و نیروی $۱۲\,ton$ به نسبت سختی ستون‌ها ($\frac{۳EI}{L^۳}$ هر ستون)، بین آنها توزیع می‌شود. چون طول ستون‌ها با هم برابر است، در نتیجه نیروی $۱۲\,ton$ به نسبت صلبیت خمشی ($EI$) بین ستون‌ها توزیع می‌گردد.



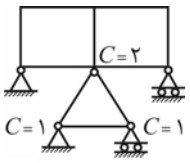

$$V_۱ = ۱۲ \times \frac{۳ \times (۲EI)}{۳ \times ۲EI + ۳ \times ۳EI + ۳ \times EI} = ۱۲ \times \frac{۶}{۱۸} = ۴\,ton \Rightarrow M_C = ۴ \times ۴ = ۱۶\,ton.m$$

$$V_۲ = ۱۲ \times \frac{۳ \times ۳EI}{۱۸EI} = ۶\,ton \Rightarrow M_B = ۶ \times ۴ = ۲۴\,ton.m$$

$$V_۳ = ۱۲ \times \frac{۳ \times EI}{۱۸EI} = ۲\,ton \Rightarrow M_A = ۲ \times ۴ = ۸\,ton.m$$

**۵۷- (۳)**

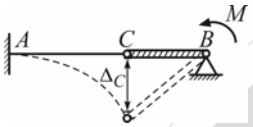
با استفاده از روش حلقه داریم:




$$n = ۳k + r - (C + ۳) = ۳ \times ۳ + ۶ - (۴ + ۳) = ۸$$

**۵۸- (۴)**

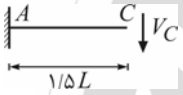
تغییرشکل تیر $ACB$ به شکل مقابل است.



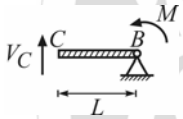

باتوجه به شکل داریم:

$$\theta_B = \frac{\Delta_C}{L_{BC}}$$

بنابراین کافیست $\Delta_C$ را بیابیم. $AC$ مطابق شکل مقابل بارگذاری می‌شود:




$V_C$ از تحلیل $BC$ بدست می‌آید:



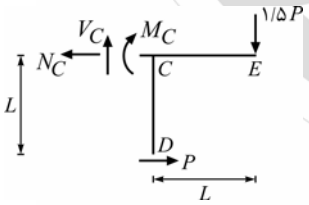

$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow V_C = \frac{M}{L}$$

$$\Delta_C = \frac{V_C\,(۱/۵L)^۳}{۳EI} = \frac{\frac{M}{L}(۱/۵L)^۳}{۳EI} = \frac{۹ML^۲}{۸EI}$$

$$\theta_B = \frac{\Delta_C}{L} = \frac{۹ML}{۸EI}$$

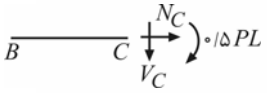
**۵۹- (۲)**

$AD$ عضوی دوسر مفصل بوده و نیروی برشی و لنگر خمشی در این عضو صفر است. بنابراین تمامی نیروی $P$ به عضو $CD$ منتقل می‌شود. قطعه $DCE$ را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم:




$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow M_C + ۱/۵PL = PL \Rightarrow M_C = -۰/۵PL$$

چون $M_C$ منفی بدست آمد، جهت در نظر گرفته شده برای $M_C$ نادرست بوده و $M_C$ در جهت پادساعتگرد می‌باشد.
عکس نیروهای موجود در گره $C$ از قطعه $DCE$، به $C$ از قطعه $CB$ منتقل می‌شوند (مطابق شکل).




$M_{CB} = ۰/۵PL$ در جهت عقربه‌های ساعت

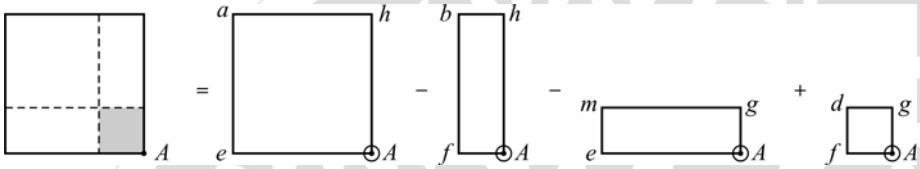
**۶۰- (۴)**

باتوجه به گزینه‌ها، کافیست بار واحد را روی گره $K$ قرار دهیم. از آنجا که $K$ تکیه‌گاه است، تمام نیروی قرار گرفته روی گره را تحمل کرده و نیرویی به سایر قسمت‌های سازه منتقل نمی‌شود. لذا $F_{DJ} = ۰$ بدست می‌آید و گزینهٔ (۴) صحیح است.
اگر بخواهیم با استفاده از قاعده مولر برسلاو خط تأثیر $F_{DJ}$ را به دست آوریم، بایستی عضو $DJ$ را حذف کنیم و گره‌های $D$ و $J$ را به میزان واحد به یکدیگر نزدیک کنیم. با توجه به پایداری خرپای $ABDK$، گرهٔ $D$ تغییر مکان نخواهد داشت و گرهٔ $J$ تغییر مکان می‌دهد. با جابجایی گرهٔ $J$ گزینه چهارم برای شکل خط تأثیر $F_{DJ}$ به دست می‌آید.

## مکانیک خاک و پی

**۶۱- (۳)**

سطوح بارگذاری مجاز برای محاسبه $I_r$ باید به گونه‌ای باشند که $A$ در گوشهٔ آنها قرار گیرد. بنابراین برای به‌دست آوردن تنش در زیر مستطیل $(abmd)$ در نقطه $A$ خواهیم داشت:




$$(I_r)_A = I_{ahAe} - I_{bhAf} - I_{mgAe} + I_{dgAf}$$

**۶۲- (۳)**

$$Q = kiA \;\Rightarrow\; ۰/۱۲ = (۰/۱)(i)(۸۰) \;\Rightarrow\; i = ۰/۰۱۵$$

$$\begin{cases} \sigma_N^* = \gamma' z = (۲۰-۱۰)\times ۱۰ = ۱۰۰\, kN/m^۲ \\ P = iz\gamma_w = (۰/۰۱۵)(۱۰)(۱۰) = ۱/۵\, kN/m^۲ \end{cases} \Rightarrow \sigma'_N = \sigma_N^* + P = ۱۰۰ + ۱/۵ = ۱۰۱/۵\, kN/m^۲$$

**۶۳- (۱)**

با استفاده از روابط درجه تحکیم می‌نویسیم:

$$U_m = ۱ - \frac{\Delta u_m}{\Delta u_۰} \quad , \quad \Delta u_۰ = \Delta\sigma = ۵۰\, kN/m^۲ \;\Rightarrow\; U_m = ۱ - \frac{۲۵}{۵۰} = ۰/۵ = ۵۰\%$$

$$U > U_m = ۵۰\% \;\Rightarrow\; U = \frac{\Delta H}{\Delta H_\infty} > ۰/۵ \;\Rightarrow\; \Delta H > ۷\times ۰/۵ = ۳/۵\, cm$$

**۶۴- (۲)**

برای محاسبه نیروی فشار بالابرنده در هر نقطه می‌بایست فشار پیزومتریک را داشته باشیم، بنابراین می‌نویسیم:

$$u_C = (h_p)_C \gamma_w = ۲۰\times ۱۰ = ۲۰۰\, kN/m^۲$$

**۶۵- (۳)**

**روش اول:**

$$\begin{cases} \sigma'_۰ = (۲۰-۱۰)(۴) = ۴۰\, kN/m^۲ \\ e_۰ = ۰/۹ - ۰/۲۵ \log\left(\frac{\sigma'_۰}{۱۶}\right) = ۰/۹ - ۰/۲۵ \log\left(\frac{۴۰}{۱۶}\right) = ۰/۹ - ۰/۲۵(\log ۱۰ - \log ۴) = ۰/۸ \\ \sigma'_f = \sigma'_۰ + \Delta\sigma' \quad , \quad \Delta\sigma' = \Delta\sigma = ۲۰\times ۲ = ۴۰\, kN/m^۲ \;\Rightarrow\; \sigma'_f = ۴۰ + ۴۰ = ۸۰\, kN/m^۲ \\ OCR = ۱ \quad \text{(رس عادی تحکیم‌یافته)} \;\Rightarrow\; \sigma'_c = \sigma'_۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta H = \frac{H_۰}{۱+e_۰}\left[C_r \log\left(\frac{\sigma'_c}{\sigma'_۰}\right) + C_c \log\left(\frac{\sigma'_f}{\sigma'_c}\right)\right] = \frac{۸۰۰}{۱+۰/۸}\left[۰/۰۴ \log(۱) + ۰/۲۵ \log\left(\frac{۸۰}{۴۰}\right)\right] = \frac{۸۰۰\times ۰/۲۵}{۱+۰/۸} \log ۲ \simeq ۳۳\, cm$$

**روش دوم:**

$$e_۰ = ۰/۸ \quad \text{و} \quad e_f = ۰/۹ - ۰/۲۵ \log\left(\frac{۸۰}{۱۶}\right) = ۰/۹ - ۰/۲۵(\log ۱۰ - \log ۲) = ۰/۷۲۵$$

$$\Rightarrow \Delta H = H_۰\left(\frac{e_۰ - e_f}{۱+e_۰}\right) = ۸۰۰\times\left(\frac{۰/۸ - ۰/۷۲۵}{۱+۰/۸}\right) \simeq ۳۳\, cm$$

**۶۶- (۱)**

$$\frac{t_۲}{t_۱} = \left(\frac{H_{dr_۲}}{H_{dr_۱}}\right)^۲ = \left(\frac{۲h_۱ \times \frac{۱}{۲}}{h_۱}\right)^۲ = ۱$$

**۶۷- (۴)**

$$\sigma_A = ۱۶\times۳+۱۹\times۲+۲۰\times۲ = ۱۲۶\ kN/m^۲$$

$$u_A = ۱۰\times۴ = ۴۰\ kN/m^۲$$

$$\sigma'_A = \sigma_A - u_A = ۱۲۶-۴۰ = ۸۶\ kN/m^۲$$

**۶۸- (۲)**

با قرار دادن یک پیزومتر در سطح $(X-X)$ ملاحظه می‌شود که ارتفاع آب بالا آمده در آن برابر است با:

$$(h_p)_{(X-X)} = ۳+۱+۲-\Delta h_۲ = ۶-\Delta h_۲$$

حال باتوجه به اینکه امتداد جریان عمود بر سطح لایه‌هاست، می‌توان نوشت:

$$Q_۱ = Q_۲ \Rightarrow k_۱A_۱(\frac{\Delta h_۱}{L_۱}) = k_۲A_۲(\frac{\Delta h_۲}{L_۲})$$

$$\xrightarrow[L_۱=L_۲=۲m]{A_۱=A_۲} (k_۱)(\Delta h_۱) = (۲k_۱)(\Delta h_۲) \Rightarrow \Delta h_۱ = ۲\Delta h_۲\ (I)$$ و رابطهٔ $\Delta h_۱+\Delta h_۲ = \Delta H = ۳\ m\ \ (II)$ رابطه

از روابط $(I)$ و $(II)$ نتیجه می‌شود که:

$$\Delta h_۱ = ۲m \quad , \quad \Delta h_۲ = ۱m$$

و درنهایت به‌دست می‌آید:

$$(h_p)_{(X-X)} = ۶-\Delta h_۲ = ۶-۱ = ۵m \Rightarrow u_{(X-X)} = \gamma_w\,(h_p)_{(X-X)} = ۱۰\times۵ = ۵۰\ kN/m^۲$$

**۶۹- (۳)**

**روش اول:**

$$V = A\times h = ۱۰۰۰\times۱۰۰ = ۱۰^۵\ mm^۳ = ۱۰۰\ cm^۳$$

$$\begin{cases} G_s = \dfrac{W_s}{V_s.\gamma_w} \\ W_s = ۱۵۰\ gr \end{cases} \Rightarrow ۲/۵ = \frac{۱۵۰}{V_s\times۱} \Rightarrow V_s = ۶۰\ cm^۳$$

$$\begin{cases} S_r = \dfrac{V_w}{V_v} \\ V_w = \dfrac{W_w}{\gamma_w} = \dfrac{W-W_s}{\gamma_w} = \dfrac{۱۸۰-۱۵۰}{۱} = ۳۰\ cm^۳ \\ V_v = V - V_s = ۱۰۰-۶۰ = ۴۰\ cm^۳ \end{cases} \Rightarrow S_r = \frac{۳۰}{۴۰} = ۰/۷۵ = ۷۵\%$$

**روش دوم:**

$$\omega = \frac{W_w}{W_s} = \frac{۱۸۰-۱۵۰}{۱۵۰} = \frac{۱}{۵}$$

$$G_s = \frac{W_s}{V_s\ \gamma_w} \Rightarrow ۲/۵ = \frac{۱۵۰}{V_s\times۱} \Rightarrow V_s = ۶۰\ cm^۳$$

$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{۱۰۰-۶۰}{۶۰} = \frac{۲}{۳}$$

$$\omega.G_s = S_r.e \Rightarrow \frac{۱}{۵}\times۲/۵ = S_r\times\frac{۲}{۳} \Rightarrow S_r = ۷۵\%$$

**۷۰- (۳)**

باتوجه به محور افقیِ نمودارها (کرنش برشی) واضح است که این نمودارها مربوط به آزمایش برش مستقیم می‌باشند. نمودار (ج) بررسی تغییرات حجم، نمودار (الف) بررسی تغییرات تنش برشی و نمودار (ب) نیز تغییرات نشانهٔ خلأ را نشان می‌دهد. اگر نمونه‌های ماسه متراکم و شل تحت بارگذاری اولیه یکسانی باشند، مقدار نهایی نشانه خلأ آنها یکسان خواهد بود. که این مورد در نمودار (ج) نشان داده شده است. به عبارت دیگر هرسه شکل صحیح می‌باشد.

**۷۱- (۲)**

با استفاده از روابط تراکم در توده خاک خواهیم داشت:

$$\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{۱+e_۲}{۱+e_۱} \Rightarrow \frac{V_۲}{۱۰۰۰}=\frac{۱+۰/۸}{۱+۱} \Rightarrow V_۲=۹۰۰m^۳$$

**۷۲- (۱)**

برای محاسبه فشار جانبی کل خاک در حالت سکون می‌نویسیم: $\sigma_h=\sigma'_v K_۰+u$

تنش موثر در پایین دیوار با توجه به سطح آب برابر است با: $\sigma'_v=\gamma H_۱+\gamma' H_۲$

فشار جانبی ناشی از وجود آب در پایین دیوار نیز در همه جهات ثابت بوده و برابر است با: $u=\gamma_w\ H_۲$

بنابراین فشار جانبی کل در پای دیوار برابر خواهد بود با: $\sigma_h=K_۰(\gamma H_۱+\gamma' H_۲)+\gamma_w H_۲$

**۷۳- (۴)**

خاک موردنظر رس عادی‌تحکیم‌یافته بوده، پس چسبندگی آن قابل صرفنظر کردن می‌باشد. $(c=۰)$

$$\begin{cases}\sigma_۳=۲۵۰\,kN/m^۲\\ \Delta\sigma_d=۲۷۶\,kN/m^۲\end{cases} \Rightarrow \sigma_۱=\sigma_۳+\Delta\sigma_d=۲۵۰+۲۷۶=۵۲۶\,kN/m^۲\ ,\ u_f=۱۱۲\,kN/m^۲$$

با توجه به اینکه در این آزمایش از پس فشار استفاده شده، بنابراین پارامترهای مؤثر مقاومت برشی مد نظر است. در این حالت با به‌کارگیری رابطه گسیختگی در آزمایش $CU$ را براساس تنش مؤثر خواهیم داشت:

$$\sigma'_۱=\sigma'_۳ tan^۲(۴۵+\frac{\phi'}{۲})+۲c'tan\,(۴۵+\frac{\phi'}{۲}) \Rightarrow (\sigma_۱-u_f)=(\sigma_۳-u_f)\,tan^۲(۴۵+\frac{\phi'}{۲})+۰$$

$$\Rightarrow (۵۲۶-۱۱۲)=(۲۵۰-۱۱۲)\times tan^۲(۴۵+\frac{\phi'}{۲}) \Rightarrow \sqrt{۳}=tan\,(۴۵+\frac{\phi'}{۲}) \Rightarrow \phi'=۳۰^\circ$$

**۷۴- (۱)**

با توجه به یکسان بودن قطر دایره‌های مور در آزمایش $UU$ در شرایط اشباع، واضح است که به ازای تنش‌های همه جانبه متفاوت، نمونه با تنش انحرافی یکسانی گسیخته می‌شود. بنابراین در این سؤال خواهیم داشت:

$$\Delta\sigma_{d_۲}=\Delta\sigma_{d_۱}=\sigma_۱-\sigma_۳=۰/۳۵-۰/۱=۰/۲۵MPa$$

**۷۵- (۴)**

با استفاده از معادله خط گسیختگی مور - کولمب داریم:

$$\tau_f=\sigma_f\ tan\phi+c\quad ,\quad c=۰\ (\text{خاک ماسه‌ای است}) \Rightarrow \tau_f=۱۵۰\times tan\,۳۰+۰=۵۰\sqrt{۳}\ kN/m^۲$$

$$T=\tau_f A=(۵۰\sqrt{۳}\times۱۰^۳)(۵۰\times۵۰\times۱۰^{-۶})=۱۲۵\sqrt{۳}\,N$$

**۷۶- (۳)**

$$FS=\frac{\text{لنگر مقاوم}}{\text{لنگر محرک}}=\frac{M_R}{M_d}$$

$M_{R_۱}=M_{R_۲}=M_w$ ($M_w$ لنگر ناشی از نیروی وزن دیوار است.)

$$M_{d_۱}=F_{a_۱}\times(\frac{H}{۳})=(\frac{۱}{۲}\gamma H^۲K_a)(\frac{H}{۳})=\frac{۱}{۶}\gamma H^۳K_a \Rightarrow M_{d_۱}=\frac{۱}{۶}(\gamma)(۳)^۳tan^۲(۴۵-\frac{۳۰}{۲})=۱/۵\,\gamma\ t.m$$

$$M_{d_۲}=(F_{a_۲}+F_w)(\frac{H}{۳})=(\frac{۱}{۲}\gamma' H^۲K_a+\frac{۱}{۲}\gamma_w H^۲)(\frac{H}{۳})=\frac{۱}{۶}H^۳(\gamma' K_a+\gamma_w)\ ,\ K_a=tan^۲(۴۵-\frac{۳۰}{۲})=\frac{۱}{۳}$$

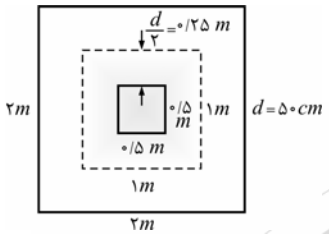
$$\Rightarrow M_{d_۲}=\frac{۱}{۶}(۳)^۳(۱\times\frac{۱}{۳}+۱)=۶\ t.m$$

حال با مقایسه ضریب اطمینان در دو حالت (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{FS_۲}{FS_۱}=\frac{M_{d_۱}}{M_{d_۲}} \Rightarrow \frac{۱}{۲/۴}=\frac{۱/۵\,\gamma}{۶} \Rightarrow \gamma=۱/۶۷\,t/m^۳$$

**۷۷- (۲)**

مقطع بحرانی برش پانچ (برش سوراخ‌کننده) به فاصله $\frac{d}{۲}$ از لبهٔ ستون بتنی قرار دارد که $d$ ، ضخامت مؤثر پی است. در این سؤال مقطع بحرانی برش پانچ (خط چین) به صورت مقابل است:




و از آنجا طبق اطلاعات داده شده در صورت سؤال، میزان تنش پانچ را محاسبه می‌کنیم:

الف) نیروی برشی سوراخ‌کننده $(Q)$ که نیروی محوری ستون منهای نیروی مؤثر بر داخل ناحیهٔ خط‌چین است:

$$Q = ۱۰۰ - (\frac{۱۰۰}{۲\times۲})(۱\times۱) = ۷۵\, ton$$

ب) محیط تنش سوراخ‌کننده ( $p_c$ ) یا همان محیط ناحیه خط چین:

$$p_c = ۱\times۴ = ۴\, m$$

ج) ضخامت کل پی ( $h_t$ ):

$$h_t = ۰/۶\, m$$

طبق فرمول داده شده در صورت سؤال، داریم:

$$\sigma_p = \frac{۱/۵\, Q}{p_c\, h_t} = \frac{۱/۵\times۷۵}{۴\times۰/۶} = ۴۶/۸۷۵\, t/m^۲ \simeq ۴۷\, t/m^۲$$

**۷۸- (۴)**

ابتدا مقدار نشست پی‌ها را مشابه با تست (۸۲) از آزمون (۸۱) به‌صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$s_۱ = \frac{q_۱}{kf} = \frac{P_۱}{Ak_f} = \frac{۶۰\times۱۰۰۰}{۲۰۰\times۲۰۰\times۱} = ۱/۵\, cm$$

$$s_۲ = \frac{q_۲}{kf} = \frac{P_۲}{Ak_f} = \frac{۱۰۰\times۱۰۰۰}{۲۰۰\times۲۰۰\times۱} = ۲/۵\, cm$$

شیب الاستیک بین دو پی از تقسیم اختلاف نشست دو پی بر فاصله محور تا محور آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$\text{شیب الاستیک} = \frac{s_۲ - s_۱}{L} = \frac{۲/۵ - ۱/۵}{۴۰۰} = \frac{۱}{۴۰۰}$$

**۷۹- (۲)**

اگر تنش نهایی زیر پی را با $q_{ult}$ ، تنش ایجاد شده در زیر پی که متناظر با نشست مجاز است را با $q_s$ و ضریب اطمینان را با $FS$ نشان دهیم، در آن صورت می‌توان نوشت:

$$q_{all} = min\left\{\frac{q_{ult}}{FS}, q_s\right\}$$

که در آن $q_{all}$، تنش مجاز زیر پی می‌باشد و ظرفیت باربری مجاز پی نیز برابر است با:

$$P_{all} = q_{all} \times \text{سطح مقطع پی}$$

در پاسخ به این سؤال، با توجه به نمودار تنش - نشست داریم:

$$q_{ult} = ۵\ kg/cm^۲ \quad , \quad q_s\ (s = ۲\, cm) = ۲\, kg/cm^۲ \ \Rightarrow\ q_{all} = min\left\{\frac{۵}{۲}, ۲\right\} = ۲\, kg/cm^۲$$

$$P_{all} = (۲)(۲۰۰\times۲۰۰) = ۸۰۰۰۰\, kg = ۸۰\, ton$$

**۸۰- (۳)**

چون مسأله در شرایط زهکشی نشده مطرح شده است، بنابراین خواهیم داشت:

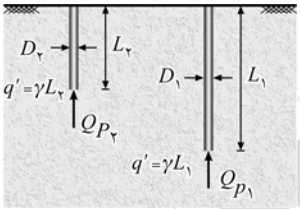
$$\begin{cases} q_{ult} = c_u N_c + q \xrightarrow{\text{ترزاقی}} q_{ult} = ۵/۷\, c_u + \gamma' D_f = ۵/۷\times۵ + ۲\times(۲-۱) = ۳۰/۵\, ton/m^۲ \\ c_u = \tau = ۰/۵\, kg/cm^۲ = ۵\, ton/m^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ q_{all} = \frac{q_{ult}}{FS} = \frac{۳۰/۵}{۳} = ۱۰/۱۶$$

**۸۱- (۲)**

**۸۲- (۱)**

از رابطه مایرهوف برای محاسبه ظرفیت باربری نوک شمع استفاده می‌کنیم:




$$Q_p = A_p\, q_p = A_p\,(cN_c^* + q'N_q^*) \xrightarrow{c=0} Q_p = q'N_q^* \cdot A_p$$

$$\xrightarrow{q'=\gamma L} Q_p = \gamma \cdot L \cdot N_q^* \cdot A_p$$

$N_q^*$ و $\gamma$ به جنس خاک بستگی داشته و برای هر دو شمع یکسان می‌باشد.

$$Q_{p_1} = Q_{p_2} \;\Rightarrow\; \gamma L_1 N_q^* A_{p_1} = \gamma L_2 N_q^* A_{p_2} \;\Rightarrow\; L_1 A_{p_1} = L_2 A_{p_2}$$

$$A_p = \pi \frac{D^2}{4} \;\Rightarrow\; L_1 D_1^2 = L_2 D_2^2 \;\Rightarrow\; 10\times(0/5)^2 = 5\times(D_2)^2 \;\Rightarrow\; D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, m = 0/707\, m$$

**۸۳- (۱)**

از آزمایش برش پره جهت اندازه‌گیری مقاومت برشی زهکشی نشده خاک‌های رسی استفاده می‌شود و پاسخ صحیح گزینه (۱) است.
گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست می‌باشند، زیرا:
از نتایج آزمایش $SPT$ برای تخمین زدن وزن مخصوص ($\gamma$)، دانسیته نسبی ($D_r$)، زاویه اصطکاک داخلی ($\phi$) و مقاومت فشاری محدود نشده ($q_u$) استفاده می‌شود. همچنین از نتایج این آزمایش می‌توان برای محاسبه ظرفیت باربری پی‌ها و همچنین مدول الاستیسته خاک نیز استفاده نمود.

در آزمایش نفوذ مخروط ($CPT$)، یک مخروط با زاویهٔ رأس ۶۰ درجه و سطح قاعدهٔ $10\,cm^2$، با سرعت یکنواختی در حدود ۲۰ میلی‌متر بر ثانیه به داخل خاک رانده شده و مقاومت نوک مخروط و مقاومت اصطکاک جدار غلاف با خاک اطراف آن اندازه‌گیری می‌شود.
گزینه (۴) نیز ناصحیح می‌باشد، زیرا حباب تنش پی گسترده نسبت به پی منفرد بزرگ‌تر است، بنابراین امکان تغییر وضعیت خاک در آن بیشتر می‌باشد.

**۸۴- (۲)**

مقدار $K$ به میزان حجم جابجا شده خاک در اطراف شمع و دانسیته اولیه خاک بستگی دارد. هرچه میزان حجم جابجا شده خاک در اطراف شمع بیشتر باشد، مقدار $K$ به $K_p$ نزدیک‌تر است و هر چه این حجم کمتر باشد، مقدار $K$ به $K_0$ نزدیک‌تر خواهد بود. بر همین اساس مقدار $K$ در شمع‌های درجاریز به $K_0$ و در شمع‌های پیش‌ساخته (کوبشی) به $K_p$ نزدیک‌تر است.

**۸۵- (۴)**

خروج از مرکزیت بار به اندازه $e_x = \frac{1}{3}m$ از مرکز سطح پی، باعث ایجاد لنگر $120\times\frac{1}{3} = 40\,t.m$ در خلاف جهت لنگرِ خود ستون می‌شود. بنابراین در جهت $x$ لنگر کل روی پی صفر است و لنگر روی پی تنها ناشی از خروج از مرکزیت بار در راستای $y$ خواهد بود. پس فشار زیر پی برابر است با:

$$q = \frac{P}{BL}\left(1 \pm \frac{6e_y}{B}\right)$$

$$\frac{q_{max}}{q_{min}} = \frac{1+\frac{6e_y}{B}}{1-\frac{6e_y}{B}} = \frac{1+\frac{6\times 0/2}{2}}{1-\frac{6\times 0/2}{2}} = \frac{1+0/6}{1-0/6} = 4$$

## مکانیک سیالات و هیدرولیک

**۸۶- (۲)**

ابتدا از رابطه پیوستگی، دبی در مقاطع (۲) و (۳) را می‌یابیم:

$$Q_۲ = V_۲ A_۲ = (۱۲)(\frac{\pi \times ۰/۱^۲}{۴}) = ۰/۰۳\pi \ m^۳/s$$

$$Q_۳ = V_۳ A_۳ = (۱۲)(\frac{\pi \times ۰/۱^۲}{۴}) = ۰/۰۳\pi \ m^۳/s$$

بنابراین دبی و سرعت در مقطع (۱) برابرند با:

$$Q_۱ = Q_۲ + Q_۳ = ۰/۰۳\pi + ۰/۰۳\pi = ۰/۰۶\pi \ m^۳/s$$

$$V_۱ = \frac{Q_۱}{A_۱} = \frac{۰/۰۶\pi}{(\frac{\pi \times ۰/۲^۲}{۴})} = ۶ m/s$$

حال با نوشتن معادله برنولی بین مقاطع (۱) و (۲)، $P_۱$ را محاسبه می‌کنیم. توجه شود که مقطع (۱) در لوله جریان قرار داشته و دارای فشار است.

$$z_۱ + \frac{P_۱}{\gamma_۱} + \frac{V_۱^۲}{۲g} = z_۲ + \frac{P_۲}{\gamma_۲} + \frac{V_۲^۲}{۲g} \xrightarrow[P_۲ = ۰]{z_۱ = z_۲} \frac{P_۱}{۱۰۰۰۰} + \frac{۶^۲}{۲ \times ۱۰} = \frac{۱۲^۲}{۲ \times ۱۰} \Rightarrow P_۱ = ۵۴۰۰۰ \ Pa$$

و در نهایت با استفاده از معادلهٔ مومنتوم خواهیم داشت:

$$\sum F_x = P_۱ A_۱ - F_x = (\sum \rho Q V_x)_{out} - (\sum \rho Q V_x)_{in}$$

$$(۵۴۰۰۰)(\frac{\pi \times ۰/۳^۲}{۴}) - F_x = (۱۰۰۰)(۰/۰۳ \times \pi)(۱۲ \cos ۶۰^\circ) + (۱۰۰۰)(۰/۰۳ \times \pi)(۱۲ \cos ۶۰^\circ) - (۱۰۰۰)(۰/۰۶ \times \pi)(۶)$$

$$\Rightarrow F_x = ۱۶۲۰ \ N$$

**۸۷- (۳)**

الف: رابطهٔ تعادل نیروهای وارد بر پیستون را در راستای قائم می‌نویسیم:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow W = F_B \Rightarrow ۵ = ۱۰۰۰۰ \times \left[ (\frac{\pi \times ۰/۱^۲}{۴})(x + y) \right] \Rightarrow x + y = ۰/۰۶۶۷ \ m = ۶/۶۷ cm$$

ب: حجم آب در هر دو حالت یکی است:

$$V_۱ = V_۲ \Rightarrow (\frac{\pi \times ۰/۲^۲}{۴})(y) = \frac{\pi(۰/۲^۲ - ۰/۱^۲)}{۴}(x + y) \Rightarrow \frac{x + y}{y} = ۱/۳۳$$

از قسمت‌های (الف) و (ب) نتیجه می‌شود که $y = ۵ cm$ است، بنابراین مقدار $h$ برابر است با:

$$h = ۱۰ - y = ۱۰ - ۵ = ۵ cm$$

**۸۸- (۴)**

اگر لایه‌های سیال نسبت به هم هیچ حرکتی نداشته باشند (سکون کامل یا سکون نسبی)، در آن صورت تنش برشی صفر بوده و فشار در یک نقطه از سیال در همه جهات یکسان است.

**۸۹- (۲)**

با نوشتن معادله پیوستگی جریان بین مقاطع بالادست و پایین دست کانال خواهیم داشت:

$$Q_۱ = Q_۲ \Rightarrow V_۱ \times ۴ = V_۲ \times ۱ \Rightarrow V_۲ = ۴ V_۱$$

دو نقطه (۱) و (۲) را روی سطح آزاد آب در بالادست و پایین دست جریان در نظر گرفته و معادله برنولی را بین این دو نقطه می‌نویسیم:

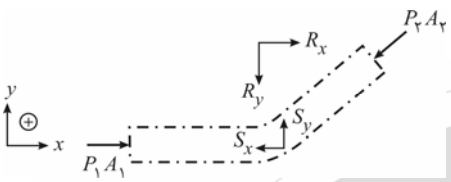
$$\frac{P_۱}{\gamma} + z_۱ + \frac{V_۱^۲}{۲g} = \frac{P_۲}{\gamma} + z_۲ + \frac{V_۲^۲}{۲g} \Rightarrow ۰ + ۴ + \frac{V_۱^۲}{۲g} = ۰ + ۱ + \frac{(۴V_۱)^۲}{۲g} \Rightarrow V_۱ = ۲ \ m/s$$

و در نهایت دبی عبوری از کانال را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$q = V_۱ y_۱ = ۲ \times ۴ = ۸ \ \frac{m^۳/s}{m}$$

**۹۰- (۳)**

با در نظر گرفتن حجم کنترل در داخل زانویی افقی خواهیم داشت:




$$V_1 = V_2 \quad , \quad z_1 = z_2 \xrightarrow{\text{معادله برنولی}} P_1 = P_2 = P = 100\ kPa$$

$$\sum F_x = PA - S_x - PA\cos 45 = \rho Q\,(V_{x_2} - V_{x_1})$$

$$(100\times10^3)(\pi\times0.2^2) - S_x - (100\times10^3)(\pi\times0.2^2)\cos 45^\circ$$

$$= (1000)(5\times\pi\times0.2^2)\times(5\cos 45^\circ - 5)$$

$$\Rightarrow\ S_x = 4500\ N = 4.5\ kN$$

$$\sum F_y = S_y - PA\sin 45 = \rho Q\,(V_{y_2} - V_{y_1})$$

$$S_y - (100\times10^3)(\pi\times0.2^2)\sin 45 = (1000)(5\times\pi\times0.2^2)(5\sin 45 - 0) \Rightarrow\ S_y = 10500\ N = 10.5\ kN$$

$$\vec{S} = -4.5\hat{i} + 10.5\hat{j}\ \Rightarrow\ \vec{R} = 4.5\hat{i} - 10.5\hat{j}$$

**۹۱- (۱)**

برای به‌دست آوردن $\Delta H$ کافی است تا معادله برنولی را بین دو نقطه واقع بر سطح آزاد هر یک از مخزن‌ها بنویسیم:

$$H_1 = H_2 + \Delta H\ \Rightarrow\ 10+0+0 = 0+0+0+\Delta H\ \Rightarrow\ \Delta H = 10\ m$$

**۹۲- (۳)**

چون جریان در داخل لوله ورقه‌ای (آرام) فرض شده است، از رابطه هاگن - پوازی جهت تعیین سرعت استفاده می‌کنیم:

$$\Delta H = \frac{32\nu VL}{gD^2}\ \Rightarrow\ 0.7 = \frac{32\times10^{-6}\times V\times0.7}{10\times0.002^2}\ \Rightarrow\ V = 1.25\ m/s$$

$$Q = VA = (1.25)\left(\frac{\pi\times0.002^2}{4}\right) = 3.75\times10^{-3}\,lit/s$$

**۹۳- (۲)**

$$(P_{abs})_A = P_{atm} + (P_g)_A \Rightarrow (P_g)_A = 258 - 101.5 = 156.5\,kPa$$

حال با نوشتن معادله مانومتری بین فشارسنج‌های $A$ و $B$، خواهیم داشت:

$$P_A - 13.6\gamma_w\times1 + 1.25\gamma_w\times1 = P_B$$

$$P_B = 156.5 - 13.6\times10\times1 + 1.25\times10\times1 = 33\,kPa$$

**۹۴- (۱)**

**۹۵- (۲)**

از آنجایی که فشار در بالای مخزن، فشار اتمسفر است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که فشار نسبی در پایین مخزن، نشان‌دهندهٔ اختلاف فشار بالا و پایین مخزن خواهد بود.

برای حل مسئله ابتدا معادل روغن، آب جایگزین می‌کنیم (۱/۲ متر آب به جای ۱/۵ متر روغن با چگالی نسبی ۰/۸) و سپس مقدار فشار در پایین مخزن را محاسبه می‌نماییم:

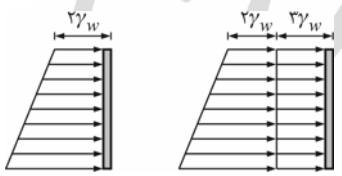
$$P_0 = \gamma h_0\left(1 + \frac{a_y}{g}\right)\ ,\ \frac{a_y}{g} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\ ,\ \gamma = 1000\ kgf/m^3$$

$$\Rightarrow\ P_0 = (1000)(1.2 + 1.5)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 4050\ kgf/m^2$$

**۹۶- (۱)**

افزایش ارتفاع آب (به میزان ۳ متر) در پشت دریچه باعث می‌شود تا اضافه فشار یکنواختی بر تمام دریچه وارد شود که مقدار آن برابر است با:

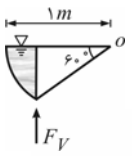
$$\Delta P = \gamma\Delta h = 3\gamma_w$$




به علت متقارن بودن توزیع اضافه فشار نسبت به محور افقی گذرنده از مرکز دریچه، در این حالت هیچگونه ممان پیچشی اضافی، تولید نخواهد شد. به عبارت دیگر مقدار ممان پیچشی لازم برای بسته نگه داشتن دریچه تغییر نمی‌کند.

**۹۷- (۳)**

برای محاسبهٔ نیروی فشاری قائم که بر زیر دریچه وارد می‌شود، با استفاده از روش مایع مجازی خواهیم داشت:




$$F_V = \gamma V = ۱۰۰۰۰ \times \left[ (\frac{۱}{۶} \times \pi \times ۱^۲)(۱) - (۱ \times \cos ۶۰ \times ۱ \times \sin ۶۰ \times \frac{۱}{۲})(۱) \right] = ۲۸۷۵ N \simeq ۳\ kN$$

**۹۸- (۴)**

طبق تعریف، عدد رینولدز نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت می‌باشد.

**۹۹- (۴)**

فشار و درجه حرارت در مدل و نمونه اصلی یکسان فرض شده است، بنابراین با تراکم‌ناپذیر در نظر گرفتن هوا و عدم نیاز به برقراری تشابه ماخ، تنها تشابه رینولدز بین مدل و نمونه اصلی را در نظر می‌گیریم. همان‌طور که در تست (۹۸) از آزمون سال ۸۰ نیز مشاهده شد، با استفاده از تشابه رینولدز، مقیاس سرعت به صورت مقابل خواهد بود:

$$(Re)_m = (Re)_p \Rightarrow V_r = \frac{۱}{L_r} \Rightarrow \frac{V_m}{۶۴۰} = ۲۰ \Rightarrow V_m = ۱۲۸۰۰\ km/h$$

**۱۰۰- (۱)**

با بکارگیری تشابه فرود بین مدل و نمونه اصلی، خواهیم داشت:

$$Fr_m = Fr_p \Rightarrow \frac{V_m}{\sqrt{gl_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{gl_p}} \Rightarrow V_r = \sqrt{L_r} \Rightarrow \frac{۰/۶}{V_p} = \sqrt{\frac{۱}{۲۵}} \Rightarrow V_p = ۳\ m/s$$

**۱۰۱- (۲)**

ابتدا با مقایسهٔ انرژی مخصوص جریان قبل از تنگنا ($E_۱$) با انرژی مخصوص حداقل جریان در تنگنا ($E_{min_۲}$) وقوع پدیده انسداد را کنترل می‌کنیم:

$$q_۱ = \frac{۴۰\sqrt{۵}}{۲۰} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow E_۱ = y_۱ + \frac{q_۱^۲}{۲gy_۱^۲} = ۲/۵ + \frac{(۲\sqrt{۵})^۲}{۲ \times ۱۰ \times ۲/۵^۲} = ۲/۶۶\ m$$

$$q_۲ = \frac{۴۰\sqrt{۵}}{۱۰} = ۴\sqrt{۵} \Rightarrow E_{min_۲} = \frac{۳}{۲}(\frac{q_۲^۲}{g})^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۳}{۲} \times (\frac{(۴\sqrt{۵})^۲}{۱۰})^{\frac{۱}{۳}} = ۳\ m$$

از آنجا که $E_۱ < E_{min_۲}$ می‌باشد، انسداد رخ می‌دهد. در این حالت جریان در بالادست تغییر وضعیت داده (عمق افزایش می‌یابد) و با وقوع انسداد در محل تنگنا، عمق برابر $y_{c_۲}$ خواهد بود:

$$y_۲ = y_{c_۲} = \frac{۲}{۳} E_{min_۲} = \frac{۲}{۳} \times ۳ = ۲\ m$$

**۱۰۲- (۲)**

$$E_{min} = E_c = \frac{۳}{۲} y_c = ۳m \Rightarrow y_c = ۲m$$

$$y_c = (\frac{q^۲}{g})^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow ۲ = (\frac{q^۲}{۱۰})^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow q = ۴\sqrt{۵}\ \frac{m^۳/s}{m}$$

$$q = Vy \Rightarrow ۴\sqrt{۵} = V \times ۲/۵ \Rightarrow V = ۱/۶\sqrt{۵}\ m/s$$

بنابراین عدد فرود جریان برابر است با:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gy}} = \frac{۱/۶\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰ \times ۲/۵}} = \frac{۱/۶}{\sqrt{۵}}$$

**۱۰۳- (۳)**

ابتدا دبی جریان را بر اساس اطلاعات به‌دست آمده از طراحی اول (با استفاده از رابطهٔ مانینگ) می‌یابیم. برای این کار از مشخصات هندسی مقطع بهینهٔ مستطیلی استفاده می‌شود.

$$\begin{cases} Q = \frac{۱}{n} A R^{\frac{۱}{۳}} S^{\frac{۱}{۲}} \\ A = ۲y^۲,\ R = \frac{y}{۲} \end{cases} \Rightarrow Q = \frac{۱}{n} ۲y^۲ \times (\frac{y}{۲})^{\frac{۲}{۳}} \times S^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۰/۰۲} \times ۲ \times ۱^۲ \times (\frac{۱}{۲})^{\frac{۲}{۳}} \times S^{\frac{۱}{۲}} = ۵۰\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt{S}$$

اکنون $Q$ به‌دست آمده را در رابطهٔ شزی جایگذاری می‌کنیم.

$$Q = CA\sqrt{RS} \Rightarrow ۵۰\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt{S} = ۵۰ \times ۲y^۲ \times \sqrt{\frac{y}{۲}} \times \sqrt{S} \Rightarrow \sqrt{۲}y^{\frac{۵}{۲}} = \sqrt[۳]{۲} \Rightarrow y = ۲^{-\frac{۱}{۱۵}}\ m$$

**۱۰۴- (۳)**

در کانال مستطیلی عریض، $q$ برابر است با:

$$q=\frac{1}{n}y_0^{\frac{5}{3}}S^{\frac{1}{2}} \Rightarrow S=\frac{n^2q^2}{y_0^{\frac{10}{3}}}$$

حال کافیست $q$ را بیابیم. با نوشتن رابطه انرژی بین دریاچه و کانال داریم:

$$\underset{\text{دریاچه}}{E_1}=\underset{\text{کانال}}{E_2} \Rightarrow H_0=y_0+\frac{q^2}{2gy_0^2} \Rightarrow 2/5=2+\frac{q^2}{2\times10\times2^2} \Rightarrow q^2=40$$

بنابراین شیب کف کانال برابر است با:

$$S=\frac{0/01^2\times40}{2^{\frac{10}{3}}}=\frac{40}{8\times\sqrt[3]{2}}\times10^{-4}=4\times10^{-4}$$

**۱۰۵- (۴)**

جریان در پایین سرریز وضعیت فوق بحرانی دارد ($y<y_c$). بنابراین لازم است پس از تشکیل نیم‌رخ $M_3$، در پایین دست مقطع با عمق $y_1$، پرش هیدرولیکی تشکیل شود. توجه شود که بسته به شرایط پایین دست جریان (پایاب) امکان کاهش عمق از $y_2$ به $y_3$ توسط پروفیل $M_2$ نیز وجود دارد.

**۱۰۶- (۳)**

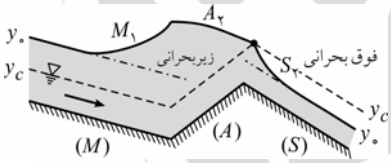
نسبت انرژی مخصوص ($E$) به عمق ($y$) را در یک کانال مستطیلی، می‌توان به‌صورت زیر و برحسب عدد فرود به‌دست آورد:

$$E=y+\frac{V^2}{2g} \Rightarrow \frac{E}{y}=1+\frac{V^2}{2gy}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{V^2}{gy}\right)\ ,\ Fr^2=\frac{V^2}{gy} \Rightarrow \frac{E}{y}=1+\frac{1}{2}Fr^2$$

در این سؤال با جایگذاری $Fr=0/8$، خواهیم داشت:

$$\frac{E}{y}=1+\frac{1}{2}Fr^2=1+\frac{1}{2}\times0/8^2=1/32$$

**۱۰۷- (۱)**




پس از رسم خطوط مربوط به عمق‌های $y_0$ و $y_c$، پروفیل‌های ممکن این جریان به‌صورت روبه‌رو می‌باشند:

**توجه**: چون در طول جریان تغییر از حالت زیربحرانی به حالت فوق‌بحرانی، یک بار اتفاق افتاده است، یک نقطهٔ کنترل در محل تقاطع شیب‌های $S$ و $A$ باید داشته باشیم.

**تذکر**: این سؤال عیناً مشابه سؤال ۱۰۷ کنکور سراسری سال ۸۰ می‌باشد.

**۱۰۸- (۴)**

در کانال‌ها خط گرادیان هیدرولیکی ($H.G.L$) بر اساس نقاط واقع بر سطح آزاد آب تعریف می‌شود و همواره بر سطح آزاد آب منطبق بوده و مستقل از شیب کف کانال است.

**تذکر**: البته طراح کنکور سراسری به اشتباه گزینهٔ (۲) را به عنوان پاسخ اعلام نموده بود!

**۱۰۹- (۱)**

با استفاده از رابطهٔ مانینگ داریم:

$$q=\frac{1}{n}y^{\frac{5}{3}}S^{\frac{1}{2}}$$

از طرفی جریان بحرانی است، بنابراین می‌نویسیم:

$$y=y_c=\left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow q^2=gy_c^3$$

و در نهایت با مقایسه دو رابطه به‌دست آمده، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} q^2=\frac{1}{n^2}y_c^{\frac{10}{3}}S \\ q^2=gy_c^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{n^2}y_c^{\frac{10}{3}}S=gy_c^3 \Rightarrow S=gn^2y_c^{-\frac{1}{3}}$$

**۱۱۰- (۳)**

همان‌طور که می‌دانیم، در محل برآمدگی، انرژی مخصوص به اندازه $\Delta z$ (ارتفاع برآمدگی) نسبت به مقطع قبل از آن کاهش می‌یابد.

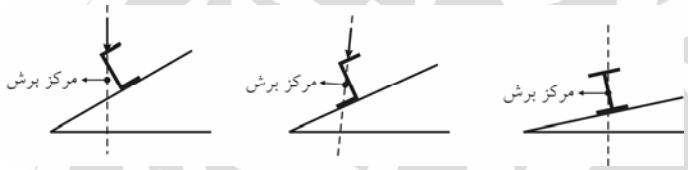
## سازه‌های فولادی و بتنی

**۱۱۱- (۴)**

با توجه به مفاهیم طراحی اعضاء کششی، نورد گرم موجب ایجاد تنش‌های پسماند در مقطع شده که این تنش‌های پسماند حالت تیزی نمودار تنش - کرنش فولاد را در بارگذاری کششی از بین می‌برند و نمودار تنش - کرنش فولاد مانند گزینه چهارم خواهد شد.

**۱۱۲- (۳)**

در بارگذاری بر روی لاپه‌ها، بهتر است وضعیت بارگذاری به‌گونه‌ای باشد که بار قائم از مرکز برش عبور کرده تا در عضو پیچش ایجاد نشود. به همین جهت در شیب‌های کم از مقطع $I$ شکل، در شیب‌های متوسط از مقطع $Z$ شکل و در شیب‌های نسبتاً زیاد از ناودانی استفاده می‌شود.




در شیب ۱۵ درصد، می‌توان از $Z$ شکل و ناودانی با آرایش نشان داده شده در موارد ب و ج استفاده کرد.

**۱۱۳- (؟)**

برای به‌دست آوردن حداکثر بار محوری کششی مجاز، ابتدا باید هر یک از مقادیر $T_۱$ و $T_۲$ را از روابط زیر به‌دست آورده، سپس حداقل آنها را به عنوان حداکثر بار محوری کششی مجاز انتخاب کنیم. بر اساس مبحث دهم مقررات ملی ساختمان، ضریب سطح مؤثر $U$ در تمام اعضای با اتصال پیچی و یا پرچی که فقط دو وسیله اتصال در هر ردیف در امتداد تأثیر نیرو موجود باشد، برابر ۰/۷۵ است.

$$A_g = b \times t = ۲۰ \times ۱ = ۲۰\, cm^۲$$

$$A_n = (b - nD)\, t = (۲۰ - ۲ \times ۲) \times ۱ = ۱۶\, cm^۲ \;,\; A_e = U\, A_n = ۰/۷۵ \times ۱۶ = ۱۲\, cm^۲$$

$$\begin{cases} \dfrac{T_۱}{A_g} \le ۰/۶\, F_y \;\Rightarrow\; T_۱ = ۰/۶\, F_y\, A_g = ۱۴۰۰ \times ۲۰ = ۲۸۰۰۰\, kg = ۲۸\, ton \\ \dfrac{T_۲}{A_e} \le ۰/۵\, F_u \;\Rightarrow\; T_۲ = ۰/۵\, F_u\, A_e = ۲۰۰۰ \times ۱۲ = ۲۴۰۰۰\, kg = ۲۴\, ton \end{cases}$$

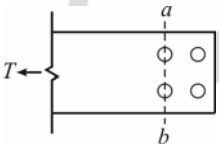
$$T_{max} = min\{T_۱, T_۲\} = min\{۲۸, ۲۴\} = ۲۴ ton$$

نیروی ۲۴ تن در گزینه‌ها وجود ندارد و تست غلط می‌باشد. اشتباهی که طراح تست مرتکب شده این است که ضریب سطح مؤثر $U$ را به غلط برابر یک فرض کرده است. در این صورت حداکثر بار محوری کششی بر اساس معیار گسیختگی برابر ۳۲ تن محاسبه می‌شود که بزرگتر از ۲۸ تن بوده و تعیین‌کننده نیست و گزینه اول (۲۸ تن) مدنظر طراح تست بوده است. در این تست می‌توان به نکات زیر اشاره کرد:

۱) با توجه به اینکه در صورت سؤال تنش‌های مجاز را داده است از مقادیر $۰/۶\, F_y$ و $۰/۵\, F_u$ استفاده نمی‌کنیم و به صورت مستقیم از تنش‌های مجاز ارائه شده استفاده می‌کنیم.

۲) برای تعیین دقیق نیروی کششی مجاز، معمولاً باید پدیدهٔ گسیختگی قالبی را نیز کنترل کنیم، اما در این تست با توجه به گزینه‌ها بررسی گسیختگی قالبی لزومی ندارد.

۳) با توجه به شکل زیر، مسیر بحرانی برای گسیختگی مسیر $ab$ خواهد بود.

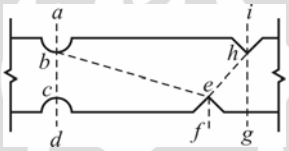


**۱۱۴- (۲)**

ابتدا باید به این نکته توجه کرد که چون در صورت سؤال عبارت بدون اعمال ضرایب اطمینان آورده شده است، در محاسبهٔ نیروی کششی مجاز ضرایب ۰/۶ و ۰/۵ را در تنش‌های $F_y$ ۰/۶ و $F_u$ ۰/۵ اعمال نمی‌کنیم.

$$A_g = ۱۰ \times ۱/۲ = ۱۲\, cm^۲$$

برای محاسبهٔ $A_n$ باید ۴ مسیر را مطابق شکل زیر کنترل کنیم:




$$\begin{cases} abcd \text{ مسیر}: A_n = (۱۰-۴) \times ۱/۲ = ۷/۲\, cm^۲ \\ ihg \text{ مسیر}: A_n = (۱۰-۳) \times ۱/۲ = ۸/۴\, cm^۲ \\ ihef \text{ مسیر}: A_n = \left(۱۰ - ۲ \times ۳ + \dfrac{۱۵^۲}{۴ \times \left((۱۰-۳-۳) + (۲ \times \frac{۲}{۳} \times ۳)\right)}\right) \times ۱/۲ = ۱۳/۲۴\, cm^۲ \end{cases}$$

با توجه به اینکه در مسیر $abef$ مقدار فاصلهٔ افقی ($s$) را در اختیار نداریم نمی‌توانیم آن را محاسبه کنیم. با توجه به محاسبات فوق مسیر $abcd$ بحرانی می‌باشد و $A_n$ برابر $۷/۲ cm^۲$ است.

$$\begin{cases} T_۱ = A_g\, F_y = ۱۲ \times ۴۰۰۰ = ۴۸۰۰۰\, kg = ۴۸\, ton \\ T_۲ = A_{n_{min}}\, F_u = ۷/۲ \times ۶۰۰۰ = ۴۳۲۰۰\, kg = ۴۳/۲\, ton \end{cases} \Rightarrow T_{max} = min\{T_۱, T_۲\} = ۴۳/۲\, ton$$

در این سؤال به موارد زیر دقت کنید:

۱) به علت عدم وجود تقارن در ورق، در اثر اعمال بار $P$ در فاصله بین دو فرورفتگی مثلثی در ورق علاوه بر تنش‌های کششی، تنش‌های قائم ناشی از خمش نیز ایجاد می‌شود که در این سؤال منظور طراح نبوده است.

۲) در محاسبهٔ $A_n$ برای مسیر $ihef$، برای محاسبهٔ $g$ از فاصلهٔ مرکز سطح مثلث‌ها از یکدیگر استفاده گردید.

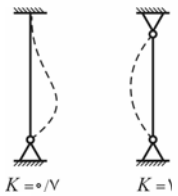
**۱۱۵- (۳)**

به بررسی هر یک از چهار ستون می‌پردازیم:

الف) ستون نشان داده شده در شکل (الف)، توسط تیر افقی و تکیه‌گاه ساده مهار جانبی شده می‌باشد و ضریب طول مؤثر برای آن از یک کوچکتر است. با توجه به اینکه یک انتهای ستون به صورت گیردار و انتهای دیگر مفصلی است $K = ۰/۷$ می‌باشد.

ب) قاب شکل (ب) نیز توسط تکیه‌گاه‌های گیردار مهار جانبی شده و ضریب طول مؤثر ستون در آن کوچکتر از یک می‌باشد. با توجه به اینکه میزان گیرداری اتصال را نمی‌دانیم دو حالت حدی زیر را در نظر می‌گیریم:

بنابراین ضریب طول مؤثر ستون در قاب شکل (ب) بین دو حالت دو سر مفصل و مفصلی گیردار می‌باشد:




$$\Rightarrow \quad ۰/۷ < K < ۱$$

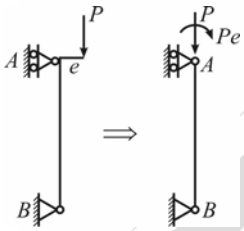
ج) قاب شکل (ج)، مهار جانبی نشده است و بالای ستون‌ها می‌توانند نسبت به تکیه‌گاه‌ها جابه‌جا شوند، پس در ستون‌های این قاب $K > ۱$ می‌باشد ($K = ۲$).

د) قاب شکل (د) توسط بادبند، مهار جانبی شده می‌باشد و با توجه به مفصلی بودن ابتدا و انتهای ستون‌ها، $K = ۱$ می‌باشد.

با توجه به اینکه به ازاء نیروی محوری یکسان هرچه ضریب طول مؤثر کمانش ستون بیشتر باشد، احتمال وقوع کمانش در آن بیشتر است، نتیجه می‌شود که گزینهٔ (۳) صحیح است.

**۱۱۶- (۳)**

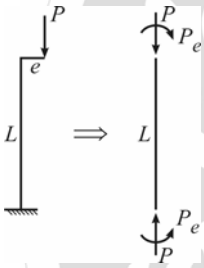
در این ستون دو سر مفصل برش وارد بر ستون برای طراحی بست‌ها برابر $۰/۰۲P + R_A$ بوده و داریم:




$$V = ۰/۰۲P + R_A = ۰/۰۲P + \frac{Pe}{L}$$

$$M = \frac{VL'}{۴} = P\left(\frac{e}{L} + \frac{۱}{۵۰}\right)\frac{L'}{۴}$$

**تذکر ۱:** در صورتی که ستون قسمتی از یک ستون یک‌سر گیردار، یک‌سر آزاد باشد، برش وارد بر ستون برای طراحی بست‌ها برابر $۰/۰۲P$ بوده و لنگر طراحی بست‌ها عبارت است از:




$$\text{برش ستون در اثر لنگر } Pe = ۰ \Rightarrow V = ۰/۰۲P$$

$$M = \frac{VL'}{۴} = \frac{۰/۰۲PL'}{۴}$$

**تذکر ۲:** توجه شود که با انتقال نیروی $P$ به مرکز سطح، لنگر حاصله در راستای $y$ و برش ناشی از آن در راستای $x$ بوده و توسط بست‌ها تحمل می‌شود.

**۱۱۷- (۱)**

برای پیدا کردن حداکثر بار مجاز $P$ باید دو کنترل انجام شود:

۱- کنترل خیز وسط دهانه ۲- کنترل تنش خمشی ماکزیمم

سپس از دو کنترل مربوطه دو مقدار برای $P$ به‌دست می‌آید که حداقل آنها حداکثر $P$ خواهد بود.

$$\text{کنترل تنش}: M = \frac{PL}{۴} = \frac{P \times ۸۰۰}{۴} = ۲۰۰P \quad , \quad f_{max} = F_b = \frac{M}{S} \Rightarrow ۱۴۰۰ = \frac{۲۰۰P}{۴۰۰} \Rightarrow P_۱ = ۲۸۰۰\,kg = ۲/۸\,ton$$

$$\text{کنترل خیز}: \Delta = \frac{PL^۳}{۴۸EI} \Rightarrow \frac{L}{۳۰۰} = \frac{PL^۳}{۴۸\,EI} \Rightarrow P_۲ = \frac{۴۸EI}{۳۰۰L^۲} = \frac{۴۸ \times ۲ \times ۱۰^۶ \times ۸۰۰۰}{۳۰۰ \times ۸۰۰^۲} = ۴۰۰۰\,kg = ۴\,ton$$

$$\Rightarrow P = min\,\{P_۱, P_۲\} = ۲/۸\,ton$$

برای محاسبهٔ ارتفاع مقطع ($d$) در قسمت دوم سؤال داریم:

$$f_{max} = F_b = \frac{Mc}{I} \Rightarrow F_b = \frac{M\,\frac{d}{۲}}{I} \Rightarrow M = F_b\,\frac{۲I}{d}$$

$$\Delta = \frac{PL^۳}{۴۸EI} = \frac{۱}{۱۲}\left(\frac{PL}{۴}\right)\frac{L^۲}{EI} = \frac{۱}{۱۲}(M_{max})\frac{L^۲}{EI} = \frac{۱}{۱۲}\left(F_b\,\frac{۲I}{d}\right)\frac{L^۲}{EI} = \frac{۱}{۶}\frac{F_b}{E}\frac{L^۲}{d}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta}{L} = \dfrac{۱}{۶}\dfrac{F_b}{E}\dfrac{L}{d} \\ \Delta = \dfrac{L}{۳۰۰} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۳۰۰} = \frac{۱}{۶}\frac{F_b}{E}\frac{L}{d} \Rightarrow d = \frac{۳۰۰F_b}{۶E}L = \frac{۳۰۰ \times ۱۴۰۰}{۶ \times ۲ \times ۱۰^۶}L = \frac{۷}{۲۰۰}L$$

**۱۱۸- (۲)**

با توجه به اثبات زیر، ضریب اطمینان برای برش ۱/۴۴ درنظر گرفته شده است و همانطور که مشخص است این ضریب کمتر از ضریب اطمینان درنظر گرفته شده برای کشش و خمش (۱/۶۷) می‌باشد.

مقدار مجاز توسط رابطه فون میزز $\Rightarrow$

$(\tau)^2+(-\tau)^2+(\tau)\times(-\tau)\le F_y^2 \Rightarrow \tau\le\frac{F_y}{\sqrt{3}}$

$$F.S.=\frac{\frac{F_y}{\sqrt{3}}}{0/4\,F_y}\simeq 1/44$$

**۱۱۹- (۴)**

با توجه به مطالب بیان شده در آئین‌نامه، گزینهٔ (۴) صحیح است. عدد ذکر شده $\left(\frac{1}{12}\right)$ حدود ۰/۰۸ می‌شود. بر اساس مبحث دهم مقررات ملی ساختمان داریم:

شرط صرف‌نظر کردن از تشدید لنگر $\Rightarrow \frac{f_a}{F_a}\le 0/15 \Rightarrow \frac{P}{\frac{12}{23}P_{cr}}\le 0/15 \Rightarrow \frac{P}{P_{cr}}\le\frac{12}{23}\times 0/15=0/08$

**۱۲۰- (۳)**

با توجه به مفاهیم کمانش پیچشی - جانبی، گزینهٔ (۳) صحیح است.

بهتر بود که طراح محترم به گزینهٔ سوم به عنوان جواب تست، فاصلهٔ مهارهای جانبی را اضافه می‌کرد.

**۱۲۱- (۳)**

از آنجا که برش به‌صورت مشتق اول خمش تعریف می‌شود، در صورت وجود تغییرات در نمودار لنگر خمشی، برش در مقطع به‌وجود می‌آید. به همین دلیل مقاطع می‌توانند تحت خمش خالص و یا خمش توأم با برش قرار گیرند.

برای طراحی مقاطع تحت خمش و برش، عموماً ابعاد مقطع و سطح فولادهای طولی براساس طرح خمشی تعیین شده و سپس مقاومت طرح در برابر نیروی برشی کنترل می‌شود. آن گاه در صورت لزوم، برای افزایش مقاومت مقطع از فولادهای مناسب جهت تقویت مقاومت برشی استفاده می‌شود.

شکست مقاطع تحت نیروی برشی که شکست برشی خوانده می‌شود، به‌صورت ترد، ناگهانی و بدون هشدار است. به همین دلیل طراحی مقاطع به‌گونه‌ای انجام می‌شود که تیر تحت بارهایی کمتر از شکست برشی، در خمش گسیخته شود.

با توجه به اینکه گسیختگی برشی اغلب به صورت ناگهانی و بدون هشدار ایجاد می‌شود، لذا عموماً با انتخاب ضرایب ایمنی بزرگتر برای برش، تیرها را طوری طراحی می‌کنند که گسیختگی خمشی که با ایجاد تغییرشکل هشداردهنده همراه است، زودتر اتفاق بیفتد.

**۱۲۲- (۱)**

با توجه به رابطه $u=\frac{1}{\pi d_b}\frac{dT}{dx}$، بین هر دو نقطه از میلگرد که نیروی کششی $(T)$ تغییر کند یعنی $dT$ وجود داشته باشد، تنش پیوستگی روی محیط میلگرد ایجاد می‌شود.

**۱۲۳- (۴)**

ضوابط مربوط به فولادهای عرضی به‌صورت دورپیچ، شامل حداقل قطر و حداقل و حداکثر فاصله دورپیچ‌ها (گام دورپیچ) می‌باشد.

با توجه به منحنی بار - تغییرشکل ستون‌ها، بعد از رسیدن بار حداکثر ستون با دورپیچ به مقدار ماکزیمم اولیه، پوسته بتنی روی دورپیچ‌ها خرد شده و مقاومت آن از دست می‌رود. حداقل مقدار آرماتورهای عرضی به شکل دورپیچ، به‌گونه‌ای محاسبه می‌شود تا اضافه مقاومت ناشی از آن در هسته مقطع که به دلیل اثر محصورشدگی است با این کاهش مقاومت برابر باشد. به بیان دیگر بار حداکثر ستون قبل از ریختن پوسته برابر با بار حداکثر ستون پس از ریختن پوسته و فعال شدن مقاومت محصورشدگی باشد.

**۱۲۴- (۱)**

رفتار مقاطع خمشی بسته به میزان لنگر وارده، می‌تواند در سه محدوده زیر قرار گیرد:

۱) رفتار الاستیک ۲) رفتار الاستوپلاستیک ۳) رفتار پلاستیک

در مقاطع با رفتار الاستیک تحت خمش، ویژگی‌های زیر وجود دارد:

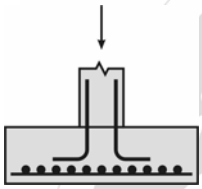
- لنگر خمشی بقدری کم است که هیچ‌گونه ترک‌خوردگی در ناحیه کششی مقطع روی نمی‌دهد.
- بتن در ناحیه فشاری و کششی و همچنین فولاد کششی، همگی رفتاری خطی دارند.
- به‌دلیل عدم ترک‌خوردگی مقطع، تنش در دورترین تار کششی بتن از مدول گسیختگی بتن ($f_r$) کمتر است.
- به دلیل رفتار خطی بتن و فولاد، می‌توان با استفاده از روابط مقاومت مصالح، مقطع را تحلیل کرد.

**نکته:** اکثر مقاومت خمشی تیرهای بتنی بعد از ترک‌خوردگی آن‌ها و انتقال تنش کششی به فولادها بروز می‌کند. لذا محدود کردن یک مقطع به‌طوری که در ناحیه کششی ترک نخورد و رفتار الاستیک داشته باشد، باعث از دست دادن مقدار زیادی از ظرفیت بتن و فولاد خواهد شد و به یک طرح غیراقتصادی منجر می‌شود.

**نکته:** طراحی مقاطع در حالت الاستیک تنها در موارد خاصی انجام می‌شود که ترک‌خوردگی به هیچ‌وجه در قطعه مجاز نباشد، مثل مواردی که قطعه در تماس با آب و یا در معرض گازهای فرار باشد.

عمده مقاومت تیرها بعد از ترک‌خوردگی خواهد بود، لذا لنگری که باعث ایجاد ترک در مقطع می‌شود درصد کمی از لنگر مقاوم نهایی است.

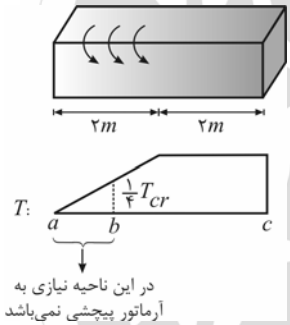
**۱۲۵- (۳)**



در مورد میلگردهای انتظار که بین پی و ستون قرار می‌گیرند، طول مهاری باید به شیوهٔ مناسب در درون ستون و در درون پی تأمین شود.

از آنجا که میلگردهای ستون اغلب تحت فشار قرار می‌گیرند، کاربرد قلاب در داخل پی برای آن‌ها مؤثر نخواهد بود و تنها جنبه اجرایی (از نظر سادگی در نصب) خواهد داشت.

**۱۲۶- (۳)**




فرض کنید $2m$ اول از انتهای آزاد تحت لنگر پیچشی است. در این حالت نمودار لنگر پیچشی مطابق شکل مقابل است و در قسمت‌هایی که لنگر پیچشی وارده از $\frac{1}{4}T_{cr}$ کمتر است، نیازی به آرماتور پیچشی نمی‌باشد. در این صورت، از $a$ تا $b$ نیاز به آرماتور پیچشی نبوده و از $b$ تا انتهای تیر، نیاز به آرماتور پیچشی بوده و آرماتور پیچشی باید تا طولی کمتر از $2m$ اول دهانه ادامه یابند.

**۱۲۷- (۲)**

در حالتی که تیر عمیق و ستون کم عرض باشد، مقاومت خمشی تیر بیشتر از ستون شده و بنابراین امکان تشکیل مفصل پلاستیک (خمیری) در ستون بیشتر می‌شود. در این صورت در یک زلزله شدید پایداری سازه دچار مشکل خواهد شد.

**۱۲۸- (۳)**

در مقاطع کم فولاد، افزایش فولاد فشاری تأثیر چندانی در بالا بردن ظرفیت مقطع ندارد. کرنش نهایی بتن از خصوصیات مصالح است و به‌وجود آرماتور فشاری مربوط نمی‌شود. افزایش فولاد فشاری موجب کاهش تنش در بتن فشاری می‌شود.

**۱۲۹- (۲)**

با توجه به رابطهٔ تعیین مقاومت برشی، در صورت ثابت بودن مقدار فولادهای عرضی $(A_{sv})$، مشخصات مصالح $(f_{yv}\ ,\ f_c)$، بارگذاری تیرها ($V_u$ و $M_u$) و ارتفاع مؤثر $(d)$، تنها عامل متغیر عرض جان مقطع $(b_w)$ خواهد بود. لذا مقطع گزینه ۲ به دلیل داشتن عرض جان بیشتر، مقاومت بالاتری در مقابل نیروهای برشی خواهد داشت.

$$V_r = \phi_s f_y A_{sv} \frac{d}{S} + (0.19\phi_c \sqrt{f_c} + 12\rho_w \frac{V_u d}{M_u}) b_w d$$

توجه داشته باشید که به دلیل توزیع سهمی شکل تنش‌های برشی در ارتفاع مقطع، عمده نیروی مقاوم در جان تیرها ایجاد می‌شود و عرض بال $(b_e)$ تأثیر چندانی بر مقاومت برشی نخواهد داشت.

**۱۳۰- (۴)**

$$V_s = \phi_s A_{sv} f_{yv} \frac{d}{S}$$

به دلیل ثابت بودن مقادیر $\phi_s$، $f_{yv}$ و $d$ خواهیم داشت:

$$\frac{(V_s)_A}{(V_s)_B} = \frac{(A_{sv})_A}{(A_{sv})_B} \times \frac{(S)_B}{(S)_A} = \frac{4\times\pi\times 10^2/4}{2\times\pi\times 8^2/4} \times \frac{S}{2S} = \frac{25}{16}$$

## راهسازی و روسازی راه

**۱۳۱- (۳)**

$$\text{میانگین مکانی سرعت} = \frac{\text{متوسط فاصله مکانی}}{\text{متوسط سرفاصله زمانی}} = \frac{۲۵}{۱/۶} = ۱۵/۶۲۵\ m/s$$

$$۱۵/۶۲۵ \times ۳/۶ = ۵۶/۲۵\ km/h \simeq ۵۶/۲\ km/h$$

**۱۳۲- (۲)**

ابتدا معادلهٔ سهمی را تشکیل می‌دهیم:

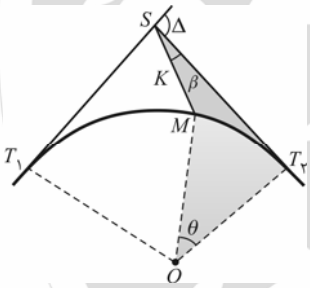
$$y = \frac{g_۲ - g_۱}{۲L} x^۲ + g_۱ x + y_{BVC}$$

$$y = \frac{۰/۰۶ + ۰/۰۴}{۲ \times ۷۰۰} x^۲ - \frac{۴}{۱۰۰} x + y_{BVC} \Rightarrow y = \frac{۱}{۱۴۰۰۰} x^۲ - \frac{۴}{۱۰۰} x$$

حال برای یافتن اکسترمم (گودترین نقطه) باید مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم:

$$y' = \frac{۲}{۱۴۰۰۰} x - \frac{۴}{۱۰۰} = ۰ \Rightarrow x = ۲۸۰\ m$$

**۱۳۳- (۱)**




$$L = ۳۰ = \frac{\pi R \theta}{۱۸۰}$$

$$\theta = ۶^\circ$$

$$K_x = R(\tan\frac{\Delta}{۲} - \sin\theta) = ۳۰۰(۱/۱۹ - ۰/۱) \Rightarrow K_x = ۳۲۷\ m$$

$$K_y = R(۱ - \cos\theta) = ۳۰۰(۱ - ۰/۹۹) = ۳\ m$$

$$K = \sqrt{K_x^۲ + K_y^۲} = ۳۲۷/۰۱\ m$$

**۱۳۴- (۴)**

ابتدا شعاع مربوط به دِوِر ٪۱۰ را محاسبه می‌کنیم:

$$R_۱ = \frac{V^۲}{۱۲۷(e+f)} = \frac{۱۰۰^۲}{۱۲۷(۰/۱۰ + ۰/۱۵)} = ۳۱۴/۹۶\ m$$

سپس شعاع مربوط به دِوِر ٪۵ را محاسبه می‌کنیم:

$$R_۲ = \frac{V^۲}{۱۲۷(e+f)} = \frac{۱۰۰^۲}{۱۲۷(۰/۰۵ + ۰/۱۵)} = ۳۹۳/۷۰\ m$$

مسافت صرف‌جویی شده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\text{میزان صرفه‌جویی در طول مسیر} = ۲(R_۲ - R_۱)(\tan\frac{\Delta}{۲} - \frac{\Delta}{۲}) = ۲(۳۹۳/۷۰ - ۳۱۴/۹۶)(۱ - \frac{\pi}{۴}) = ۳۳/۸\ m$$

**۱۳۵- (۲)**

$$Q = \frac{۱/۴۸۶}{n} A R^{\frac{۲}{۳}} S^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow$$

$$R = \frac{\text{مساحت مقطع}}{\text{محیط خیس}} = \frac{A}{P}$$

$$\left.\begin{array}{l} A = b \times y = ۶y \\ P = b + ۲y = ۶ + ۲y \end{array}\right\} \Rightarrow R = \frac{۶y}{۶ + ۲y}$$

با جایگذاری مقادیر داده شده در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$۱۰۲ = \frac{۱/۴۸۶}{۰/۰۱۵} \times (۶y)(\frac{۶y}{۶+۲y})^{۲/۳} \times \sqrt{۰/۰۱} \Rightarrow \frac{y}{(۶+۲y)^{\frac{۲}{۳}}} = ۰/۵۲$$

$y^{\frac{۵}{۲}} - ۰/۷۵y - ۲/۲۵ = ۰ \Rightarrow$ از سعی و خطا $y = ۱/۸$ به‌دست می‌آید.

**۱۳۶- (۱)**

$$y = R - \sqrt{R^{۲} - x^{۲}} \Rightarrow ۱ = R - \sqrt{R^{۲} - ۵۰^{۲}} \Rightarrow R = ۱۲۵۰/۵\ m$$

**۱۳۷-(۲)**

$V = ۱۰۰\ km/h$

$f = ۰/۳$

باید توجه داشت در رابطه فاصله توقف، در سرازیری و سربالایی فقط یک علامت $\pm g$ تغییر می‌کند.

$$d = \frac{۰/۰۰۳۹\ V^{۲}}{f \pm g}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$d_{۱} \Rightarrow$ فاصله توقف مربوط به سربالایی

$d_{۲} \Rightarrow$ فاصله توقف مربوط به سرازیری

$d_{۲} = d_{۱} + ۵۰$

$$\frac{۰/۰۰۳۹\ V^{۲}}{f - g} = \frac{۰/۰۰۳۹\ V^{۲}}{f + g} + ۵۰$$

$$۵۰ + \frac{۰/۰۰۳۹(۱۰۰)^{۲}}{۰/۳ + g} - \frac{۰/۰۰۳۹(۱۰۰)^{۲}}{۰/۳ - g} = ۰$$

با ضرب دو طرف رابطه فوق در $۰/۰۹ - g^{۲}$ خواهیم داشت

$$۵۰\left(۰/۰۹ - g^{۲}\right) + ۳۹\left(۰/۳ - g\right) - ۳۹\left(۰/۳ + g\right) = ۰$$

$$۴/۵ - ۵۰g^{۲} - ۷۸g = ۰ \Rightarrow ۵۰g^{۲} + ۷۸g - ۴/۵ = ۰$$

با حل معادلهٔ درجه ۲ فوق $g$ بدست می‌آید:

$g = ٪۵/۵۷$

**۱۳۸- (۳)**

از رابطه وتر و مماس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} C &= ۲R\sin\frac{\Delta}{۲} \\ T &= R\tan\frac{\Delta}{۲} \end{aligned} \Rightarrow \frac{C}{T} = \frac{۲R\sin\frac{\Delta}{۲}}{R\frac{\sin\frac{\Delta}{۲}}{\cos\frac{\Delta}{۲}}} = ۲\cos\frac{\Delta}{۲}$$

$$\boxed{\text{نسبت طول وتر به مماس} = ۲\cos\frac{\Delta}{۲}}$$

و با جایگذاری به‌دست آید:

$$\frac{۲۰۰}{۱۱۵/۴۷} = ۲\cos\frac{\Delta}{۲}$$

$$\cos\frac{\Delta}{۲} = ۰/۸۶۶ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{\Delta}{۲} = ۳۰^{\circ} \Rightarrow \Delta = ۶۰^{\circ}$$

**۱۳۹- (۲)**

با فرض این‌که $J$ حداکثر مقدار مجاز تغییرات شتاب جانبی (برحسب متر بر مکعب ثانیه) باشد، حداقل طول کلوتوئید از رابطه زیر بدست می‌آید که در آن سرعت برحسب **متر بر ثانیه** است.

$$L_S = \frac{V^{۳}}{J}\left|\frac{۱}{R_{۱}} - \frac{۱}{R_{۲}}\right| = \frac{\left(\frac{۱۰۰}{۳/۶}\right)^{۳}}{۰/۲}\left|\frac{۱}{۴۰۰} - \frac{۱}{۱۲۰۰}\right| = ۱۷۸/۶\ m$$

**۱۴۰- (۴)**

$$M_r = ۱۰۰\,CBR \;\Rightarrow\; M_r = ۱۰۰\times ۱۰ = ۱۰۰۰\ kg/cm^۲$$

با توجه به نمودار انستیتو آسفالت برای طرح روسازی‌های آسفالتی (لایه اساس مخلوط امولسیونی نوع ۳) و همچنین با توجه به تعداد محور ساده ۸/۲ تنی هم‌ارز $EAL = ۵۰۰۰۰۰$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} M_r = ۱۰^۳ \\ EAL = ۵\times ۱۰^۵ \end{cases} \Rightarrow \text{ضخامت لایه} = ۲۵\,cm$$

**۱۴۱- (۱)**

- علت به‌وجود آمده موج افتادگی:

مصرف بیش از حد قیر در مخلوط آسفالتی

به‌کار بردن قیری که بیش از حد لازم نرم است.

- علت به‌وجود آمدن روزدگی:

در اثر درصد بیش از اندازه قیر خالص در مخلوط، کاربرد بیش از درزگیرهای قیری و یا کم بودن درصد حفره‌های هوا به‌وجود می‌آیند.

- علت گودافتادگی مسیر:

تحکیم لایه‌های روسازی و یا خاک بستر است.

**۱۴۲-(۴)**

$$D_۱ = \frac{۲/۵\,SN_۲}{a_۱} \;\Rightarrow\; D_۱ = \frac{۲/۵\times ۱/۶۸}{۰/۴۲} = ۱۰\,cm$$

$$SN_۲^* = \frac{a_۱ D_۱}{۲/۵} = \frac{۰/۴۲\times ۱۰}{۲/۵} = ۱/۶۸$$

$$D_۲ = \frac{۲/۵(SN_۳ - SN_۲^*)}{a_۲} = \frac{۲/۵(SN_۳ - ۱/۶۸)}{۰/۱۲} = ۱۵\,cm$$

$$SN_۳ = ۲/۴$$

$$SN_۳^* = \frac{a_۲ D_۲}{۲/۵} = \frac{۰/۱۲\times ۱۵}{۲/۵} = ۰/۷۲$$

$$D_۳ = \frac{۲/۵(SN_۴ - SN_۳^* - SN_۲^*)}{a_۳} = \frac{۲/۵(۴ - ۰/۷۲ - ۱/۶۸)}{۰/۰۸} = ۵۰\,cm$$

**۱۴۳- (۱)**

با توجه به سیستم تک‌لایه‌ای می‌توان نوشت:

$$\Delta_z = \frac{\rho(۱+\mu)a}{E_۱}\left[\frac{z}{a}A + (۱-\mu)H\right]$$

$$z = ۰\ ,\ r = ۰ \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{z}{a} = ۰ \\ \dfrac{r}{a} = ۰ \end{cases} \;\Rightarrow\; A = ۱\ ,\ H = ۲$$

$$p = \frac{P}{\pi a^۲} = \frac{۴۲۴۰}{\pi\times ۱۵^۲} = ۶\,kg/cm^۲$$

$$\Delta_z = \frac{۶(۱+۰/۵)۱۵}{۱۵۰۰}\left[۰ + (۱+۰/۵)۲\right] = ۰/۰۹\,cm = ۰/۹۰\,mm$$

**۱۴۴- (۳)**

$$P_a = \frac{G_{mm} - G_{mb}}{G_{mm}}\times ۱۰۰ = \frac{۲/۷۰۵ - ۲/۵۷۵}{۲/۷۰۵}\times ۱۰۰ = ۴/۸\%$$

**۱۴۵- (۴)**

**روش اول:** روش دقیق

$$\begin{cases} r = ۲۰۰\,mm \\ z = ۳۰۰\,mm \\ a = ۱۰۰\,mm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{z}{a} = ۳ \\ \dfrac{r}{a} = ۲ \end{cases} \Rightarrow A = ۰/۳۱۵۰\ ,\ H = ۰/۲۷۴۵۳$$

$$\Delta_z = \frac{p(۱+\mu)a}{E_۱}\left[\frac{z}{a}A + (۱-\mu)H\right]$$

با جایگذاری مقادیر در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\Delta_z = \frac{۷۰۰(۱+۰/۵)۱۰}{۷۰۰۰۰۰}\left[۳\times ۰/۳۱۵۰ + (۱-۰/۵)۰/۲۷۴۵۳\right]$$

$$\Delta_z = ۰/۰۱۶۲\,cm = ۰/۱۶۲\,mm$$

**روش دوم:** روش تقریبی

$$\Delta_z = ۱/۵\frac{Pa}{E_۱}\beta = \frac{۷۰۰\times ۱۰۰}{۷۰۰۰۰۰}\times ۱/۵\times ۱ = ۰/۱۵۰\,mm$$

**۱۴۶- (۳)**

با توجه به نموگرام شل برای تعیین ضریب سختی نیز خواهیم داشت:

$$T_{RB} - t = ۴۱ \Rightarrow T_{RB} = ۴۱+۹ = ۵۰$$

**۱۴۷- (۲)**

$$۱۰۰-۶ = ۹۴\% \Rightarrow \frac{۶}{۹۴}\times ۱۰۰ = ۶/۴\,kg$$

**۱۴۸- (۴)**

$$z = ۴/۷\sqrt{FI}$$

$$FI = ۳۰(T_{\text{دی}} + T_{\text{بهمن}} + T_{\text{اسفند}}) = ۳۰\times ۱۴ = ۴۲۰$$

$$z = ۴/۷\sqrt{۴۲۰} = ۹۶/۳۲\,cm$$

**۱۴۹- (۲)**

ترک‌های پوست سوسماری با تکرار بارگذاری (خستگی ناشی از بارگذاری) ایجاد می‌شوند.

ترک‌های بلوکی بر اساس گرمای محیط و انقباض بتن آسفالتی ایجاد می‌شوند.

**۱۵۰- (۱)**

$$a_۲ D_۲ = a'_۲ D'_۲ \Rightarrow ۰/۱۳\times ۸ = ۰/۲۶\times D'_۲ \Rightarrow D'_۲ = ۴\,cm$$

**۱۵۱- (۴)**

$$\Delta_۲ = ۱/۵\beta\frac{Pa}{E_۲}$$

$\beta$ را می‌توان از منحنی تأثر برمیستر برای سیستم دولایه‌ای محاسبه کرد:

$$\frac{E_۲}{E_۱} = \frac{۱}{۵}\ ,\ \frac{h_۱}{a} = ۲ \Rightarrow \beta = ۰/۴۲$$

$$\Delta_۲ = ۱/۵\times ۰/۴۲\times\frac{۶\times ۱۵}{۳۰۰} = ۰/۱۸۹\,cm = ۱/۸۹\,mm$$

**۱۵۲- (۲)**

تنش قائم $\sigma_z = \alpha.P$

$\alpha$ را از منحنی‌های تأثیر ونگ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{E_۱}{E_۲} = ۵\ ,\ \frac{z}{a} = ۱ \Rightarrow \alpha = ۰/۴ \Rightarrow \sigma_z = ۰/۴\times ۱۰۰ = ۴۰\,lb/in^۲$$

اگر دانشگاه اصلاح شود، مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

## مجموعه پاسخ‌های تشریحی

# آزمون سراسری سال ۱۳۸۳

## کارشناسی ارشد

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سوالات | از شماره | تا شماره |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | زبان تخصصی | ۲۰ | ۱ | ۲۰ |
| ۲ | ریاضیات | ۲۰ | ۲۱ | ۴۰ |
| ۳ | مکانیک جامدات (مقاومت مصالح ـ تحلیل سازه‌ها) | ۴۰ | ۴۱ | ۸۰ |
| ۴ | مکانیک خاک | ۲۰ | ۸۱ | ۱۰۰ |
| ۵ | مکانیک سیالات | ۲۰ | ۱۰۱ | ۱۲۰ |

"استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد."

## زبان تخصصی

### متن A

***گزارش خسارت زلزله:***

در ۲۸ فوریه سال ۲۰۰۱، زلزله‌ای با بزرگی ۶/۸ ریشتر، قسمت غربی ایالت واشنگتن را لرزاند. مرکز (این زلزله) تقریباً در ۱۸ کیلومتری شمال شرقی المپیا، مرکز ایالت، و تقریباً ۵۸ کیلومتری جنوب غربی سیاتل بود. تخمین زده می‌شود، که حداکثر رهاسازی انرژی در عمق ۶۰ کیلومتری، که بسیار عمیق است، اتفاق افتاد. خوشبختانه شدت لرزش زمین در کل منطقه ملایم بود. فقط یک کشته (یک حملهٔ قلبی) و تقریباً ۴۰۰ مجروح در نتیجهٔ این زلزله به‌وجود آمد. با این حال خسارات مالی در محدودهٔ بین یک تا دو میلیارد دلار انتظار می‌رود.

در طی چند دقیقه از زلزله، «سازمان بین‌المللی EQE» اعضای خود در سیاتل را برای بررسی و تحقیق خسارت ساماندهی کرد و طی چند ساعت، مهندسین از سایر دفاتر EQE به (این) تحقیق پیوستند و برای حمایت کارفرمایان تلاش کردند تا آنچه را که می‌تواند برای جلوگیری از خسارات در زلزله‌های آینده آموخته شود پیدا کنند. تا سوم مارس، مهندسین صدها ساختمان، پل و تشکیلات حیاتی را مورد بازرسی قرار داده بودند.

این (زلزله) بزرگترین زلزله‌ای بود که در ۵۰ سال گذشته بخش غربی واشنگتن را تحت تأثیر قرار داده بود. لرزه‌های اخیر شامل یکی در نزدیکی سی ـ تاک در سال ۱۹۶۵ با بزرگی ۶/۵ (ریشتر) و یکی نزدیکی المپیا در سال ۱۹۴۹ به بزرگی ۷/۱ (ریشتر) هستند. در ژانویه سال ۱۷۰۰، زلزله‌ای به بزرگی برآورد شدهٔ ۹ (ریشتر)، منطقه را لرزاند. یک مطالعهٔ اولیه روی حادثه فوریه - که با عنوان زلزله نیسکوالی شناخته می‌شود - پس از تغییر مکان صفحه زمین ساختی (تکتونیک) زیر منطقه، نشان می‌دهد که شامل جابه‌جایی گسل نرمال از طریق فرو رانش صفحهٔ ژوان دوفوکا است.

یک بخش از ورق فرورانده (به سمت) پایین و (در جهت) شمال شرقی حرکت کرد. این حرکت دقیقاً مخالف آن چیزی است که در زلزلهٔ نورت ریج رخ داد و کالیفرنیا را در سال ۱۹۹۴ لرزاند. صفحهٔ ژوان دوفوکا می‌تواند زیر صفحهٔ آمریکای شمالی خارج از سواحل کالیفرنیای شمالی، اورگان، واشنگتن و بریتیش کلمبیا را در طول آنچه که با عنوان منطقهٔ فرورانشی کاسکادیا شناخته می‌شود، بلرزاند. با خمیده شدن آن در شرایط مناسبش، صفحهٔ ژوان دوفوکا ترک می‌خورد و می‌شکند، که باعث وقوع زلزله‌هایی در منطقه‌ای به نام منطقه بنیوف می‌شود.

لرزش زمین ناشی از زلزله توسط یک سری از ابزارها حرکت قوی که در سراسر منطقهٔ پوکت ساند بزرگتر جای گرفته بودند گرفته شد. بزرگترین شتاب‌ها در ساحل جنوب غربی دریاچه واشنگتن ثبت شدند. این (داده‌ها) شتاب‌های زمینی حداکثر ۰/۳۱ شتاب ثقل (g) و تداوم‌های تکان‌های شدید که کوچکتر از ۱۰ ثانیه را نشان دادند. هر چند که داده‌های معدود دیگری از حرکت‌ها بودند که از یک حداکثر شتاب g ۰/۱ تجاوز کردند. با این وجود، هیچ داده‌ای در فاصلهٔ حدود ۲۰ کیلومتری از مرکز زلزله، جایی که بزرگترین شدت‌ها مشاهده شدند، وجود ندارد. برآوردهای شدت نشان می‌دهند که بیشتر منطقه همانگونه که توسط «شدت مرکالی اصلاح شده» (MMI) اندازه‌گیری شد، تکان ۷ (ریشتر) یا کمتر را تجربه کرده‌اند. سیاتل جنوبی شدت‌های ۶ تا۷ MMI را تجربه کرد، در حالی که سیاتل شمالی شدت‌های ۵ تا ۶ را (به خود) دید.

داده‌های ثبت شده حرکت‌های زمین برای زلزله‌ای با این بزرگی، پایین بوند. به عنوان مثال برخی از شتاب‌های تولید شده از زلزلهٔ نورت ریج بیش از ۳ برابر بالاتر بودند. این اختلاف می‌تواند به عمق زیاد گسیختگی گسل برای این زلزله نسبت داده شود. به این دلیل امواج لرزه‌ای پدید آمده، فرصت بیشتری برای مستهلک شدن پیش از رسیدن به سطح زمین را داشتند. به جای یک سطح بالای خسارات متمرکز، لرزهٔ نیسکواکی خسارتی را به‌وجود آورد که ملایم‌تر بود ولی سطح وسیع‌تری را پوشش داد.

این زلزله، باعث روانگرایی در مناطق دور غرب و جنوب مانند شیلتون و تام واتر و مناطق دور شمال، مانند دریاچه گرین و دریاچه سامامیش شد. موارد زیادی از جوشش‌های ماسه در سیاتل جنوبی به‌وجود آمد. روانگرایی در این منطقه باعث برخی خسارات جزئی در خطوط لوله شد. زلزله باعث رانش زمین شد که قسمتی از رودخانهٔ سدار را مسدود کرد. رانش دیگری خانه‌ای در ساحل سالمون را به داخل درهٔ تاکوما انداخت و به سایر خانه‌ها به حدی خسارت وارد کرد که باید تخلیه می‌شدند. لغزش‌های بزرگتر دیگری در مناطق روستایی و همچنین نشست خاک نیز وجود داشتند که باعث مسدود شدن بزرگراه‌ها شدند.

به دلیل حرکت‌های زمینی نسبتاً ملایم، خسارت به ساختمان‌های مدرن بسیار ناچیز بود که عمدتاً شامل خسارت به مؤلفه‌های غیر سازه‌ای بود. جاهایی که خسارات سازه‌ای به وقوع پیوست، عموماً مکان‌هایی با خاک‌های نرم یا ساختمان‌های از رده خارج با آسیب‌پذیری لرزه‌ای شناخته شده، بود.

به خصوص ساختمان‌هایی با مصالح بنایی آجری غیر مسلح، با جان‌پناه‌های مهاربندی نشده و بدون دیوارهای مهار، آسیب‌پذیر بودند و تعدادی ویرانی (در بین آنها) وجود داشت. تعداد زیادی از سیستم‌های تسهیلاتی دچار خسارات غیر سازه‌ای جدی شدند، به عنوان مثال، گسیختگی‌های سقف‌ها، خسارات به دیوراهای تقسیم‌کننده، افتادن وسایل روشنایی، بریده شدن لوله‌های آب پاشی، واژگونی وسایل خانه، خسارت کامپیوترها و جابه‌جا شدن وسایل.

(این) منطقه به سمت جنوب سیاتل، شامل نواحی پست با خاک‌های اشباع آسیب‌پذیر در برابر روانگرایی است. آن‌ها محل ساخت تسهیلات، پارک‌های اداری و مراکز تجاری بوده و ساختمان‌ها عموماً با ساخت قدیمی‌تر هستند. علاوه بر URMS ، سازه‌های بتنی پیش‌ساخته ، قاب بتنی و مصالح بنایی مسلح وجود دارند.

سیستم‌های شریان حیاتی، شامل پل‌ها، سیستم‌های آب و فاضلاب، نیروگاه‌های برقی و تسهیلات مخابرات، بسیار خوب عمل کردند. این سیستم ها در برابر روانگرایی و گسترش جانبی، رانش‌های زمین و زمین‌لرزه‌های شدید آسیب‌پذیر هستند. فقط روانگرایی و گسترش جانبی محدودی رخ داد و آن در بندرهای المپیا و سیاتل و در بخش جنوبی درهٔ دووامیش ریور بود. فقط یک رانش عمدهٔ زمین رخ داد و آن نزدیک پل تاکوماناروز بود. سایر مناطق در معرض ناپایداری زمین، از قبیل سطوح صاف جزر و مدی در تاکوما، به دلیل سطح پایین زمین‌لرزه به ندرت خسارت دیدند. روانگرایی بیش از حد در اطراف دریاچهٔ کاپیتال رخ داد که در نتیجه باعث نشست و ناپایداری کناره‌ها شد اما خسارت کمی به محیط ساخته شده وارد شد.

فرودگاه بین‌المللی سی - تک ، حدود ۴۰ کیلومتری شمال شرقی مرکز زلزله بر اثر خسارت گسترده به برج کنترل، بلافاصله پس از زلزله بسته شد. این برج در حدود سال ۱۹۷۰ روی یک ساختمان پایانه (ترمینال) که زمان ساختش به (دههٔ) ۱۹۴۰ بر می‌گردد ساخته شد. تشدید حرکت در سازه‌های داخل پایانه و برج برای آسیب رساندن به اتصالات جوشی در پایهٔ ستون‌های فولادی لوله‌ای که سقف برج را نگهداری می‌کردند، کافی بود. خسارات غیر سازه‌ای گسترده، شامل شکستن شیشه‌ها در برج و گسیختگی سیستم‌های سقف، این خرابی‌ها را همراهی کرد. این آسیب‌پذیری توسط EQE در یک ارزیابی ریسک که در میانهٔ (دههٔ) ۱۹۹۰ اجرا شد آشکار گردید. به‌جای اصلاح برج، در آن زمان فرودگاه تصمیم به ساخت یک جایگزین گرفت که می‌توانست نمای بهتری به‌عنوان بخشی از یک برنامهٔ گستردهٔ کلی فرودگاه به وجود آورد. در حال حاضر این برج جدید در حال ساخت است.

(جاده) بین ایالتی ۵، شاهراه شمالی - جنوبی اصلی در منطقهٔ سیاتل است. چندین بزرگراه دیگر، دسترسی شرق - غرب را با تعدادی پل‌های بزرگ در تقاطع‌های زیاد رودخانه، دریاچه و خلیج در سرتاسر منطقه فراهم می‌آورند. راه ایالتی ۹۹ که از مجاورت حاشیهٔ غربی مرکز شهر سیاتل می‌گذرد، از روی یک پل بلند که از نظر عمر و ساخت شبیه پل بلند آزادراه سیپرس / ۸۸ - I است که در سال ۱۹۸۹ در خلال زلزله لوماپریت در اولکند کالیفرنیا فرو ریخت، عبور می‌کند. خوشبختانه زلزلهٔ نیسکوالی فقط باعث خسارات نسبتاً کم و اختلال در شبکهٔ حمل و نقل گردید.

شکست دو پل مدرن روی (رودخانهٔ) ۵-۱ جالب توجه است. روگذر هولگیت، یک طرح در اوایل (دههٔ) ۱۹۸۰، گسیختگی یک ستون کوتاه را تجربه کرد. خیابان چهارم روی شیب، که کمتر از پنج سال عمر دارد، در اثر یک شکست تکیه‌گاهی بسته شد.

براساس نرم‌افزار انحصاری مدلسازی و پایگاه اطلاعاتی صنعتی EQE، خسارت بیمه شدهٔ برآورد شده برای این زمین‌لرزه ۵۰۰ تا ۸۰۰ میلیون دلار خواهد بود، که تسهیلات دولتی شامل آن نیستند. اگر این اتفاق روی گسل تازه کشف شدهٔ سیاتل رخ داده بود و یا اینچنین عمیق نبود، به آسانی می‌توانست در زمرهٔ بزرگترین خسارات بیمه شده برای صنعت بیمهٔ ایالات متحده در دههٔ گذشته قرار گیرد. برای مقایسه، خسارات بیمه‌ای برای زلزله‌های نورت ریج و لوماپریتا به ترتیب ۱۴ میلیارد و ۱/۴ میلیارد دلار بودند.

**۱- زلزلهٔ [سال] ۲۰۰۱ نیسکوالی:**

۱) بزرگ‌ترین زمین‌لرزهٔ شناخته شده در منطقه بود.
۲) دارای یک مرکز زمین‌لرزه در ۱۱ مایلی شمال‌شرقی سیاتل بود.
۳) یک پس‌لرزهٔ زلزله نورثریج در نظر گرفته شد.
۴) نتیجهٔ حرکت نرمال گسل در صفحهٔ ژوان دوفوکا بود.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

This was the largest earthquake …… in the past 50 years.

**۲- کدام گزینه صحیح است؟**

۱) جوشش‌های ماسه‌ای به عنوان نتیجهٔ رانش زمین در برخی نواحی رخ دادند.
۲) هیچ شتاب زمین تولید شده‌ای در محدودهٔ ۲۰ کیلومتری مرکز زلزله وجود نداشت.
۳) حرکت زمین ملایم بود زیرا گسیختگی گسل در عمق ۶۰ کیلومتری رخ داد.
۴) سازه‌های مدرن خسارات کمتری دیدند زیرا آن‌ها روی مکان‌هایی با خاک‌های نرم ساخته نشده بودند.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

The recorded ground motions were low for an earthquake of this magnitude …… this difference may be attributed to the great depth of the fault rupture for this earthquake. It is estimated that the maximum energy release occurred of a depth of 60 km …

**۳- برای طراحی یک ساختمان مقاوم در برابر زلزله، طراح باید این اطمینان را بدهد که:**

۱) سازه شکل‌پذیری کافی را برای جذب انرژی لرزه داراست.
۲) محل ساخت نزدیک یک مرکز زلزله قرار نگیرد.
۳) المان‌های سازه‌ای به اندازه کافی سخت هستند تا در خلال تکان و پس از آن، بی‌عیب باقی بمانند.
۴) المان‌های غیر سازه‌ای قرار داده شدند تا در خلال تکان و پس از آن، بی عیب باقی بمانند.

گزینه ۱ صحیح است.

**۴- صدمه غیرسازه‌ای شامل:**

۱) خساراتی است که زیرسازه رخ می‌دهد.
۲) خساراتی از قبیل افتادن چراغ‌ها و ابزارهای سقفی به زمین است.
۳) خسارت به دیوارهای تقسیم‌کننده، دیوارهای حمل بار و نمای ساختمان است.
۴) جان‌پناه‌های خراب شده، اثاثیهٔ واژگون شده و پی ترک خورده است.
با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

Numerous facilities experienced significant nonstructural damages, for example, ceiling failures, … , fallen light fixtures …

**۵- کدام جمله صحیح است؟**

۱) روانگرایی می‌تواند باعث رانش زمین شود.
۲) تسهیلات حیاتی عموماً در زیر زمین قرار می‌گیرند.
۳) در کل، مناطق پست اگر اشباع شوند برای روانگرایی مستعدترند.
۴) در کل، مناطق پست با خاک شنی زمانی که اشباع می‌شوند، در برابر روانگرایی آسیب‌پذیرترند.
باتوجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

The region to the south of Seattle includes low-lying areas with saturated soils vulnerable to liquefaction.

**۶- خسارات سازه‌ای برای برج کنترل فرودگاه بین‌المللی سی ـ تک به‌وجود آمد زیرا:**

۱) در نزدیکی مرکز زمین‌لرزه واقع شده بود.
۲) ساختمان جایگزین می‌گردید، بنابراین ارتقا داده نشده بود.
۳) خرده‌های شیشه شکسته از پنجره‌های برج کنترل اتصالات جوشی را قطع کردند.
۴) در دهه ۱۹۴۰ ساخته شد قبل از اینکه خسارت زلزله در طراحی مد نظر قرار گیرد.
با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

Rather than upgrade the tower, the airport elected at that time to build a replacement that would provide better visibility as part of an overall airport expansion program.

**۷- این مسئله از مقاله قابل برداشت است که EQE بین‌المللی:**

۱) یک شرکتی است که تخصصش نجات از زلزله و جبران (آن) است.
۲) شرکت مهندسی است که فرودگاه بین‌المللی سی تک را طراحی کرد.
۳) شرکتی است که بیمهٔ زلزله را برای دولت و شرکت‌ها فراهم می‌آورد.
۴) شرکتی مهندسی است که آسیب‌پذیری در برابر خسارات در زلزله را مورد تحقیق و ارزیابی قرار می‌دهد.
با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

… EQE international mobilized its staff to investigate and research the damage.

**۸- دلیل اصلی که لرزهٔ سیاتل باعث خسارات کمتری به محیط ساخته شده گردید آن است که:**

۱) خسارت به دلیل عمق گسیختگی گسل به یک ناحیهٔ کوچکتر در سیاتل محدود گردید.
۲) لرزه‌های کالیفرنیا در مناطقی رخ دادند که سازه‌ها در کل قدیمی‌تر از منطقه سیاتل هستند.
۳) عمق گسیختگی گسل در سیاتل به امواج لرزه‌ای اجازه دادکه قبل از رسیدن به سطح مستهلک شوند.
۴) روانگرایی خاکی بسیار زیادی در لرزه‌های کالیفرنیا وجود داشت که باعث خسارات بیشتری به سیستم‌های شریان حیاتی شد.
با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

… The seismic waves generated had a greater opportunity to attenuate before reaching the ground surface.

## متن B

به همان اندازه که استادیوم از نقطه نظر سازه‌ای درخور توجه است شاید بدون داشتن امتیاز سیستم کامل آبرسانی و باز استفاده (آب) ساخته نشود. این موضوع از ابتدا واضح بود که تأمین تقاضای افزوده تسهیلات جدید برای آب یک وظیفه سنگین خواهد بود. سیستم موجود تأمین آب شهر فاکس بورو با تقریباً ۳۸۰ متر مکعب در دقیقه قادر به تأمین (آب) استادیوم بود. تسهیلات جدید به ۱۳۲۵۰ متر مکعب در دقیقه نیاز خواهد داشت. . دستیابی به این (مقدار) آب نیاز به همکاری نزدیک بین فاکس بورو و تیم پروژه داشت. فرانک داورتی که مدیر فنی شرکت ریزواسوشیتز برای مؤلفه‌های آب و فاضلاب پروژه بود می‌گوید: شهر، یک ایستگاه تقویت‌کننده در محل برای به‌وجود آوردن یک منطقه با فشار آب بالا طراحی کرد و

ساخت که نه‌تنها به استادیوم، بلکه به نواحی دیگر شهر نیز خدمات خواهد داد. یک مخزن ذخیره ۳۸۰۰ متر مکعبی که در ارتفاع قرار گرفته و در محل نصب شده است منطقه آبی را با فراهم کردن آب آشامیدنی اضافی کافی تقویت می‌نماید تا بدون مختل کردن سیستم تأمین (آب) شهر، پاسخگوی نیازهای استادیوم باشد. برای کاهش بیشتر فشار روی سیستم آبرسانی شهر، یک چاه متروک محلی برای تأمین تمامی نیازهای آبیاری محل دوباره راه‌اندازی شد.

افزایش تأمین آب شرب برای محل، یک قدم مهم بود، اما برای کاهش بیشتر نیازها به منابع شهر - و مجدداً برای کاهش هر نوع اثرات مضر روی محیط زیست - طراحان استادیوم برای استفاده مجدد آب، یک سیستم مبتکرانه (در پروژه) گنجاندند که برای نگهداری ۴۲۰۰۰ متر مکعب در سال طراحی شده است.

در طول یک رویداد (ورزشی) در استادیوم، فاضلاب به مخازنی نگهدارنده در زیر زمین هدایت خواهد شد که از آنجا به داخل یک تصفیه خانه فاضلاب مستقر در محل، پمپ خواهد گردید. (این تصفیه خانه) توسط «مدیریت کاربردی آب بلمید» در نیوجرسی طراحی گردید که با (ظرفیت) ۹۵۰ متر مکعب در روز، فاضلاب را به یک استاندارد بالای کیفیت با استفاده از یک سیستم تصفیه بیوراکتور غشایی توسط تصفیه اوزونی و ضدعفونی کننده نوری ماورای بنفش تصفیه خواهد کرد.

پس از اینکه آب تصفیه شد، به یک مخزن باز استفادهٔ ۱۹۰۰ متر مکعبی مستقر در خارج محل، پمپ می‌شود که توسط شهر فاکس بورو سرمایه‌گذاری و ساخته شده است. سپس آب تصفیه شده از مخزن باز استفاده، از طریق سیستم لوله‌کشی مجزا به داخل استادیوم باز می‌گردد تا برای سیفون سرویس‌های بهداشتی مورد استفاده قرار گیرد. آب بازیافتی مازاد به یک زمین یک هکتاری برای تغذیه آب زیرزمینی هدایت می‌گردد. بویتو می‌گوید: حدود ۶۰ درصد تمامی آبی که استادیوم در طول یک رویدار (ورزشی) مصرف می‌کند از مخزن باز استفاده خواهد آمد. به دلیل پتانسیل برای رشد آینده در منطقه، تصفیه خانه فاضلاب برای پاسخگویی به توسعه تا ۴۹۰۰ متر مکعب در روز طراحی گردید. همکاری بین بخش‌های عمومی و خصوصی برای موفقیت در بهبود سیستم آب، ضروری بود. داورتی می‌گوید: به دلیل اینکه سهم شهر از سیستم مشروط به فرایند مناقصه عمومی بود، نیاز به یک برنامه زمان‌بندی تدارکاتی بلندتر داشت. تا این زمان مواردی که شهر مسئول آن‌ها بود برای تکمیل باقی‌مانده پروژه، نقش کلیدی داشت.

داورتی می‌گوید: اجرای به موقع سیستم آب متصل در هماهنگی با شهر و پیمانکاران گوناگون یکی از پر چالش‌ترین و با ارزش‌ترین بخش های پروژه بوده است. کریس کالنان، مدیر پروژه ارشد برای ریزو اسوشیتز، کسی که طراحی زیربنای حمل و نقل را هدایت کرد می‌گوید: نمونه دیگری از یک همکاری موفق بخش‌های عمومی و خصوصی در پروژه، همکاری میان مهندسان مشاور و سازمان بزرگراه ماساچوست (Masshighway) در طراحی و ساخت اصلاحات حمل و نقل مربوط بود. در خود محل، برنامه‌ریزی حمل و نقل، ناسازگاری‌های میان ترافیک ماشینی و عابر پیاده را با ایجاد پیاده‌روهای بزرگ عابر پیاده کم کرد که شامل چهار زیرگذر در زیر جاده‌ها، برای جداسازی این دو ترافیک از هم بود. در خارج از محل، اصلاحات عمده حمل و نقل که توسط Masshighway سرمایه‌گذاری شده است، شامل دو تقاطع غیر همسطح جدا از هم در مسیر ۱، اصلاحات شیب گذر در تقاطع‌های غیر هم‌سطح مسیر (۱) و سیستم (راه) بین ایالتی و بازسازی مسیر ۱ در حوالی استادیوم است. دو مسیر اصلی به زمین‌های استادیوم – مسیر ۱ حد جنوبی و حد شمالی (از نظر) طبقه از هم جدا می‌شوند. بنابراین ترافیک حد جنوبی از زیر پلی که ترافیک حد شمالی را حمل می‌کند عبور می‌کند که مشکل احتمالی گردش به چپ را حذف می‌کند.

برای ایجاد دسترسی به ورودی پشتی استادیوم، یک پل قوسی بتنی که دارای دو دهانه ۱۱ متری است، از روی رودخانه نپونسنت عبور می‌کند. برای ورودی شمالی استادیوم که زمان‌بندی تکمیل آن همین بهار است، دو جلوهٔ معماری به بازدیدکنندگان یادآوری می‌کند که آنها حقیقتاً در نیوانگلند هستند: یک پل فولادی قوسی ۲۴ متری و یک برج دیده‌بانی با قاب فولادی یادآور فانوس دریای ساحلی با ترکیب منحصر به فرد مؤلفه‌های سازه‌ای و زیست‌محیطی، شامل سیستم باز استفاده آب و روشنایی رودخانه نپونسنت، خود CMGI به عنوان یک عامل یادآوری است که یک استادیوم بزرگ نه فقط برای اینکه به صورت مؤثر عمل نماید بلکه برای سازگاری مناسب با محیط زیست نیز طراحی گردد.

**۹- یک مورد عمده که بر موفقیت پروژه استادیوم تأثیر گذاشت:**

۱) چگونگی تأمین مقدار زیاد آبی که تسهیلات استفاده خواهند کرد، بود.

۲) تعداد افراد از جامعه اطراف که حتماً از امکانات استفاده خواهند کرد، بود.

۳) چگونگی تخلیه فاضلاب تسهیلات به بندرگاه بوستون بدون اثر نامطلوب زیست‌محیطی بود.

۴) چگونگی فراهم آوردن حمل و نقل عمومی کافی به تسهیلات که حجم ترافیک خودرو حداقل گردد، بود.

گزینه ۱ صحیح است.

**۱۰- به نظر نویسنده کدام دو جلوه این تسهیلات مردم را به یاد منطقه نیوانگلند می‌اندازد؟**

۱) یک پل و یک برج دیده‌بانی.

۲) دهانه‌های فولادی و یک فانوس دریایی

۳) یک سیستم باز استفاده آب و روشنایی رودخانه

۴) یک استادیوم بزرگ و یک طرح سازگار با محیط زیست.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

… a pair of architectural features remind visitors that they are indeed in New England: a 24 m steel arch bridge and a steel framed beacon, …

**۱۱- تغییرات ایجاد شده در زیرساختار خارج محل برای حمل و نقل در ابتدا:**

۱) روی سیستم آزادراه بین ایالتی نزدیک انجام گرفت.

۲) توسط شرکتی که در حال ساختن خود استادیوم است سرمایه‌گذاری شده بود.

۳) گذرگاه‌های عابر پیاده ایمنی را به‌وجود آورد که تقاطعی با ترافیک وسایل نقلیه نداشتند.

۴) دسترسی ها به محل استادیوم را بهبود بخشید در حالی که تأخیرهای حاصله از ترافیک را کاهش می‌داد.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

Off site, the major transportation improvements, consisted of two grade-separated interchanges on Route 1, ramp improvements at the interchange between Rout 1 and the interstate system …… so that south bound traffic crosses under a bridge carrying north bound traffic, eliminating the potential left-turn conflict.

**۱۲- از این بخش از مقاله می‌توان فهمید که:**

۱) تسهیلات استادیوم یک فشار عمده بر روی آبرسانی منطقه خواهد گذاشت.

۲) شهر فاکس بورو مسئول تصفیه تمامی فاضلابی است که از تسهیلات استخراج می‌شود.

۳) بخش عمده آب مصرفی استادیوم در طی یک رویداد ورزشی برای شستشوی سرویس‌های بهداشتی مصرف می‌شود.

۴) رقابت میان بخش دولتی و خصوصی با توجه به روش تصفیه فاضلاب، ساخت و ساز را به صورت قابل توجهی کند کرد.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

Treated water from the reuse tank ……to be used for toilet flashing and about 60 percent of all water the stadium uses …… from the reuse tank.

**۱۳- کدام‌یک روشی نیست که استادیوم به‌کار گیرد تا نیازهای آبی‌اش را ارضا کند؟**

۱) بازیافت فاضلاب تصفیه شده

۲) استفاده از چاه آب در محل برای آبیاری زمین‌ها

۳) ساختن یک منبع ذخیره بزرگ آب مخصوص استفاده استادیوم

۴) توسعه مخزن ذخیره منطقه برای افزایش ظرفیت آن

گزینه ۴ صحیح است.

**۱۴- دپارتمان آزادراه‌های ماساچوست در ارتباط با ..... سرمایه‌گذاری به عمل آورد.**

۱) بازسازی پل‌های بین ایالتی و عابر پیاده در محل استادیوم

۲) پلی که از روی رودخانه نپونست عبور می‌کند و پل‌های عابر پیاده محل استادیوم

۳) بازسازی بخشی از مسیر ۱ و یکی از رودخانه نپونست می گذرد.

۴) یک روگذر برای ترافیک مسیر ۱ حد شمالی و یک شیب گذر خروجی بین ایالتی به زمین‌های استادیوم

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

… the major transportation improvements consisted of …… reconstruction of route in the vicinity of the stadium …… and a concrete arch bridge …… acrosses the neponset River.

***در ۶ سؤال زیر، جوابی را انتخاب کنید که هر مورد را به بهترین شکل از لحاظ فنی تکمیل کند:***

**۱۵- به یک ماده شکل‌پذیر گفته می‌شود، اگر بتواند تغییر شکل‌های بزرگ ..... را قبل از شکست تحمل کند.**

۱) باقیمانده ۲) موقت ۳) دینامیکی ۴) دایمی

گزینه ۴ صحیح است.

**۱۶- اگر ..... به صورت درست برای یک دورهٔ طولانی انجام پذیرد، بتن مستحکم‌تر و مقاوم‌تر در برابر آب ایجاد می‌کند.**

۱) عمل‌آوری بتن ۲) ویبره کردن ۳) ماده افزودنی ۴) مسلح کردن

گزینه ۱ صحیح است.

**۱۷- برای بتن بدون حباب هوای ..... ، تداوم محافظت در مقابل یخ‌زدگی دو برابر مدت زمان حداکثر دوام است.**

۱) احاطه شده ۲) ایجاد شده ۳) وارد شده ۴) سرگرم شده

گزینه ۲ صحیح است.

**۱۸- یک سنگدانه از نظر فیزیکی ..... است اگر پایداری ابعادی را تحت تغییر درجه حرارت یا رطوبت حفظ کند و بدون پوسیدگی در مقابل هوازدگی مقاومت کند.**

۱) سخت ۲) سالم ۳) قوی ۴) مقاوم

گزینه ۴ صحیح است.

صفات hard و strong به معنای سخت و قوی هستند که بیشتر در مورد قدرت مقاومت در برابر باربری کاربرد دارند نه مقاوم بودن در برابر تغییرات آب و هوا.

**۱۹- جهت‌هایی که در آن‌ها تنش‌های نرمال حداکثر یا حداقل می گردند ..... نامیده می‌شوند.**

۱) جهت‌های مور ۲) جهت‌های اصلی ۳) جهت‌های متعامد ۴) جهت‌های اصلی و فرعی

گزینه ۲ صحیح است.

**۲۰- خاک برای پی می‌تواند توسط ..... تحکیم و یا جایگزینی آن با مصالح انتخابی اصلاح شود تا با خصوصیات دلخواه تطبیق نماید.**

۱) ویبره کردن ۲) مخلوط‌ها ۳) اشباع کردن ۴) متراکم کردن

گزینه ۴ صحیح است.

## ریاضیات

**۲۱- (۴)**

پس از اطمینان از نادرستی گزینه ۱ (چرا؟) تنها گزینه ۴ از نظر ابعادی با بعد انتگرال مطابقت دارد. روال حل تشریحی مسأله در ادامه آمده است.

اگر بردار گرادیان و سپس بردار یکه عمود بر سطح کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ را به دست آوریم، داریم:

$$\overrightarrow{\nabla S}=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k} \Rightarrow \vec{n}=\frac{\overrightarrow{\nabla S}}{\left|\overrightarrow{\nabla S}\right|}=\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}}{a}$$

تابع تحت انتگرال $(z^2)$ را می‌توان حاصل‌ضرب داخلی بردار $\vec{F}=(0\ ,\ 0\ ,\ az)$ در $\vec{n}=\left(\frac{x}{a}\ ,\ \frac{y}{a}\ ,\ \frac{z}{a}\right)$ دانست. از طرفی با توجه به زوج بودن تابع $z^2$، انتگرال مورد نظر را در تمام کره حساب کرده و به دلیل تقارن این ناحیه، نصف مقدار به‌دست آمده را به‌عنوان جواب در نظر می‌گیریم.

$$I=\frac{1}{2}\iint_{S'(\text{کره کامل})} z^2 ds=\frac{1}{2}\iint_{S'(\text{کره کامل})} \vec{F}.\vec{n}\, ds$$

می‌توان از قضیه دیورژانس استفاده نمود ($V$ حجم محدود به $S'$ است):

$$I=\frac{1}{2}\iiint_V div\, F\, dv=\frac{1}{2}\iiint_V (0+0+a)dv=\frac{a}{2}\iiint_V dv=\frac{a}{2}\ (\text{حجم کره کامل})=\frac{a}{2}\times\frac{4}{3}\pi a^3=\frac{2\pi}{3}a^4$$

**۲۲- (۴)**

بردار گرادیان این سطح عبارت است از:

$$\varphi=xy^3z^2-4=0$$

$$\overrightarrow{\nabla\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}=y^3z^2\vec{i}+3xy^2z^2\vec{j}+2xy^3z\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\nabla\phi}(-1,-1,2)=-4\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}=(-4\ ,\ -12\ ,\ 4)$$

بردار یکه عمود بر سطح، همان یکه شده بردار گرادیان است:

$$\text{بردار یکه عمود بر سطح}: \vec{n}=\frac{\overrightarrow{\nabla\phi}}{\left|\overrightarrow{\nabla\phi}\right|}=\frac{(-4\ ,\ -12\ ,\ 4)}{\sqrt{4^2+12^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{176}}(-4\ ,\ -12\ ,\ 4)$$

**۲۳- (۳)**

برای تعیین شعاع همگرایی، با توجه به آزمون کشی (ریشه) داریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \Rightarrow \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \overset{1^\infty}{\sim} e^{n\left(1-\frac{1}{n}-1\right)}=e^{-1} \Rightarrow \frac{1}{R}=\frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{R=e}$$

**۲۴- (۲)**

داریم:

**روش اول:**

$$yy' = (1+y^2)x^2 \Rightarrow y' - x^2 y = x^2 y^{-1}$$

این معادله برنولی با $n=-1$ می‌باشد. بنابراین از تغییر متغیر $z = y^2$ $(z = y^{1-n})$ استفاده می‌کنیم:

$$z = y^{1-n} \Rightarrow z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$$

$$\Rightarrow \text{معادله}: z' - 2x^2 z = 2x^2$$

$$\mu = e^{\int -2x^2 dx} = e^{-\frac{2}{3}x^3} \Rightarrow z = e^{\frac{2}{3}x^3}\left(\int 2x^2 . e^{-\frac{2}{3}x^3}\right) = e^{\frac{2}{3}x^3}\left(-e^{-\frac{2}{3}x^3} + c\right)$$

$$z = ce^{\frac{2}{3}x^3} - 1 \xrightarrow{z=y^2} y^2 = ce^{\frac{2}{3}x^3} - 1 \xrightarrow{y(0)=1} c = 2 \Rightarrow y^2 = 2e^{\frac{2}{3}x^3} - 1$$

**روش دوم:** گزینهٔ (۱) بوضوح غلط است و نقطه $(0,1)$ (شرط مرزی داده شده) از سه گزینهٔ دیگر، فقط در گزینه (۲) صدق می‌کند.

**۲۵- (۲)**

$$(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

$$y_1 = x \Rightarrow y_2 = zy_1 = zx \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} z'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2-1}\right)z' = 0 \Rightarrow z' = c_1 e^{\int\left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2}{x}\right)dx}$$

$$\Rightarrow z' = c_1\frac{x^2-1}{x^2} = c_1\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow z = c_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + c_2$$

$$y_2 = zx \Rightarrow y_2 = c_1(x^2+1) + c_2 x \Rightarrow y = y_1 + y_2 = c_3 x + c_1(x^2+1) + c_2 x = c_1(x^2+1) + c_4 x$$

**۲۶- (۴)**

$$I = \int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

حال با تغییر متغیر $u = \sqrt{x} - 1$ و درنتیجه $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ انتگرال را حل می‌کنیم:

$$I = \int \frac{2du}{u-1} = 2\ln|u-1| + c_1 = 2\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + c_1$$

**۲۷- (۳)**

طبق قضیه مشتق انتگرال داریم:

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin tx}{x}dx$$

$$\frac{df}{dt} = \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin tx}{x}\right)dx + \frac{\sin t^2}{t} = \int_0^t \frac{x\cos tx}{x}dx + \frac{\sin t^2}{t}$$

$$= \int_0^t \cos tx\, dx + \frac{\sin t^2}{t} = \frac{1}{t}\sin tx\Big|_{x=0}^{x=t} + \frac{\sin t^2}{t} = \frac{\sin t^2}{t} + \frac{\sin t^2}{t} = 2\frac{\sin t^2}{t}$$

**۲۸- (۱)**

تنها گزینه‌ای که آرگومان جواب‌های پایه، که توابع بسل مرتبه اول و دوم هستند در آن یکسان است، گزینه اول می‌باشد و به‌ناچار همین گزینه صحیح است.

**۲۹- (۲)**

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم $(L(y) = Y(s))$: $L\{y''\} + L\{ty\} = L\{0\} \Rightarrow s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - \frac{d}{ds}Y(s) = 0$

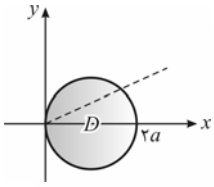
با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$s^2Y(s) - s - Y'(s) = 0 \Rightarrow Y' - s^2Y = -s$$

**۳۰- (۳)**

مسئله را در مختصات قطبی حل می‌کنیم.

مرز $D: x^2+y^2=2ax \;\Rightarrow\; r^2=2ar\cos\theta \;\Rightarrow\; r=2a\cos\theta$




$$I=\int_{\theta=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2a\cos\theta} r^2.r\,dr\,d\theta=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{2a\cos\theta}d\theta$$

$$=4a^4\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=8a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=8a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta=\frac{8a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)d\theta$$

$$=2a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta=2a^4\left(\theta+\sin 2\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{8}\sin 4\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}=2a^4\left(\frac{3\pi}{4}-0\right)=\frac{3\pi a^4}{2}$$

**۳۱- (۴)**

ابتدا هم‌ارز $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ وقتی $x\to 0$ ، را می‌یابیم:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\sim e^{\frac{1}{x}(x-\frac{x^2}{2})}=e^{(1-\frac{x}{2})}$$

در نتیجه:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(1-\frac{x}{2})}-e}{x}=\frac{0}{0}$$

حال با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2}e^{(1-\frac{x}{2})}-0}{1}=\frac{-1}{2}e$$

**۳۲- (۳)**

معادله از نوع کشی اویلر بوده و دارای معادله مشخصه زیر است:

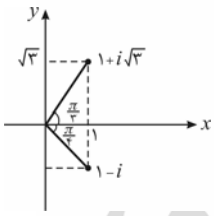
$$m(m-1)+m+1=0 \;\Rightarrow\; m^2+1=0 \;\Rightarrow\; m=\pm i$$

بنابراین، جواب عمومی آن عبارت است از:

$$y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)$$

**۳۳- (۱)**

باتوجه به شکل زیر، فرم قطبی اعداد $1+i\sqrt{3}$ و $1-i$ به‌ترتیب به‌صورت از $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ می‌باشد.

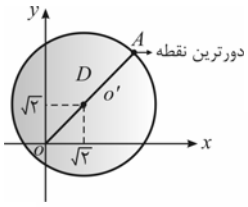



بنابراین:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^{40}=\left(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}\right)^{40}=\left(\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}}\right)^{40}=2^{20}e^{\frac{70\pi}{3}i}=2^{20}e^{(23\pi+\frac{\pi}{3})i}$$

$$=2^{20}\left[\cos\left(23\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(23\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=2^{20}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-2^{19}\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

**۳۴- (۱)**



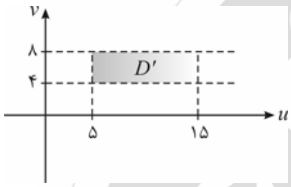

تابع $x^{۲}+y^{۲}$ درواقع مجذور فاصله نقطه $(x\ ,\ y)$ از مبدأ می‌باشد، با توجه به شکل ناحیه داده شده، ملاحظه می‌شود که کمترین فاصله تا مبدأ صفر و بیشترین آن برابر فاصله دورترین نقطه مرزی ناحیه تا مبدأ می‌باشد.
فاصله دورترین نقطه تا مبدأ عبارت است از:

$$oA = oo' + o'A = ۲+۳ = ۵$$

بنابراین، ماکزیمم تابع $x^{۲}+y^{۲}$ برابر $۵^{۲}$ یعنی ۲۵ می‌باشد.

**۳۵- (۲)**

اگر از تغییر متغیرهای $u = xy^{۳}$ و $v = xy$ استفاده نماییم، مرزهای ناحیه به شکل ساده‌ای تبدیل می‌شود:




$$\text{مرزهای قدیم ناحیه}\ \begin{cases} xy^{۳}=۱۵ \\ xy^{۳}=۵ \\ xy=۸ \\ xy=۴ \end{cases} \xrightarrow[v=xy]{u=xy^{۳}} \begin{cases} u=۱۵ \\ u=۵ \\ v=۸ \\ v=۴ \end{cases}$$

حال به محاسبه انتگرال $S=\iint\limits_{D} dx\ dy$ که همان مساحت ناحیه مورد نظر است می‌پردازیم. ژاکوبین تغییر متغیر فوق عبارت است از:

$$J=\frac{۱}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}=\frac{۱}{\begin{vmatrix} y^{۳} & ۳xy^{۲} \\ y & x \end{vmatrix}}=\frac{۱}{xy^{۳}-۳xy^{۳}}=\frac{۱}{-۲xy^{۳}}=\frac{-۱}{۲u} \Rightarrow dx\ dy=|\ J\ |du\ dv=\frac{۱}{۲u}du\ dv$$

بنابراین:

$$S=\iint\limits_{D} dx\ dy=\iint\limits_{D'}\frac{۱}{۲u}du\ dv=\int_{v=۴}^{۸}\int_{u=۵}^{۱۵}\frac{۱}{۲u}du\ dv=\frac{۱}{۲}(v)\Big|_{۴}^{۸}\ ln u\Big|_{۵}^{۱۵}=۲\ln ۳$$

**۳۶- (۴)**

با توجه به بسته بودن سطح $s$، از قضیه دیورژانس کمک می‌گیریم:

$$div\ \vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=z^{۲}+x^{۲}+y^{۲}$$

لذا:

$$I=\oiint\limits_{s}\vec{F}\cdot\vec{n}\ ds=\iiint\limits_{V} div\ F\ dv=\iiint\limits_{V}(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})\ dv$$

که در آن $V$ حجم نیمکره بالایی به شعاع $a$ و مرکز مبدأ است. با استفاده از مختصات کروی داریم:

$$\Rightarrow\ I=\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{\varphi=۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\rho=۰}^{a}\rho^{۲}.\rho^{۲}\sin\varphi\ d\rho d\varphi d\theta=۲\pi\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{a}\rho^{۴}\sin\varphi\ d\rho d\varphi$$

$$=۲\pi\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin\varphi d\varphi\times\int_{۰}^{a}\rho^{۴}d\rho=۲\pi\Big(-\cos\varphi\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\Big)\Big(\frac{\rho^{۵}}{۵}\Big|_{۰}^{a}\Big)=\frac{۲\pi a^{۵}}{۵}$$

**۳۷- (۱)**

$$P=z^{۲}\ ,\ Q=۲y\ ,\ R=\lambda xz$$

برای استقلال انتگرال فوق از مسیر، باید نیروی $\vec{F}=(P\ ,\ Q\ ,\ R)$ پایستار باشد. پس کرل آن باید صفر باشد.

$$\overrightarrow{curl}\ F=\vec{۰}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^{۲} & ۲y & \lambda xz \end{vmatrix}=۰\vec{i}-(\lambda z-۲z)\vec{j}+۰\vec{k}=(۲-\lambda)z\ \vec{j}=\vec{۰}\ \Rightarrow\ \lambda=۲$$

**۳۸- (۳)**

معادله مشخصه عبارت است از:

$$m^{۲}+۲m+۲=۰ \Rightarrow (m+۱)^{۲}+۱=۰ \Rightarrow m+۱=\pm i \Rightarrow m=-۱\pm i$$

بنابراین، جواب عمومی به‌صورت زیر است:

$$y=e^{-x}(c_{۱}\cos x+c_{۲}\sin x)$$

با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} y(۰)=-۲ \\ y'(۰)=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{۱}=-۲ \\ c_{۲}=۳ \end{cases} \Rightarrow y=e^{-x}(-۲\cos x+۳\sin x)$$

**۳۹- (۱)**

نقطه $x=۰$ یک نقطه غیرعادی معادله است، با تقسیم طرفین معادله بر ضریب $y''$ نتیجه می‌شود:

$$y''+\frac{۳+x}{۲x(۱+x)}y'-\frac{x}{۲x(۱+x)}y=۰ \Rightarrow P(x)=\frac{۳+x}{۲x(۱+x)}\ ;\ Q(x)=\frac{-x}{۲x(۱+x)}=\frac{-۱}{۲(۱+x)}$$

برای بررسی منظم بودن این نقطه، داریم:

$$\alpha=\lim_{x\to ۰} x\cdot P(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۳+x)}{۲x(۱+x)}=\frac{۳}{۲}\ ;\ \beta=\lim_{x\to ۰} x^{۲}Q(x)=\lim_{x\to ۰} x^{۲}\cdot\frac{-۱}{۲(۱+x)}=۰$$

در نتیجه، معادله مشخصه عبارت است از:

$$r^{۲}+(\alpha-۱)r+\beta=۰ \Rightarrow r^{۲}+\frac{۱}{۲}r=۰ \Rightarrow r=۰\ ,\ \frac{-۱}{۲}$$

لذا شکل جواب‌های پایه مشابه گزینه اول خواهد بود.

**۴۰- (۲)**

بردار گرادیان همان بردار قائم بر بیضی‌گون می‌باشد:

$$\phi=\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{y^{۲}}{۴}+z^{۲}-۱=۰ \Rightarrow \overrightarrow{\nabla\phi}=\frac{x}{۲}\vec{i}+\frac{y}{۲}\vec{j}+۲z\vec{k}$$

بنابراین، می‌خواهیم بردار $\left(\frac{x}{۲}\ ,\ \frac{y}{۲}\ ,\ ۲z\right)$ با محورهای مختصات زوایای مساوی بسازد و چون بردارهایی دارای این ویژگی هستند که موازی بردار $(۱\ ,\ ۱\ ,\ ۱)$ باشند، لذا مؤلفه‌های بردار به‌دست آمده را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

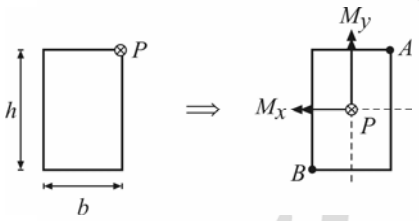
$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۲}=۲z \Rightarrow x=y=۴z$$

در نتیجه، تنها گزینه ۲ دارای این شرایط بوده و می‌تواند جواب درست باشد. البته با قرار دادن نتیجه بالا در معادله بیضی‌گون جواب مسئله به‌طور کامل به‌دست می‌آید:

$$\frac{(۴z)^{۲}}{۴}+\frac{(۴z)^{۲}}{۴}+z^{۲}=۱ \Rightarrow ۹z^{۲}=۱ \Rightarrow z=\pm\frac{۱}{۳} \Rightarrow \Rightarrow x=y=\pm\frac{۴}{۳}$$

## مقاومت مصالح و تحلیل سازه‌ها

**۴۱- (۴)**




نیروی فشاری $P$ را به مرکز مقطع منتقل کرده و لنگرهای خمشی $M_x$ و $M_y$ را که ناشی از خروج از مرکزیت بار می‌باشند، نیز به مقطع اعمال می‌کنیم:

$$M_x=\frac{Ph}{۲}\ ,\ M_y=\frac{Pb}{۲}$$

تنش‌های فشاری و کششی حداکثر به ترتیب در نقاط $A$ و $B$ اتفاق افتاده و برابرند با:

$$\sigma_A=\frac{P}{A}+\frac{M_x}{S_x}+\frac{M_y}{S_y}=\frac{P}{bh}+\frac{\frac{Ph}{۲}}{\frac{bh^{۲}}{۶}}+\frac{\frac{Pb}{۲}}{\frac{b^{۲}h}{۶}}=\frac{۷P}{bh}$$

$$\sigma_B=-\frac{P}{A}+\frac{M_x}{S_x}+\frac{M_y}{S_y}=-\frac{P}{bh}+\frac{\frac{Ph}{۲}}{\frac{bh^{۲}}{۶}}+\frac{\frac{Pb}{۲}}{\frac{b^{۲}h}{۶}}=\frac{۵P}{bh}$$

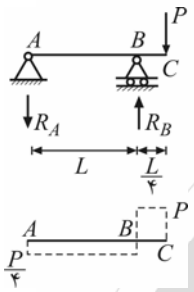
بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{\frac{۷P}{bh}}{\frac{۵P}{bh}}=۱/۴$$

**۴۲- (۳)**

برای هر دو قسمت $AB$ و $BC$ داریم:

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}\,Q}{It}$$




مقدار $\frac{Q}{It}$ جزو خصوصیات مقطع بوده و لذا در هر دو قسمت ثابت می‌باشد. بنابراین کافیست $V_{max}$ در $AB$ و $BC$ را بیابیم. نمودار نیروی برشی در تیر به صورت روبرو قابل ترسیم است.

$$\sum M_B = ۰ \;\Rightarrow\; R_A \times L = P \times \frac{L}{۴} \;\Rightarrow\; R_A = \frac{P}{۴}$$

$$\sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; R_B = R_A + P = \frac{۵P}{۴}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\tau_{max_{AB}}}{\tau_{max_{BC}}} = \frac{V_{max_{AB}}}{V_{max_{BC}}} = \frac{\frac{P}{۴}}{P} = \frac{۱}{۴}$$

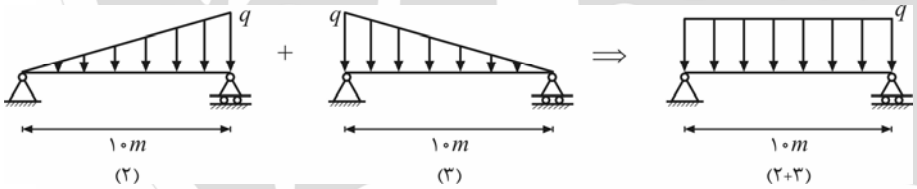
**۴۳- (۱)**

در مقطع مستطیلی با توجه به قرار گرفتن محور خنثی در وسط ارتفاع مقطع، تنش‌های ماکزیمم فشاری و کششی باهم برابر می‌باشند. بنابراین باید تنش مجاز کششی و فشاری باهم برابر باشند تا هر دو تنش باهم به مقدار مجازشان برسند.

$$\frac{(\sigma_c)_{all}}{(\sigma_t)_{all}} = ۱$$

**۴۴- (۳)**

تغییرمکان وسط تیر (۲) با تغییرمکان وسط تیر (۳) شکل زیر برابر است. با استفاده از اصل جمع آثار قوا داریم:




$$\Delta_۲ = \Delta_۳ \;\Rightarrow\; \Delta_{(۲+۳)} = ۲\Delta_۲$$

با مقایسه تیرهای (۱) و (۲+۳)، $\Delta_{(۲+۳)}$ برابر است با:

$$\Delta_۱ = \frac{۵qL_۱^۴}{۳۸۴EI} \;\Rightarrow\; \Delta_{(۲+۳)} = \frac{۵q\,(۲L_۱)^۴}{۳۸۴EI} = ۱۶\Delta_۱$$

$$\Rightarrow\; ۲\Delta_۲ = ۱۶\Delta_۱ \;\Rightarrow\; \Delta_۲ = ۸\Delta_۱ = ۸ \times ۱ = ۸\,cm$$

**۴۵- (۳)**

دوران تمام نقاط مقطع باهم برابر است.

$$\begin{cases} \varphi_۱ = \varphi_۲ \\ \varphi r = \gamma L \;\Rightarrow\; \varphi \propto \frac{\gamma}{r} \end{cases} \Rightarrow\; \frac{\gamma_۱}{r_۱} = \frac{\gamma_۲}{r_۲} \;\Rightarrow\; \frac{\tau_۱}{G_۱ r_۱} = \frac{\tau_۲}{G_۲ r_۲} \;\Rightarrow\; \frac{\tau_۲}{\tau_۱} = \frac{G_۲}{G_۱} \times \frac{r_۲}{r_۱} = ۲ \times \frac{۲۵}{۲۰} = ۲/۵$$

**۴۶- (۴)**

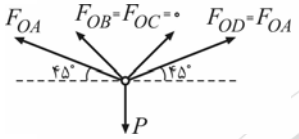
چون لوله طویل است، می‌توان کرنش طولی لوله را صفر درنظر گرفت:

$$\begin{cases} \varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L} \\ L \to \infty \end{cases} \Rightarrow\; \varepsilon_L \to ۰ \;\Rightarrow\; \frac{\sigma_L}{E} - \frac{\nu\sigma_r}{E} = ۰ \;\Rightarrow\; \sigma_L = \nu\sigma_r = \nu\frac{Pr}{t} \;\Rightarrow\; \sigma_L = ۰/۳ \times \frac{۱۰ \times \frac{۵۰}{۲}}{۱} = ۷۵\,kg/cm^۲$$

**۴۷- (۴)**

سازه و بارگذاری روی آن متقارن می‌باشند. بنابراین گره $O$ باید در راستای قائم پایین بیاید. از طرفی به علت صلب بودن میله‌های $OA$ و $OD$، این تغییرمکان امکان‌پذیر نبوده و لذا گره $O$ هیچ‌گونه جابجایی ندارد.

بنابراین با توجه به صفر بودن کرنش اعضای $OC$ و $OB$ این اعضا صفر نیرویی‌اند. از طرفی باتوجه به تعادل قائم در گره $O$ داریم:




$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow (F_{OD}+F_{OA})\dfrac{\sqrt{2}}{2} = P \\ \text{از تقارن}: F_{OD} = F_{OA} \end{cases} \Rightarrow F_{OD} = F_{OA} = \frac{P\sqrt{2}}{2}$$

**۴۸- (۱)**

اعضای قطری بدون در نظر گرفتن تأثیر سایر میله‌ها تمایل دارند افزایش طولی برابر $\alpha\sqrt{L_1^2+L_2^2}\,\Delta T$ داشته باشند. اگر اعضای قطری را از مجموعه حذف کنیم و اجازه دهیم اعضای افقی و قائم تغییر طول بدهند دیده می‌شود که میله‌های افقی و قائم به ترتیب به میزان $\alpha L_1 \Delta T$ و $\alpha L_2 \Delta T$ افزایش طول دارند و فاصله گره‌های قطری نیز به میزان $\alpha\sqrt{L_1^2+L_2^2}\,\Delta T$ افزایش می‌یابد که با افزایش طول اعضای قطری سازگار است و نشان می‌دهد تغییردمای یکسان برای همه اعضای مجموعه، نمی‌تواند در اعضاء تنشی ایجاد کند.

**نکته**: در یک سازه خرپایی معین و یا نامعین بدون تکیه‌گاه، در صورتی که دمای اعضاء به‌گونه‌ای افزایش یابد که حاصل $\alpha\,\Delta T$ در اعضاء یکسان باشد، در اعضاء نیروی داخلی ایجاد نمی‌شود.

**۴۹- (۲)**

نقطه $D$ روی محور تقارن قرار دارد لذا تنش برشی در آن صفر است. در نقطه $A$ نیز تنش برشی صفر می‌باشد. چرا که در محاسبهٔ $Q$ این مقطع $(A)$ از روی قسمت قائم بالای آن، $\bar{y}=0$ و از آنجا $Q=0$ بدست می‌آید.

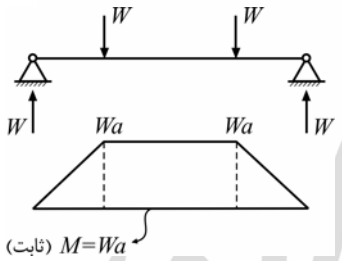
**۵۰- (۴)**

سازه داده شده متقارن و بارگذاری آن نیز متقارن است. لذا تغییرشکل سازه نیز متقارن بوده و میله‌ها تغییرطول یکسان خواهند داشت. بنابراین عملکرد میله‌ها مانند فنرهای موازی بوده و نیروی $2P$ به نسبت سختی محوری اعضا، بین آنها توزیع می‌شود:

$$F_{\text{میله‌های کناری}} = 2P \times \frac{\frac{EA}{L}}{2\times\frac{EA}{L}+\frac{EA}{\frac{L}{2}}} = \frac{P}{2} \quad \text{و} \quad F_{\text{میله میانی}} = 2P \times \frac{\frac{EA}{\frac{L}{2}}}{2\times\frac{EA}{L}+\frac{EA}{\frac{L}{2}}} = P$$

**۵۱- (۱)**

نمودار لنگر خمشی تیر به‌صورت زیر می‌باشد:




مطابق نمودار رسم شده، لنگر خمشی در حدفاصل دو بار، ثابت و برابر $Wa$ می‌باشد. باتوجه به رابطه $M$ با $\rho$ (شعاع انحنا) داریم:

$$\rho = \frac{EI}{M} \text{ و } M \text{ ثابت} \Rightarrow \rho \text{ ثابت است}$$

بنابراین شعاع انحنای مقطع در حد فاصل دو بار ثابت بوده و تغییرشکل این قسمت به‌صورت کمانی از دایره می‌باشد.

**۵۲- (۲)**

برای یافتن تغییرطول قطر صفحه، ابتدا کرنش در راستای قطر ($\theta = ۴۵^\circ$) را می‌یابیم:

$$\varepsilon_{(\theta=۴۵^\circ)} = \varepsilon_x \cos^۲\theta + \varepsilon_y \sin^۲\theta - \frac{\gamma_{xy}}{۲}\sin ۲\theta$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = \frac{۲۰۰ - ۰/۳\times(-۱۰۰)}{۲\times۱۰^۶} = ۱۱۵\times۱۰^{-۶}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{-۱۰۰ - ۰/۳\times۲۰۰}{۲\times۱۰^۶} = -۸۰\times۱۰^{-۶}$$

$$\tau_{xy} = ۰ \Rightarrow \gamma_{xy} = ۰$$

$$\varepsilon = ۱۱۵\times۱۰^{-۶}\times\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ + (-۸۰)\times۱۰^{-۶}\times\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ = ۱۷/۵\times۱۰^{-۶}$$

بنابراین تغییرطول قطر صفحه برابر است با:

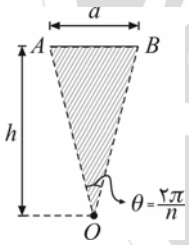
$$\varepsilon = \frac{\Delta}{L} \Rightarrow ۱۷/۵\times۱۰^{-۶} = \frac{\Delta}{۱۰\sqrt{۲}} \Rightarrow \Delta = ۱۷۵\sqrt{۲}\times۱۰^{-۶}\,cm$$

**۵۳- (۱)**

تنش برشی در مقطع جدار نازک بسته تحت لنگر پیچشی $T$ برابر است با:

$$\tau = \frac{T}{۲A_m t}$$

برای تعیین $A_m$، مساحت یکی از $n$ مثلث داخلی $n$ ضلعی منتظم را به‌صورت نشان داده شده می‌یابیم:




$$\tan\frac{\theta}{۲} = \frac{\frac{a}{۲}}{h} \Rightarrow h = \frac{a}{۲}\cot\frac{\theta}{۲} = \frac{a}{۲}\cot\frac{\pi}{n}$$

$$A_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲}ah = \frac{۱}{۲}\times a\times\frac{a}{۲}\cot\frac{\pi}{n} = \frac{a^۲}{۴}\cot\frac{\pi}{n}$$

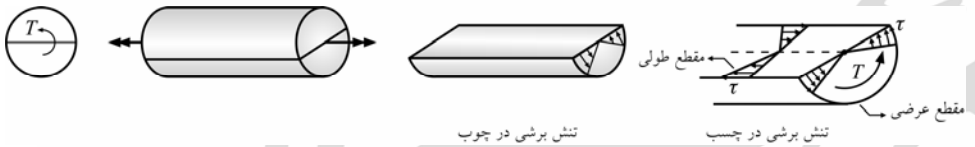
$$\Rightarrow A_{m\,\text{کل}} = nA_{\text{مثلث}} = \frac{na^۲}{۴}\cot\frac{\pi}{n}$$

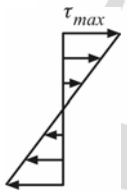
بنابراین تنش برشی ایجاد شده در این مقطع برابر است با:

$$\tau = \frac{T}{۲\times\frac{na^۲}{۴}\cot\frac{\pi}{n}\times t} = \frac{۲T\tan\frac{\pi}{n}}{na^۲t}$$

**۵۴- (۲)**

با توجه به قانون کوشی، تنش برشی در مقطع عرضی، در چسب نیز ایجاد می‌شود (چرا؟). با توجه به این‌که تنش مجاز چسب کوچکتر از چوب است، بنابراین حداکثر لنگر پیچشی مجاز مقطع براساس تنش برشی مجاز چسب به‌دست می‌آید (چرا؟).




$$\tau_{all} = \tau_{max} = \frac{T_{max}\cdot R}{J} \Rightarrow T_{max} = \frac{\tau_{all}\cdot J}{R}$$

$$\Rightarrow T_{max} = \frac{۴\times\frac{\pi\times۱۰^۴}{۲}}{۱۰} = ۲\pi\times۱۰^۳\ kg.cm$$

**۵۵- (۳)**

اگر شعاع قسمت میانی را $R'$ بنامیم، داریم:

$$A'=\frac{A}{۲} \Rightarrow \pi R'^{۲}=\frac{\pi R^{۲}}{۲} \Rightarrow \frac{R'}{R}=\sqrt{\frac{۱}{۲}}$$

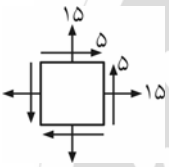
با توجه به یکسان بودن زاویه پیچش قسمت‌های داخلی و خارجی مقطع و توزیع شدن لنگر پیچشی $T$ بین آنها نتیجه می‌شود که قسمت‌های داخلی و خارجی مقطع مانند فنرهای موازی عمل می‌کنند. بنابراین سهم قسمت میانی از لنگر پیچشی $T$ برابر است با:

$$T'=T\times\frac{J'}{J}=T\times\frac{\frac{\pi R'^{۴}}{۲}}{\frac{\pi R^{۴}}{۲}}=T\times\left(\frac{R'}{R}\right)^{۴}=T\times\left(\sqrt{\frac{۱}{۲}}\right)^{۴}=\frac{T}{۴}$$

**۵۶- (۴)**

**نکته:** برای یافتن تنش برشی حداکثر مطلق در یک المان، باید آن را به‌صورت ۳ بعدی درنظر گرفت. در این حالت تنش اصلی روی وجه مربوط به بعد سوم، صفر می‌باشد.

**حل تست:** بنابراین با یافتن دو تنش اصلی در المان داده شده، تنش برشی حداکثر مطلق المان بدست می‌آید.



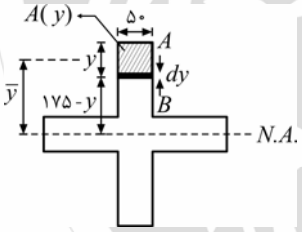

$$\begin{cases}\sigma_{ave}=\frac{۱۵+۱۵}{۲}=۱۵\\ R=\sqrt{\left(\frac{۱۵-۱۵}{۲}\right)^{۲}+۵^{۲}}=۵\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sigma_{۱}=\sigma_{ave}+R=۲۰\\ \sigma_{۲}=\sigma_{ave}-R=۱۰\end{cases}$$

در المان ۳ بعدی، $\sigma_{۳}=۰$ می‌باشد. بنابراین $\tau_{max}$ برابر است با:

$$\tau_{max}=\frac{۱}{۲}(\sigma_{max}-\sigma_{min})=\frac{۱}{۲}(۲۰-۰)=۱۰\,MPa$$

**۵۷- (۳)**

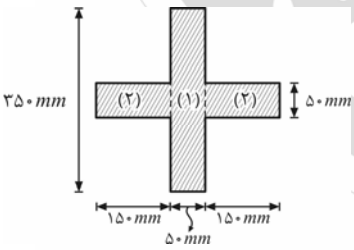
تنش برشی در مقطعی به فاصله $y$ از $A$ برابر است با:




$$\tau(y)=\frac{VQ(y)}{Ib}$$

$$Q(y)=A(y)\times\bar{y}=y\times۵۰\times\left(۱۷۵-\frac{y}{۲}\right)=۵۰\left(۱۷۵y-\frac{y^{۲}}{۲}\right)$$

برای محاسبه $I$ مقطع، شکل را به‌صورت زیر تقسیم‌بندی کرده، داریم:




$$I=\frac{۱}{۱۲}(۳۵۰^{۳}\times۵۰+۵۰^{۳}\times۳۰۰)\simeq۱/۸۲\times۱۰^{۸}\,mm^{۴}$$

برای محاسبه نیروی ایجاد شده در $AB$، از انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$V_{AB}=\int_{۰}^{۱۵۰}\tau(y)\,dA=\int_{۰}^{۱۵۰}\frac{V\times۵۰\left(۱۷۵y-\frac{y^{۲}}{۲}\right)}{I\times۵۰}\times۵۰\,dy=\frac{V}{I}\left(۴۳۷۵y^{۲}-\frac{۵۰}{۶}y^{۳}\right)\Big]_{۰}^{۱۵۰}$$

$$I=۱/۸۲\times۱۰^{۸} \Rightarrow V_{AB}\simeq۰/۳۹V$$

**۵۸- (۴)**

در اثر ایجاد سوراخ، ممان اینرسی پیچشی مقطع ($J$)، کاهش می‌یابد و داریم:

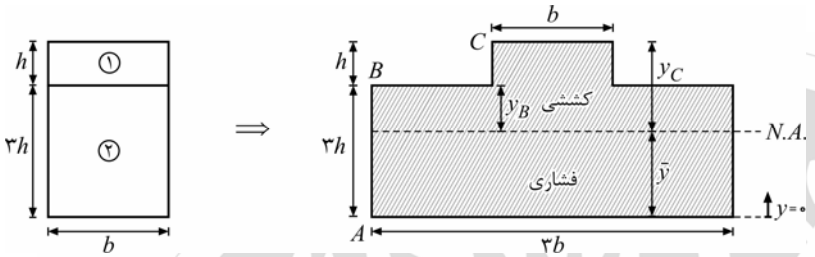
$$\varphi_{۲}=۱/۰۵\varphi_{۱} \Rightarrow \frac{TL}{GJ_{۲}}=۱/۰۵\frac{TL}{GJ_{۱}} \Rightarrow J_{۲}=\frac{J_{۱}}{۱/۰۵}$$

$$\tau_{۱}=\frac{TR}{J_{۱}}=\frac{\pi\times۱۰^{۵}\times۱۰}{\frac{\pi}{۲}\times۱۰^{۴}}=۲۰۰\,kg/cm^{۲}$$

$$\tau_{۲}=\frac{TR}{J_{۲}}=\frac{TR}{\frac{J_{۱}}{۱/۰۵}}=۱/۰۵\left(\frac{TR}{J_{۱}}\right)=۱/۰۵\tau_{۱}=۱/۰۵\times۲۰۰=۲۱۰\,kg/cm^{۲}$$

**۵۹- (۱)**

مصالح با مدول الاستیسیته $E_۲$ را به مصالح با مدول الاستیسیته $E_۱$ تبدیل می‌کنیم. ضریب تبدیل $n=\frac{E_۲}{E_۱}=۳$ است.




اگر لنگر خمشی منفی بر مقطع اثر کند، در تار فوقانی، تنش کششی و در تار تحتانی، تنش فشاری ایجاد می‌شود. بنابراین تنش فشاری ماکزیمم حتماً در تراز $A$ ایجاد می‌شود. اما برای تعیین محل و مقدار حداکثر تنش کششی، باید تنش ترازهای $B$ و $C$ را باهم مقایسه کنیم.

ابتدا $\bar{y}$ را می‌یابیم:

$$\bar{y}=\frac{\sum A_i\,\bar{y}_i}{\sum A_i}=\frac{۳b\times ۳h\times\frac{۳h}{۲}+b\times h\times\frac{۷h}{۲}}{۳b\times ۳h+b\times h}=۱/۷h$$

$$\begin{cases}\sigma_B=n\frac{M\times y_B}{I}=۳\times\frac{M\,(۳h-۱/۷h)}{I}=\frac{۳/۹\,Mh}{I}\\ \sigma_C=\frac{M\times y_C}{I}=\frac{M\times(۴h-۱/۷h)}{I}=\frac{M\times ۲/۳h}{I}=\frac{۲/۳\,Mh}{I}\end{cases}\Rightarrow\ \sigma_{max_t}=\sigma_B=\frac{۳/۹\,Mh}{I}$$

$$\sigma_{max_c}=\sigma_A=n\times\frac{M\times y_A}{I}=۳\times\frac{M\times ۱/۷h}{I}=\frac{۵/۱\,Mh}{I}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_{max_t}}{\sigma_{max_c}}=\frac{\frac{۳/۹\,Mh}{I}}{\frac{۵/۱\,Mh}{I}}\simeq ۰/۷۶$$

**۶۰- (۲)**

در هنگام رهاشدن میله‌های (۱) و (۲) در هریک از حالت‌های مذکور، تمام نیروی $P$ توسط میله دیگر تحمل می‌شود. همچنین به علت آنکه صفحه صلب عمود برمیله‌ها باقی می‌ماند، تغییرطول هر دو میله باهم برابر است.

روابط سازگاری این مسئله را در حالت‌های (۱) و (۲) به‌صورت زیر می‌نویسیم:

**حالت (۱):** (کاهش دما به میزان $T$)

در این حالت میله (۱) رها می‌شود و داریم:

$$\Delta_۱=\Delta_۲\ \Rightarrow\ -\alpha_۱TL=-\alpha_۲TL-\frac{PL}{۲E_۲A}\qquad(I)$$

**حالت (۲):** (افزایش دما به میزان $۳T$)

در این حالت میله (۲) رها می‌شود و داریم:

$$\Delta_۱=\Delta_۲\ \Rightarrow\ ۳\alpha_۱TL-\frac{PL}{E_۱A}=۳\alpha_۲TL\qquad(II)$$

اکنون با درنظر گرفتن روابط $(I)$ و $(II)$، نسبت $\frac{E_۱}{E_۲}$ بدست می‌آید:

$$\begin{cases}(I)\ \Rightarrow\ (\alpha_۱-\alpha_۲)TL=\frac{PL}{۲E_۲A}\\ (II)\ \Rightarrow\ ۳(\alpha_۱-\alpha_۲)TL=\frac{PL}{E_۱A}\end{cases}\ \div\ \Rightarrow\ \frac{۱}{۳}=\frac{\frac{PL}{۲E_۲A}}{\frac{PL}{E_۱A}}=\frac{E_۱}{۲E_۲}\ \Rightarrow\ \frac{E_۱}{E_۲}=\frac{۲}{۳}$$

**۶۱- (۴)**

از روش شیب افت استفاده می‌کنیم:

$$M_{ba}+M_{bc}=0$$

$$\frac{2EI}{L}\left[2\theta_b+\theta_a-\frac{3\Delta_{b/a}}{L}\right]+\frac{2(2EI)}{2L}\left[2\theta_b+\theta_c-\frac{3\Delta_{c/b}}{2L}\right]=0$$

$$\left[2\theta_b+0+\frac{3\delta}{L}\right]+\left[2\theta_b-\frac{3\delta}{2L}\right]=0 \Rightarrow 4\theta_b=-\frac{3\delta}{2L} \Rightarrow \theta_b=-\frac{3\delta}{8L}$$

$$M_{ab}=\frac{2EI}{L}\left[2\theta_a+\theta_b-\frac{3\Delta_{b/a}}{L}\right]=\frac{2EI}{L}\left[0-\frac{3\delta}{8L}+\frac{3\delta}{L}\right]=5/25\frac{EI\,\delta}{L^2}$$

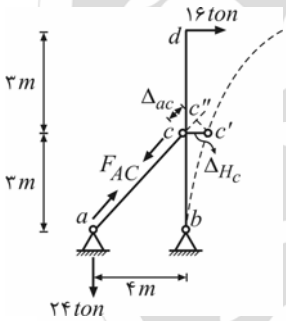
**۶۲- (۱)**

با توجه به روابط روش لنگر سطح داریم:

$$\Delta_{C/A}=\sum\left(\frac{A_M\,\bar{x}}{EI}\right)_i \Rightarrow \Delta_{C/A}=\frac{\frac{PL^2}{2}\times\frac{L}{3}}{EI}-\frac{\frac{PL^2}{2}\times\frac{5L}{3}}{2EI}=-\frac{PL^3}{4EI}$$

**۶۳- (۲)**

از روش سازگاری تغییرشکل‌ها استفاده می‌کنیم. $cb$ قطعه‌ای خمشی است و تغییرطول نمی‌دهد. لذا گره $c$ به صورت افقی به $c'$ منتقل می‌شود. باتوجه به شکل داریم:




$$cc'c'': \Delta_{H_c}=\frac{5}{4}\Delta_{ac}$$

$$\Delta_{ac}=\frac{F_{ac}\,L_{ac}}{EA}$$

$$\sum M_b=0 \Rightarrow R_{a_y}\times 4=16\times 6 \Rightarrow R_{a_y}=24\,ton$$

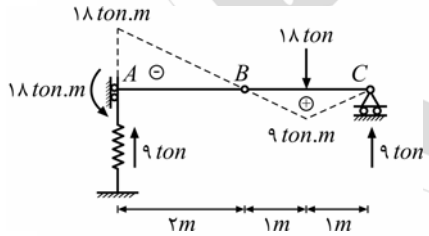
$$a: \sum F_y=0 \Rightarrow F_{ac}\times\frac{3}{5}=24\,ton \Rightarrow F_{ac}=40\,ton$$

$$\Delta_{ac}=\frac{40\times 5}{10^4}\times 10^3=20\,mm$$

$$\Delta_{H_c}=\frac{5}{4}\times 20=25\,mm$$

**۶۴- (۲)**

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم:

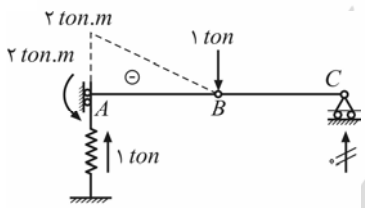



سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی

$$BC: \sum M_B=0 \Rightarrow R_{C_y}\times 2=18\times 1 \Rightarrow R_{C_y}=9\,ton$$

$$\text{کل سازه}: \sum F_y=0 \Rightarrow F_{\text{فنر}}+9=18 \Rightarrow F_{\text{فنر}}=9\,ton$$

$$AB: \sum M_B=0 \Rightarrow M_A=9\times 2=18\,ton.m$$




سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

$BC: \sum M_B=0 \Rightarrow r_{C_y}=0 \Rightarrow$ خمش $(m)$ در طول $BC$ صفر است

$$\sum F_y=0 \Rightarrow f_{\text{فنر}}=1\,ton$$

$$\sum M_B=0 \Rightarrow m_A=1\times 2=2\,ton.m$$

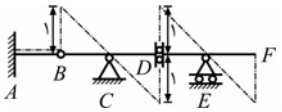
$$1\times\Delta_{B_y}=\left(\int\frac{M(x)\,m(x)}{EI}\,dx\right)_{AB}+\frac{fF}{K}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{2}\times 18\times 2\right]\times\left[\frac{2}{3}\times 2\right]}{1000}\times 10^3+\frac{1\times 9}{250}\times 10^3=60\,mm$$

تبدیل $m$ به $mm$

**۶۵- (۳)**

خط تأثیر خواسته شده به‌صورت مقابل است (نیروی برشی در محل مفصل خمشی $B$):




بنابراین ملاحظه می‌شود که اختلاف ارتفاع در محل مفصل برشی، ۲ واحد است.

**۶۶- (۳)**

دوران در چپ و راست $B$ از تیر اصلی باهم برابر است (شیب تیر در دو سمت مفصل برشی باهم برابر است)، بنابراین نیروی برشی در تیر مزدوج و در مقطع $B$ نباید تغییر کند. سمت چپ و راست مفصل برشی در تیر اصلی به اندازه $\Delta$ از هم فاصله می‌گیرند. بنابراین لنگر خمشی در تیر مزدوج در مقطع $B$ بایستی دارای پرش باشد و بنابراین باید یک لنگر متمرکز $M'$ در این نقطه از تیر مزدوج اعمال شود. می‌دانیم در تبدیل یک سازه به مزدوج آن، تکیه‌گاه مفصلی انتهایی هیچ تغییری نمی‌کند و تکیه‌گاه گیردار به انتهای آزاد تغییر می‌یابد، همچنین مفصل داخلی به تکیه‌گاه داخلی و بالعکس تکیه‌گاه داخلی به مفصل داخلی تغییر می‌یابد. با توجه به این توضیحات گزینه سوم صحیح است. توجه داریم که چون گره $D$ از سازه اصلی تغییر مکان دارد، نبایستی در این گره در سازه مزدوج لنگر خمشی برابر صفر باشد و بنابراین گزینه چهارم صحیح نیست.

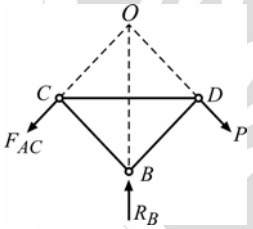
**۶۷- (۳)**

تیرهای $AC$ و $BC$ مثل فنرهای موازی عمل می‌کنند. $M_{AC}$ در سؤال ۴۷ آزمون سال ۱۳۸۲، $\frac{2PL}{5}$ بدست آمد. همچنین تغییرمکان قائم $C$ برابر است با:

$$\Delta_C = \frac{P}{\sum K} = \frac{P}{\frac{3EI}{L^3} + \frac{3(2EI)}{(2L)^3}} = \frac{4PL^3}{15EI}$$

**۶۸- (۱)**

تکیه‌گاه‌های $A$ و $B$ نسبت به‌هم جابجا نمی‌شوند. بنابراین داریم:




$$\Delta_{AB} = 0 \Rightarrow \frac{F_{AB} L_{AB}}{EA} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 0$$

اگر مثلث $BCD$ را در نظر بگیریم نیروهای وارده بر آن عبارتند از نیروی تکیه‌گاه $B$ ، نیروی عضو $AC$ و نیروی $P$. با توجه به اینکه $P$ و $F_{AC}$ از نقطه $O$ بالای تکیه‌گاه $B$ می‌گذرند، عکس‌العمل تکیه‌گاه $B$ نیز باید از نقطه $O$ بگذرد که بدین معناست که تکیه‌گاه $B$ صرفاً دارای مؤلفهٔ قائم است و مؤلفه افقی عکس‌العمل تکیه‌گاه $B$ برابر صفر است.

**۶۹- (۱)**

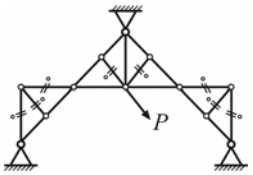
**نکته:** هرگاه دو عضو دو سر مفصل در یک گره متصل باشند در حالیکه:

۱- هیچ بار متمرکزی به گره اعمال نشده باشد.

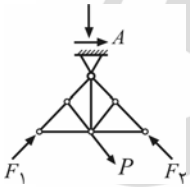
۲- دو عضو در یک راستا نباشند.

آنگاه هر دو عضو صفر نیرویی می‌باشند.

**حل تست:** تحت اثر نیروی اعمالی، اعضای صفر نیرویی خرپا را تعیین می‌کنیم:




بنابراین قطعه بالایی خرپا دارای مولفه‌های عکس‌العمل به‌صورت مقابل است که در $A$ همرس می‌باشند و لذا تحت اثر بارگذاری اعمالی، خرپا ناپایدار است.

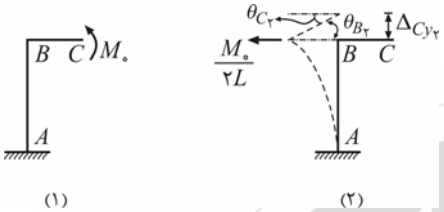



همچنین درجه نامعینی خرپا برابر است با:

$n = m + r - 2j = 19 + 6 - 2\times 12 = 1 \Rightarrow$ خرپا یک درجه نامعین است.

**۷۰- (۳)**

سازه‌های مطرح شده تحت لنگر $M_\circ$ (سازه ۱) و بار افقی $\frac{M_\circ}{۲L}$ (سازه ۲) به صورت زیر می‌باشند.




تغییرشکل سازه (۲) به صورت خط چین رسم شده است. لنگر خمشی در قسمت $BC$ از این سازه صفر می‌باشد. بنابراین $BC$ به‌صورت خطی تغییرشکل می‌دهد و می‌توان نوشت:

$$\Delta_{Cy_۲} = \theta_{B_۲} \times L_{BC} \quad , \quad \theta_{B_۲} = \theta_{C_۲}$$

$\theta_{C_۲}$ را باتوجه به قضیه تقابل کار ماکسول می‌یابیم:

$$M_{C_{(۱)}} \times \theta_{C_{(۲)}} = F_{B_{(۲)}} \times \Delta_{B_{(۱)}}$$

$$M_\circ \times \theta_{C_۲} = \frac{M_\circ}{۲L} \times \Delta \Rightarrow \theta_{C_۲} = \frac{\Delta}{۲L}$$

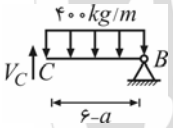
$$\Delta_{Cy_۲} = \theta_{C_۲} \times L = \frac{\Delta}{۲L} \times L = \frac{\Delta}{۲}$$

**۷۱- (۴)**

قطعهٔ دوسر مفصل $BC$ در تمام طولش تحت لنگر خمشی مثبت قرار می‌گیرد و لنگر خمشی حداکثر در وسط دهانه آن به‌وجود می‌آید.

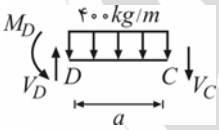
$$M^+_{max} = \frac{wL^۲_{BC}}{۸} = \frac{۴۰۰ \times (۶-a)^۲}{۸} = ۵۰(۶-a)^۲$$

لنگر خمشی ماکزیمم منفی نیز در $D$ از $CD$ اتفاق می‌افتد. از قطعه $BC$، نیروی برشی $V_C$ به قطعه $CD$ منتقل می‌شود که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:




$$\sum M_B = \circ \Rightarrow V_C(۶-a) = ۴۰۰ \times \frac{(۶-a)^۲}{۲} \Rightarrow V_C = ۲۰۰(۶-a)$$

عکس این برش روی $C$ از $DC$ وارد می‌شود:



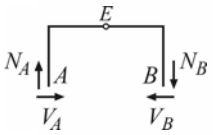

$$\sum M_D = \circ \Rightarrow M^-_{max} = M_D = V_C a + ۴۰۰ \times \frac{a^۲}{۲} = ۲۰۰(۶-a)a + ۲۰۰a^۲ = ۱۲۰۰a$$

$$M^+_{max} = M^-_{max} \Rightarrow ۵۰(۶-a)^۲ = ۱۲۰۰a \Rightarrow a^۲ - ۳۶a + ۳۶ = \circ$$

$a$ از معادله بالا بدست می‌آید.

**۷۲- (۲)**

قطعه $AEB$ را جدا نموده و نیروهای محوری و برشی را روی $B$ و $A$ مطابق شکل نمایش می‌دهیم:




$$AEB: \sum M_A = \circ \Rightarrow N_B = \circ \xrightarrow{\sum F_y = \circ} N_A = \circ$$

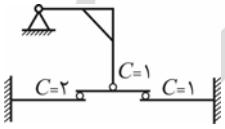
$$EB: \sum M_E = \circ \Rightarrow V_B = \circ \xrightarrow{\sum F_x = \circ} V_A = \circ$$

ملاحظه می‌شود که هیچ نیرویی به قطعه $ABE$ نمی‌رسد. بنابراین کل بارهای $P$ و $۲P$ به عضوهای $BD$ و $AC$ می‌رسند. داریم:

$$\Delta_{AB} = \Delta_A + \Delta_B = \frac{۲P(۲L)^۳}{۳EI} + \frac{P \times (۲L)^۳}{۳EI} = \frac{۸PL^۳}{EI}$$

**۷۳- (۲)**

درجه نامعینی این سازه را از روش حلقه می‌یابیم:



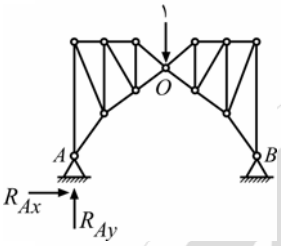

$$n = ۳k + r - (C + ۳) = ۳ \times ۱ + ۸ - (۴ + ۳) = ۴$$

**۷۴- (۳)**

با توجه به صفر بودن لنگر خمشی در نقطه $B$، می‌توان از رابطه شیب افت اصلاح شده جهت تعیین $M_{AB}$ استفاده نمود.

$$M_A = M_{AB} = \frac{۳EI}{L}(\theta_A - \frac{\Delta_{B/A}}{L}) + FEM_{AB} - \frac{۱}{۲}FEM_{BA} \Rightarrow M_A = \frac{۳EI}{L}(۰ - \frac{۱}{L}) + (\frac{-PL}{۸}) - \frac{۱}{۲}(\frac{PL}{۸}) = -\frac{۳PL}{۱۶} - \frac{۳EI}{L^۲}$$

**۷۵- (۱)**




باتوجه به گزینه‌ها کافیست بار واحد را روی مفصل میانی قرار دهیم:

$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow R_{A_y} \times ۶ \times ۲/۵ = ۱ \times ۳ \times ۲/۵ \Rightarrow R_{A_y} = \frac{۱}{۲}$$

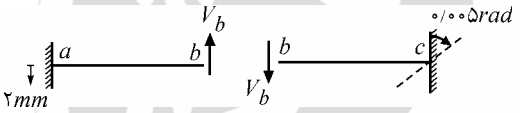
$$O \text{ قسمت سمت چپ}: \sum M_O = ۰ \Rightarrow R_{A_y} \times ۷/۵ = R_{A_x} \times ۲/۷$$

$$\Rightarrow R_{A_x} = ۱/۳۹$$

بنابراین گزینه «۱» صحیح است. برای حل کامل این تست نیز می‌توان بار واحد را به گره‌های فوقانی خرپا اعمال کرده و در هر حالت $R_{A_x}$ را بیابیم که همان گزینه «۱» حاصل می‌شود.

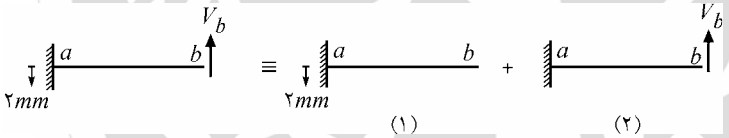
**۷۶- (۳)**

بر این تیر نیروی افقی اعمال نشده و عکس‌العمل‌های افقی در $a$ و $c$ صفر می‌باشد در نتیجه این سازه به‌عنوان تیر، یک درجه نامعین می‌باشد. اگر نیروی برشی در $b$ را به‌عنوان مجهول اضافی در نظر بگیریم، با توجه به تساوی خیز در سمت چپ و راست $b$ و با مثبت فرض کردن جابه‌جایی به سمت بالا، می‌توان نوشت:



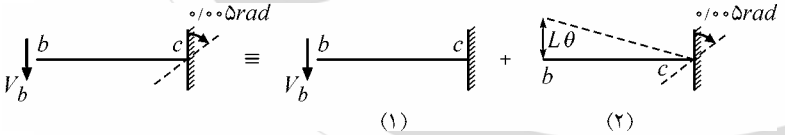

$$+ \quad \Delta_{bL} = \Delta_{bR} \quad \text{(معادلهٔ سازگاری)}$$

برای به‌دست آوردن خیز سمت چپ $b$ می‌توان نوشت:




$$\begin{cases} \Delta_{b_۱} = -۲mm = -۲\times۱۰^{-۳}m & \text{(به سمت پایین)} \\ \Delta_{b_۲} = \dfrac{V_b L^۳}{۳EI} & \text{(به سمت بالا)} \end{cases} \Rightarrow \Delta_{bL} = -۲\times۱۰^{-۳} + \frac{V_b \times ۱/۵^۳}{۳\times۱۳۵}$$

در ادامه برای به‌دست آوردن خیز سمت راست $b$ نیز داریم:



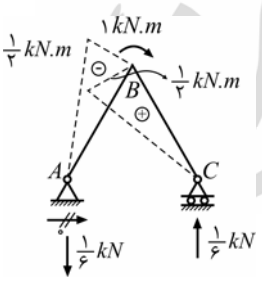

$$\begin{cases} \Delta_{b_۱} = -\dfrac{V_b L^۳}{۳EI} & \text{(به سمت پایین)} \\ \Delta_{b_۲} = L_{bc} \times \theta & \text{(به سمت بالا)} \end{cases} \Rightarrow \Delta_{bR} = -\frac{V_b \times ۱/۵^۳}{۳\times۱۳۵} + ۱/۵\times۰/۰۰۵$$

و در انتها با مساوی قرار دادن $\Delta_{bL}$ و $\Delta_{bR}$ می‌توان نوشت:

$$\Delta_{bL} = \Delta_{bR}$$

$$-۲\times۱۰^{-۳} + \frac{V_b \times ۱/۵^۳}{۳\times۱۳۵} = ۱/۵\times۰/۰۰۵ - \frac{V_b \times ۱/۵^۳}{۳\times۱۳۵} \Rightarrow V_b = ۰/۵۷\ ton \Rightarrow M_a = V_b \times L_{ab} = ۰/۵۷\times۱/۵ = ۰/۸۵۵\ t\cdot m = ۸۵۵\ kg\cdot m$$

**۷۷- (۲)**



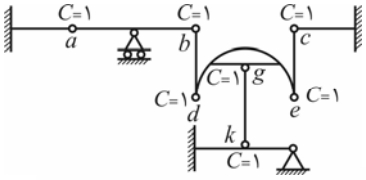

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه بارگذاری روی سازه، لنگر واحد است، داریم:

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{A_x} = ۰ \ , \ \sum M_C = ۰ \Rightarrow R_{A_y} \times ۶ = ۱ \Rightarrow R_{A_y} = \frac{۱}{۶}kN$$

$$AB: \sum M_B = ۰ \Rightarrow M_B = \frac{۱}{۶}\times۳ = \frac{۱}{۲}kN.m$$

$$۱\times\theta_B = ۲(\frac{A_M \bar{m}}{EI}) \Rightarrow \theta_B = ۲\times\frac{\left[\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times۵\right]\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}}{EI} = \frac{۵}{۶EI} = \frac{۰/۸۳}{EI}$$

**۷۸- (۱)**




اگر نیروی افقی خارجی روی قطعه $dge$ وارد شود، هیچ مولفه افقی برای مقابله با این نیـرو وجـود ندارد چرا که این قطعه توسط کابل‌های $bd$ ، $gk$ و $ce$ نگه داشته می‌شود کـه فقـط قیـدهای قـائم برای آن ایجاد می‌کنند. در نتیجه این قطعه عامل ناپایداری کل سازه است.

همچنین درجه نامعینی سازه برابر است با:

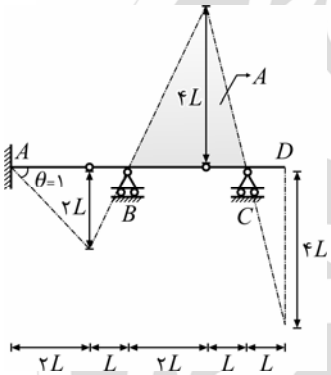
$$n = ۳k + r - (C + ۳) = ۳\times۱ + ۱۲ - (۷ + ۳) = ۵$$

بنابراین سازه ۵ درجه نامعین است.

**۷۹- (۴)**

خط تأثیر لنگر خمشی تکیه‌گاه $A$ به‌صورت زیر است.

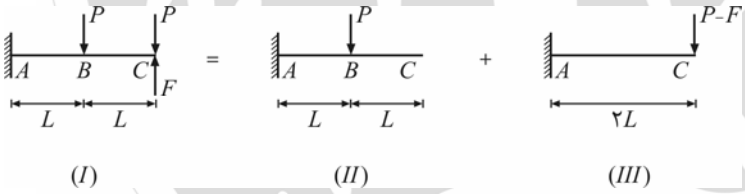
بار $W$ باید در طولی از تیر قرار بگیرد که مساحت خط تأثیر در آن طول حداکثر باشد. بنابراین باید $W$ بین $B$ و $C$ قرار بگیرد.




$$M_{max_A} = WA = W \times \left(\frac{۱}{۲} \times ۴L \times ۳L\right) = ۶WL^۲$$

**۸۰- (۴)**

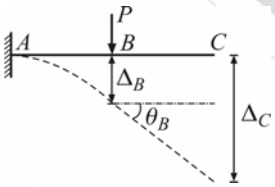
نیروی فنر در شکل (ب) را $F$ می‌نامیم. بنابراین تیر (ب) به صورت زیر بارگذاری می‌شود:




تغییرمکان قائم نقطه $C$ از تیر $(I)$ باید با تغییرطول فنر برابر باشد. (رابطهٔ سازگاری)

$$\Delta_{C(I)} = \Delta_{C(II)} + \Delta_{C(III)}$$

تغییرشکل تیر $(II)$ به‌صورت مقابل است.




توجه شود که در فاصله $BC$ از این تیر، تغییرشکل به‌صورت خطی می‌باشد و انحنا صفر است.

بنابراین می‌توان گفت:

$$\Delta_{C(II)} = \Delta_B + \theta_B L_{BC} = \frac{PL^۳}{۳EI} + \frac{PL^۲}{۲EI} \times L = \frac{۵PL^۳}{۶EI}$$

برای تیر $(III)$ نیز داریم:

$$\Delta_{C(III)} = \frac{(P-F)(۲L)^۳}{۳EI} = \frac{۸(P-F)L^۳}{۳EI}$$

$$\begin{cases} \Delta_{C(I)} = \dfrac{۵PL^۳}{۶EI} + \dfrac{۸(P-F)L^۳}{۳EI} \\ \Delta_{\text{فنر}} = \dfrac{F}{K_S} = \dfrac{F}{\dfrac{EI}{۲L^۳}} = \dfrac{۲FL^۳}{EI} \end{cases} \xrightarrow[\Delta_{C(I)} = \Delta_{\text{فنر}}]{\text{رابطه سازگاری}} \frac{۵PL^۳}{۶EI} + \frac{۸(P-F)L^۳}{۳EI} = \frac{۲FL^۳}{EI} \Rightarrow F = \frac{۳}{۴}P$$

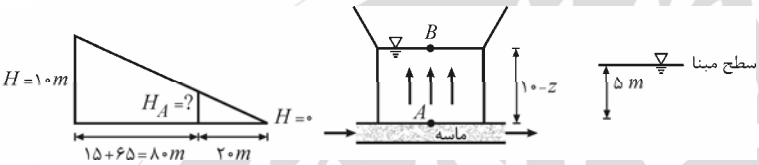
## مکانیک خاک

**۸۱- (۴)**

اگر سطح آب در پایین دست را به‌عنوان سطح مبنا درنظر بگیریم، در آن صورت افت بار آبی کل در لایهٔ ماسه‌ای به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta H = ۱۰ - ۰ = ۱۰m$$

مقدار تغییرات بار آبی در ماسه، مانند جریانِ یک‌بعدی بوده و به‌صورت خطی کاهش می‌یابد. بنابراین بار آبی لایه ماسه‌ای در زیر ناحیهٔ گودبرداری شده برابر است با:




$$H_A = ۱۰ \times \left(\frac{۲۰}{۱۰۰}\right) = ۲m$$

و در ادامه با لحاظ کردن شرط جوشش ($FS$ جوشش $=۱$) در پایین ناحیهٔ گودبرداری شده (هم‌تراز با لایه نازک ماسه) خواهیم داشت:

$$FS \text{ جوشش } = ۱ \Rightarrow \frac{i_{cr}}{i} = ۱ \Rightarrow i = i_{cr} \Rightarrow \frac{\Delta H_{AB}}{L_{AB}} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \Rightarrow \frac{۲-[۱۰-z-۵]}{۱۰-z} = \frac{(۲-۱)}{۱} \Rightarrow z = ۶/۵m$$

**۸۲- (۱)**

با استفاده از روابط حاکم بر مسائل تراکم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \dfrac{V_۲}{V_۱} = \dfrac{\gamma_{d_۱}}{\gamma_{d_۲}} \\ \gamma_d = \dfrac{\gamma}{۱+\omega} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_۲}{V_۱} = \frac{\gamma_۱}{\gamma_۲} \times \frac{۱+\omega_۲}{۱+\omega_۱} \Rightarrow \frac{۱}{V_۱} = \frac{۱۸}{۲۲} \times \frac{۱+۰/۱}{۱+۰/۲} \Rightarrow V_۱ = \frac{۴}{۳} = ۱/۳۳\ m^۳$$

**۸۳- (۲)**

طبق روابط موجود در مسائل تراکم داریم:

$$\begin{cases} \gamma_{d\,\text{اجرایی}} = RC \times \gamma_{d\,max} = ۱ \times ۱/۸ = ۱/۸\ ton/m^۳ \\ \gamma_{d\,\text{قرضه}} = \dfrac{\gamma}{۱+\omega} = \dfrac{۱/۶}{۱+۰/۰۵} = \dfrac{۳۲}{۲۱}\ ton/m^۳ \\ V_{\text{اجرایی}} = ۸\ m^۳ \end{cases}$$

$$\frac{\gamma_{d\,\text{اجرایی}}}{\gamma_{d\,\text{قرضه}}} = \frac{V_{\text{قرضه}}}{V_{\text{اجرایی}}} \Rightarrow \frac{۱/۸}{\left(\frac{۳۲}{۲۱}\right)} = \frac{V_{\text{قرضه}}}{۸} \Rightarrow V_{\text{قرضه}} = ۹/۴۵\ m^۳$$

**۸۴- (۴)**

روند تخریبی پیدایش خاک از سنگ، ممکن است فیزیکی یا شیمیایی باشد. روند فیزیکی تخریب سنگ، به‌صورت فرسایش حاصل از عمل باد، آب و یخچال‌ها و یا خرد شدن ناشی از تناوب یخ زدن آب و ذوب شدن یخ موجود در ترک‌های داخل سنگ و نیز سقوط سنگ‌ها می‌باشد که نتیجهٔ آن تشکیل خاکهای دانه‌ای است. در این حالت ترکیب شیمیایی دانه‌های خاک به‌دست آمده، همان ترکیب سنگ مادر است. برخلاف تخریب فیزیکی، در روند شیمیایی تخریب سنگ که در اثر عمل آب، اکسیژن و گاز کربنیک بر سنگ است، نوع کانی سنگ مادر تغییر می‌کند و باعث بوجود آمدن ذرات ریز بلوری با اندازهٔ کلوئیدی (کوچکتر از ۲ میکرون) می‌شود. شکل این ذرات که کانی‌های رسی نامیده می‌شوند، اغلب صفحه‌ای است ولی ندرتاً به شکل ذرات دراز سوزنی هم یافت می‌شوند.

**۸۵- (۴)**

برای بررسی پایداری سدهای خاکی پس از ساخت، مطالعه لغزش ناگهانی شیروانیِ پایین دست سد خاکی (زهکشی نشده) بلافاصله بعد از ساخت (تحکیم‌نیافته) مدنظر است. یعنی آزمایش مناسب برای این حالت، آزمایش $UU$ است.

**۸۶- (۳)**

ضریب تغییرحجم یک خاک معین مقدار ثابتی نیست و بستگی به محدوده تغییرات تنش وارد بر آن دارد. در نتیجه گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ درست نمی‌باشند. از طرفی می‌دانیم شاخص تراکم ۵ تا ۱۰ برابر شاخص انبساط بوده و از آن بزرگتر است، یعنی گزینه (۳) پاسخ این سؤال است.

**۸۷- (۱)**

$F_{200} = 45\% < 50\% \Rightarrow$ خاک درشت‌دانه است ($S$ یا $G$)

$F_4^* = \left(\frac{F_4 - F_{200}}{100 - F_{200}}\right)\times 100 = \left(\frac{60-45}{100-45}\right)\times 100 = 27/3\% < 50\% \Rightarrow$ خاک شنی ($G$) است.

باتوجه به گزینه‌ها، واضح است که گزینه (۱) پاسخ صحیح این سؤال است. نام کامل خاک را که $GM$ است، خودتان به‌دست آورید.

**۸۸- (۳)**

چون پایداری بلندمدت شیروانی مدنظر است، بنابراین فرصت کافی برای زهکشی آن وجود داشته و زاویه اصطکاک داخلی خواسته شده مربوط به حالت تنش مؤثر (شرایط زهکشی شده) $\phi'$ خواهد بود.

حال با استفاده از رابطهٔ گسیختگی تنش‌های اصلی، در آزمایش $CU$ را براساس تنش‌های مؤثر به کار می‌بریم:

$$(\sigma_1 - u_f) = (\sigma_3 - u_f)\tan^2\left(45+\frac{\phi'}{2}\right) + 2c'\tan\left(45+\frac{\phi'}{2}\right)\ ,\ c' = 0 \quad \text{(رس عادی‌تحکیم‌یافته)}$$

$$\Rightarrow (60+80-20) = (60-20)\tan^2\left(45+\frac{\phi'}{2}\right) + 0 \Rightarrow \phi' = 30^\circ$$

**۸۹- (۱)**

ابتدا میزان دبی را برای واحد طول سد محاسبه می‌کنیم:

$$q = k\,\Delta H\left(\frac{N_f}{N_d}\right) = (2/5\times 10^{-5})(5-1)\left(\frac{4/5}{15}\right) = 3\times 10^{-5}\ m^3/s$$

بنابراین پاسخ صحیح گزینه (۱) است و گزینه (۲) نیز طبیعتاً نادرست خواهد بود. اما درمورد گزینه‌های (۳) و (۴) می‌توان گفت که چون تراز پیزومتری (سطح پیزومتریک) در نقطهٔ $A$ به اندازهٔ $(N_d)_A\,\Delta h = 3\times\left(\frac{4}{15}\right) = 0/8\ m$ پایین‌تر از سطح آب بالادست است، این گزینه‌ها نیز نادرست می‌باشند.

**۹۰- (۱)**

با قرار دادن یک پیزومتر در سطح ($X-X$)، ارتفاع آب بالاآمده در آن را می‌توان به‌صورت زیر مشخص کرد:

$$(h_p)_{(X-X)} = 2/5+1+1+2-\Delta h_3 = 6/5-\Delta h_3$$

$$\Delta h_3 = \frac{\frac{L_3}{A_3 k_3}}{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{L}{Ak}\right)_i}\Delta H = \frac{\left(\frac{2}{A\times 4k_1}\right)}{\left(\frac{1}{A\times k_1}\right)+\left(\frac{2}{A\times 2k_1}\right)+\left(\frac{2}{A\times 4k_1}\right)}\times 2/5 = 0/5\,m$$

$$\Rightarrow (h_p)_{(X-X)} = 6/5-0/5 = 6\,m \Rightarrow u_{(X-X)} = \gamma_w (h_p)_{(X-X)} = 10\times 6 = 60\,kN/m^2$$

$$\sigma'_{(X-X)} = \sigma_{(X-X)} - u_{(X-X)} = (10\times 1+20\times 3) - 60 = 10\,kN/m^2$$

**۹۱- (۴)**

مشابه با تست (۸۸) می‌نویسیم:

$$(\sigma_1 - u_f) = (\sigma_3 - u_f)\tan^2\left(45+\frac{\phi'}{2}\right) + 2c'\tan\left(45+\frac{\phi'}{2}\right)\ ,\ c' = 0 \quad \text{(خاک ماسه‌ای)}$$

$$\Rightarrow (100+100-u_f) = (100-u_f)\tan^2\left(45+\frac{30}{2}\right) + 0 \Rightarrow u_f = 50\,kPa$$

**۹۲- (۳)**

برای اینکه خاک به حالت جوشش در آید، می‌بایست ضریب اطمینان در برابر جوشش برابر ۱ گردد. بنابراین داریم:

$$FS_{\text{جوشش}} = 1 \Rightarrow \frac{i_{cr}}{i} = 1 \Rightarrow i = i_{cr} \Rightarrow \frac{\Delta H}{L} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \Rightarrow \frac{(h-60)}{60} = \frac{(2/2-1)}{1} \Rightarrow h = 132\,cm$$

**۹۳- (۳)**

وقتی سطح آب زیرزمینی در تراز $A-A$ قرار دارد، تنش مؤثر در وسط لایه رسی برابر است با:

$$\sigma'_c = ۱۸\times۱۲+(۲۲-۱۰)\times۲ = ۲۴۰\,kN/m^۲$$

و زمانیکه سطح آب زیرزمینی در تراز $B-B$ می‌ایستد، تنش مؤثر در وسط لایه رسی برابر خواهد بود با:

$$\sigma'_\circ = ۱۸\times۲+(۲۰-۱۰)\times۱۰+(۲۲-۱۰)\times۲ = ۱۶۰\,kN/m^۲$$

همچنین اضافه تنش وارد بر خاک ناشی از خاکریزی نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta\sigma' = \Delta\sigma = ۲۰\times۱۰ = ۲۰۰\,kN/m^۲ \;\Rightarrow\; \sigma'_f = \sigma'_\circ + \Delta\sigma' = ۱۶۰+۲۰۰ = ۳۶۰\,kN/m^۲$$

چون $\sigma'_f > \sigma'_c$ است، بنابراین نشست تحکیم برای این خاکِ پیش‌تحکیم‌یافته، طبق رابطه $\Delta H = \frac{H_\circ}{۱+e_\circ}\left[C_r\,log\left(\frac{\sigma'_c}{\sigma'_\circ}\right)+C_c\,log\left(\frac{\sigma'_f}{\sigma'_c}\right)\right]$ و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta H = \frac{۴}{۱+۱}\left[۰/۰۵\,log\left(\frac{۲۴۰}{۱۶۰}\right)+۰/۲۵\,log\left(\frac{۳۶۰}{۲۴۰}\right)\right] = ۲\times\left(۰/۰۵\,log\,۱/۵+۰/۲۵\,log\,۱/۵\right) = ۰/۶\,log\,۱/۵\;m = ۶۰۰\,log\,۱/۵\;mm$$

**۹۴- (۳)**

با استفاده از روابط سرعت تحکیم، خواهیم داشت:

$$\frac{t_۲}{t_۱} = \left(\frac{H_{dr_۲}}{H_{dr_۱}}\right)^۲ \xrightarrow[\text{یکسان است}]{\text{شرایط زهکشی}} \frac{t_۲}{t_۱} = \left(\frac{H_{\circ_۲}}{H_{\circ_۱}}\right)^۲ \;\Rightarrow\; \left(\frac{t_۲}{۱۰}\right) = \left(\frac{۸}{۴}\right)^۲ \;\Rightarrow\; t_۲ = ۴۰ \text{ سال}$$

**۹۵- (۳)**

با استفاده از رابطه توزیع تنش تقریبی ۲ به ۱ برای بارهای نواری داریم:

$$\Delta\sigma_{z(A)} = \frac{q\times B}{B+z} = \frac{۲/۴\times۴}{۴+۲} = ۱/۶\;kg/cm^۲$$

**۹۶- (۲)**

طبق صورت سؤال داریم:

$$\Delta\sigma_{z_۱}+\Delta\sigma_{z_۳} = \Delta\sigma_{z_۲}\;,\;\frac{r}{z} = \frac{a}{z} = \sqrt{۳}$$

حال اطلاعات داده شده در صورت سؤال را در رابطه محاسبه $\Delta\sigma_z$ جایگذاری کرده و می‌نویسیم:

$$\frac{۳P_۱}{۲\pi z^۲}\left[\frac{۱}{۱+\left(\sqrt{۳}\right)^۲}\right]^{۲/۵} + \frac{۳\left(\frac{۱}{۲}P_۱\right)}{۲\pi z^۲}\left[\frac{۱}{۱+\left(\sqrt{۳}\right)^۲}\right]^{۲/۵} = \frac{۳P_۲}{۲\pi z^۲}$$

$$\Rightarrow\; \frac{P_۱}{۳۲}+\frac{\frac{۱}{۲}P_۱}{۳۲} = P_۲ \;\Rightarrow\; P_۱ = \frac{۶۴}{۳}P_۲$$

**۹۷- (۲)**

عمق بحرانی گودبرداری در یک توده خاک رس اشباع در شرایط زهکشی نشده ($\phi=\circ$) برابر است با:

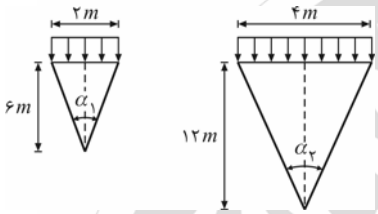
$$\begin{cases} H_{cr} = \dfrac{۴c}{\gamma\sqrt{k_a}} - \dfrac{۲q}{\gamma} \\ \phi=\circ \;\Rightarrow\; K_a = ۱ \qquad \Rightarrow\; H_{cr} = \dfrac{۴c_u}{\gamma_{sat}} - \dfrac{۲q}{\gamma_{sat}} \qquad \Rightarrow\; ۱۲ = \dfrac{۴c_u}{۱/۵} - \circ \;\Rightarrow\; c_u = ۴/۵\,t/m^۲ \\ c = c_u \;,\; \gamma = \gamma_{sat} \end{cases}$$

**۹۸- (۱)**

در روش تقریبی، چنانچه نقطه‌ای خارج از محدوده توزیع تنش باشد، در آنصورت اضافه تنش قائم در آن نقطه صفر خواهد بود. در عوض اضافه تنش قائم کلیه نقاطی که در داخل محدوده و در یک ترازند ($z = const$) مقدار یکسانی است. به عبارت دیگر برخلاف روش بوسینسک، در روش تقریبی شدت تنش در یک تراز برای نقاط داخل محدوده، یکنواخت است. از آنجائیکه در صورت سؤال مقدار حداکثر برای اضافه تنش مطرح شده است، بنابراین بایستی از روش بوسینسک استفاده شود. در روش بوسینسک اضافه تنش قائمِ حداکثر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود که مربوط به زیر مرکز بارگذاری است:

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi}\left[\alpha + \sin\alpha\right]$$

که در دو حالت این سؤال داریم:




$$\tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \frac{1}{6} \quad , \quad \tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \Delta\sigma_{z_2} = \Delta\sigma_{z_1} = 2\,kN/m^2$$

**۹۹- (۲)**

براساس روش اصلاحی ترزاقی داریم:

$$t = 3\,year > t_c = 2\,year \Rightarrow t_m = t - \frac{t_c}{2} = 3 - \frac{2}{2} = 2\,year$$

این حالت مانند زمانی است که بارگذاری به‌صورت آنی وارد شده و میزان نشست بعد از دو سال مدنظر باشد (معادلِ میزان نشست بعد از سه سال از شروع بارگذاریِ تدریجی)، بنابراین با استفاده از نمودار نشست، متناظر با زمان $t = 2\,year$ نشستی معادل $30\,mm$ به‌دست خواهد آمد.

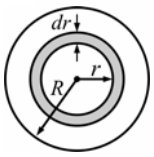
**۱۰۰- (۱)**

می‌دانیم در حالت تحکیم همسان، $B = \frac{\Delta u_c}{\Delta\sigma_3}$ است و حداکثر مقدار آن برابر یک و هنگامی است که خاک اشباع باشد، لذا برای یک خاک غیراشباع، با افزایش درجه اشباع، مقدار $B$ افزایش یافته و به یک نزدیکتر می‌شود.

## مکانیک سیالات

**۱۰۱- (۴)**

المانی مطابق شکل به صورت حلقوی روی سطح تحتانی این دیسک انتخاب می‌کنیم. نیروی ($dF$) و گشتاور لازم جهت دوران این المان ($dT$) به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

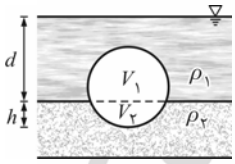



$$\begin{cases} dF = \mu\left(\frac{V}{y}\right)dA \\ V = r\omega\ ,\ dA = 2\pi r\,dr \end{cases} \Rightarrow dF = \frac{2\pi\mu\omega r^2 dr}{y}$$

$$dT = r \times dF = \frac{2\pi\mu\omega r^3 dr}{y} \Rightarrow T = \int_0^R dT = \int_0^R \frac{2\pi\mu\omega r^3 dr}{y}$$

$$T = \frac{\pi\mu\omega R^4}{2y} = \frac{\pi D^4\omega\mu}{32y} \Rightarrow T = \frac{\pi\times 0/08^4\times 2\times 0/01}{32\times 0/002} = 1/28\pi\times 10^{-5}\,N.m$$

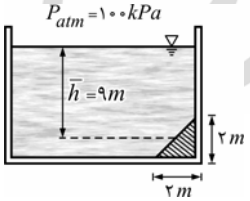
**۱۰۲- (۱)**




$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W = F_B \Rightarrow W = \rho_1 V_1 g + \rho_2 V_2 g$$

همانطور که ملاحظه می‌شود وزن کره برابر است با وزن مجموع دو سیال جابه‌جا شده که بستگی به مقدار $d$ ندارد. بنابراین تغییر سطح آزاد سیال باعث تغییر موقعیت کره نخواهد شد و افزایش ارتفاع $d$ اثری روی مقدار $h$ ندارد.

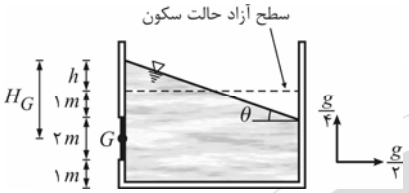
**۱۰۳- (۴)**




$$F = (\gamma\bar{h} + P_{atm})A = (10\times 9 + 100)(5\times 2\sqrt{2}) = 1900\sqrt{2}\ kN$$

**۱۰۴- (۳)**

با محاسبه شیب سطح آزاد مایع، تحت شتاب وارده، سطح آزاد آب را به‌صورت زیر ترسیم می‌کنیم:




$$\tan\theta = \frac{a_x}{a_y + g} = \frac{(\frac{g}{۲})}{(\frac{g}{۴}) + g} = ۰/۴$$

$$h = ۳ \times \tan\theta = ۳ \times ۰/۴ = ۱/۲\ m$$

$$H_G = ۱ + ۱ + ۱/۲ = ۳/۲\ m$$

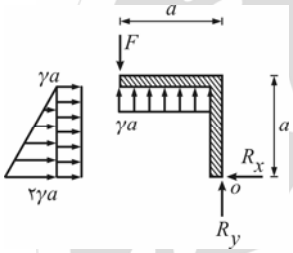
برای محاسبه نیروی (افقی) وارد بر دریچه، خواهیم داشت:

$$P_G = \gamma H_G\left(۱ + \frac{a_y}{g}\right) \Rightarrow P_G = ۱۰^۴ \times ۳/۲ \times \left(۱ + \frac{۱}{۴}\right) = ۴۰۰۰۰\ Pa$$

$$F_H = P_G \cdot A = (۴۰۰۰۰)\left(\frac{\pi \times ۲^۲}{۴}\right) = ۴۰\pi \times ۱۰^۳ N = ۴۰\pi\ kN$$

**۱۰۵- (۲)**

با رسم منشور فشار برای دریچه و نشان دادن دیاگرام آزاد آن، رابطهٔ تعادل لنگرها را حول لولای $o$ می‌نویسیم:




$$\sum M_o = ۰ \Rightarrow F \times a = (\gamma a)(a \times ۱)\left(\frac{a}{۲}\right) + (\gamma a)(a \times ۱)\left(\frac{a}{۲}\right) + \frac{۱}{۲}(\gamma a)(a \times ۱)\left(\frac{a}{۳}\right)$$

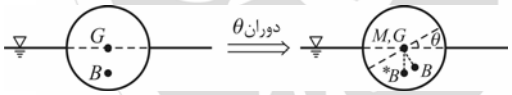
$$\Rightarrow F = \frac{۷}{۶}\gamma a^۲$$

**۱۰۶- (۳)**

با نوشتن رابطه تعادل نیروها در امتداد قائم (برای استوانه)، خواهیم داشت:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow W = F_B \Rightarrow (۰/۵\gamma_w)(V) = (\gamma_w)(V_d) \Rightarrow V_d = \frac{۱}{۲}V$$

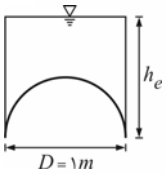
از رابطه فوق نتیجه می‌شود که استوانه تا نیمه در آب است. حال استوانه را به اندازه زاویه کوچک $\theta$ حول محور $z$ دوران داده و موقعیت متاسنتر ($M$) را مشخص می‌کنیم:




همان‌طور که ملاحظه می‌شود در این حالت $M$ و $G$ بر هم منطبق می‌باشند، بنابراین $\overline{MG} = ۰$ و تعادل استوانه خنثی است.

**۱۰۷- (۳)**

چنانچه در این مسئله به‌جای سیال با چگالی $S = ۰/۸$ از آب استفاده نماییم، در آن صورت با استفاده از روش مایع مجازی به‌دست می‌آید:



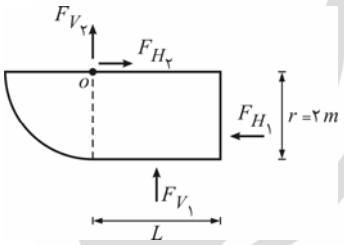

$$h_e = h_۰\left(\frac{\gamma_۰}{\gamma_w}\right) = ۱ \times ۰/۸ = ۰/۸\ m$$

$$F_V = \gamma V = \gamma\left[\left(\frac{\pi \times ۱^۲}{۴}\right)(۰/۸) - \frac{۱}{۲} \times \left(\frac{\pi \times ۱^۳}{۶}\right)\right] = ۰/۳۵\gamma$$

**توجه:** برآیند نیروهای افقی وارد به نیمکره به علت تقارن برابر صفر است. بنابراین نیروی قائم ($F_V$)، برآیند کل نیروهای وارد بر نیمکره خواهد بود.

**۱۰۸- (۲)**

با ترسیم دیاگرام آزاد دریچه و نوشتن رابطه تعادل لنگرها حول لولای $o$، خواهیم داشت:




$$\sum M_o = ۰ \Rightarrow F_{H_۱}\left(\frac{۲r}{۳}\right) = F_{V_۱}\left(\frac{L}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow (\gamma_w \times ۱ \times ۲)\left(\frac{۲}{۳} \times ۲\right) = (\gamma_w \times ۲ \times L)\left(\frac{L}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow L^۲ = \frac{۸}{۳} \Rightarrow L = \frac{۲\sqrt{۶}}{۳}m$$

**توجه:** در این مسئله گشتاور نیروهای افقی در دو طرف جسم (بخش مکعبی و بخش ربع استوانه) با یکدیگر برابر بوده و همدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین می‌توانستیم به‌عنوان راه حل دیگر مسئله، گشتاور نیروهای قائم را در دو طرف جسم محاسبه کرده و با هم برابر قرار دهیم.

**۱۰۹- (۱)**

با نوشتن معادلهٔ برنولی بین نقطهٔ $A$ و نقطهٔ خروجی لولهٔ سیفون $B$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{P_A}{\gamma}+\frac{V_A^{۲}}{۲g}+z_A=\frac{P_B}{\gamma}+\frac{V_B^{۲}}{۲g}+z_B \xrightarrow{V_A=V_B} \frac{P_A}{\gamma}+\frac{V_A^{۲}}{۲g}+۱=\frac{P_a}{\gamma}+\frac{V_A^{۲}}{۲g}+۰ \Rightarrow P_A=P_a-\gamma$$

**توجه:** مقادیر فشار را در معادلهٔ برنولی، مطلق در نظر گرفته‌ایم.

**۱۱۰- (۲)**

به هنگام پمپاژ آب چون دبی جریان نسبت به حالت قبل تغییر نمی‌کند، بنابراین تلفات نیز ثابت و برابر همان ۱۰ متر است، لذا می‌نویسیم:

$$H_P=\Delta z+\Delta H=۱۰+۱۰=۲۰\ m$$

**۱۱۱- (۲)**

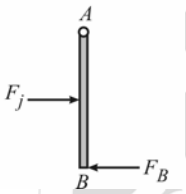
ابتدا هد ایجاد شده توسط پمپ را به‌دست می‌آوریم:

$$N_u=\gamma Q H_P \Rightarrow ۸/۲=۱۰\times ۰/۰۱\times H_P \Rightarrow H_P=۸۲\ m$$

حال با نوشتن رابطه برنولی بین سطح آزاد مخازن خواهیم داشت:

$$H_P=\Delta z+\Delta H \Rightarrow ۸۲=۸۰+\Delta H \Rightarrow \Delta H=۲\ m$$

**۱۱۲- (۱)**



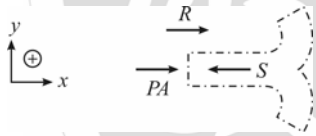

با ترسیم دیاگرام آزاد صفحه قائم و نوشتن رابطه تعادل لنگرها حول لولای $A$ خواهیم داشت:

$$F_j=\rho Q V=(۱۰۰۰)(۲۰\times\pi\times ۰/۱^{۲})(۲۰)=۱۲۵۶۰\ N=۱۲/۵۶\ kN$$

$$\sum M_A=۰ \Rightarrow F_j\left(\frac{h}{۲}\right)=F_B(h) \Rightarrow F_B=\frac{F_j}{۲}=\frac{۱۲/۵۶}{۲}=۶/۲۸\ kN$$

**۱۱۳- (۴)**

با در نظر گرفتن حجم کنترل مطابق شکل زیر خواهیم داشت:




$$V_۲=V_۳=\frac{۰/۰۴}{۰/۰۰۵}=۸\ m/s$$

$$Q_۱=Q_۲+Q_۳=۰/۰۴\times ۲=۰/۰۸\ ,\ V_۱=\frac{Q_۱}{A_۱}=\frac{۰/۰۸}{۰/۰۱}=۸\ m/s$$

$$\sum F_x=PA-S=\left(\sum\rho Q V_x\right)_{out}-\left(\sum\rho Q V_x\right)_{in}$$

$$(۴۰\times ۱۰^{۳})(۰/۰۱)-S=(۱۰۰۰)(۰/۰۴)(-۸\cos ۶۰)+(۱۰۰۰)(۰/۰۴)(-۸\cos ۶۰)-(۱۰۰۰)(۰/۰۸)(۸)$$

$$\Rightarrow S=۱۳۶۰ \Rightarrow R=S=۱۳۶۰\ N$$

**توجه:** مقدار فشار $P$ به‌صورت نسبی لحاظ شد:

$$P=۱۴۰-۱۰۰=۴۰\ kPa$$

**۱۱۴- (۴)**

$$\begin{cases}(Re)_m=(Re)_p \Rightarrow \dfrac{V_m D_m}{\nu_m}=\dfrac{V_p D_p}{\nu_p} \Rightarrow \dfrac{\nu_m}{\nu_p}=\left(\dfrac{V_m}{V_p}\right)\left(\dfrac{D_m}{D_p}\right)=V_r L_r \\ (Fr)_m=(Fr)_p \Rightarrow \dfrac{V_m}{\sqrt{gL_m}}=\dfrac{V_p}{\sqrt{gL_p}} \Rightarrow V_r=\sqrt{L_r}\end{cases} \Rightarrow \frac{\nu_m}{\nu_p}=(\sqrt{L_r})(L_r)=L_r^{\frac{۳}{۲}}=\left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

**۱۱۵- (۱)**

با به‌کارگیری تشابه فرود بین مدل و نمونه اصلی خواهیم داشت:

$$Fr_m=Fr_p \Rightarrow \begin{cases}V_r=\sqrt{L_r} & (I)\\ \dfrac{L_r}{t_r}=\sqrt{L_r} \Rightarrow t_r=\sqrt{L_r} & (II)\end{cases}$$

با استفاده از $(I)$ : $Q_r=V_r L_r^{۲}=\sqrt{L_r}\times L_r^{۲}=L_r^{۲/۵} \Rightarrow \dfrac{۰/۱۵}{Q_p}=\left(\dfrac{۱}{۱۰۰}\right)^{۲/۵} \Rightarrow Q_p=۱۵۰۰۰\ m^{۳}/s=۱/۵\times ۱۰^{۴}\ m^{۳}/s$

با استفاده از $(II)$ : $t_r=\sqrt{L_r} \Rightarrow \dfrac{۶۰}{t_p}=\sqrt{\dfrac{۱}{۱۰۰}} \Rightarrow t_p=۶۰۰\ s$

**۱۱۶- (۳)**

$$\frac{\Delta h}{D} \equiv \frac{\sigma}{\gamma D^{۲}} \equiv \Delta h \sqrt{\frac{\gamma}{\sigma}} \equiv \frac{\gamma D^{۲}}{\sigma} \equiv ۱$$

**۱۱۷- (۳)**

در یک لولهٔ جریان با سطح مقطع ثابت، جهت جریان با استفاده از انرژی هیدرولیکی $\left(\frac{P}{\gamma}+z\right)$ مشخص می‌شود. در این حالت جهت جریان از انرژی هیدرولیکی بیشتر به‌سمت انرژی هیدرولیکی کمتر است.

$$\begin{cases} \frac{P_A}{\gamma}+z_A = \frac{۴۵۰}{۹}+۰=۵۰\ m \\ \frac{P_B}{\gamma}+z_B = \frac{۱۸۰}{۹}+۱۵=۳۵\ m \end{cases} \Rightarrow \text{جهت جریان از } A \text{ به طرف } B \text{ است.}$$

افت انرژی در طول $AB$ ، همان اختلاف هد بین $A$ و $B$ است، بنابراین می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \Delta H_T = \Delta H = \left(\frac{P_A-P_B}{\gamma}\right)+(z_A-z_B) = \left(\frac{۴۵۰-۱۸۰}{۹۰}\right)+(۰-۱۵)=۱۵\ m \\ \Delta H_T = f\frac{L}{D}\cdot\frac{V^{۲}}{۲g}\ ,\ L=\frac{۱۵}{\sin ۳۰^\circ}=۳۰\ m \end{cases} \Rightarrow ۱۵=۰/۰۲\left(\frac{۳۰}{۰/۰۵}\right)\left(\frac{V^{۲}}{۲\times ۱۰}\right) \Rightarrow V=۵\ m/s$$

**۱۱۸- (۱)**

در جریان آرام در لوله‌ها، افت انرژی طبق رابطه هاگن - پوازوی برابر است با:

$$\Delta H = \frac{۳۲\mu VL}{\gamma D^{۲}}$$

با توجه به یکسان بودن طول دو لوله، قطر آنها و سرعت جریان عبوری از آنها (چون دبی و قطر یکسان است)، می‌توان گفت که $\Delta H$ تنها به سیال عبوری از لوله‌ها و لزجت آن بستگی دارد. در این سؤال نوع سیال و نیز لزجت آن در دو لوله یکسان است، بنابراین افت انرژی دو لوله یکسان خواهد بود.

**۱۱۹- (۲)**

$$Re=\frac{VD}{\nu} \Rightarrow ۱۵۰۰=\frac{V\times ۰/۰۵}{۲\times ۱۰^{-۵}} \Rightarrow V=۰/۶\ m/s$$

$$Re=۱۵۰۰<۲۰۰۰ \Rightarrow \text{جریان آرام است}$$

$$\Delta H = \frac{۳۲\nu VL}{gD^{۲}} = \frac{۳۲\times ۲\times ۱۰^{-۵}\times ۰/۶\times ۲۰}{۱۰\times ۰/۰۵^{۲}} \simeq ۰/۳\ m$$

**۱۲۰- (۴)**

با در نظر گرفتن حجم کنترل در داخل لوله و نوشتن معادله مومنتوم در امتداد قائم خواهیم داشت:

$$\sum F_y = R_y - P_۲ A_۲ \cos\theta = \rho Q(V_۲\cos\theta - ۰)$$

$$R_y = P_۲ A_۲ \cos\theta + \rho A_۲ V_۲^{۲}\cos\theta \Rightarrow \frac{R_y}{\gamma A_۲\cos\theta} = \frac{P_۲}{\gamma}+\frac{V_۲^{۲}}{g} = \left(\frac{P_۲}{\gamma}+\frac{V_۲^{۲}}{۲g}\right)+\frac{V_۲^{۲}}{۲g}$$

از طرفی با توجه به معادله برنولی می‌توان نوشت:

$$\frac{P_۲}{\gamma}+\frac{V_۲^{۲}}{۲g} = \frac{P_۱}{\gamma}+\frac{V_۱^{۲}}{۲g} = H\ (z_۱=z_۲ \text{ صفحه افقی})$$

در نهایت با جایگذاری $H$ به‌جای $\frac{P_۲}{\gamma}+\frac{V_۲^{۲}}{۲g}$، عبارت مطرح شده به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{R_y}{\gamma A_۲\cos\theta} = H + \frac{V_۲^{۲}}{۲g}$$

اگر دانشگاه اصلاح شود، مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

## مجموعه پاسخ‌های تشریحی

# آزمون سراسری سال ۱۳۸۴

## کارشناسی ارشد

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سوالات | از شماره | تا شماره |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | زبان تخصصی | ۲۰ | ۱ | ۲۰ |
| ۲ | ریاضیات | ۲۰ | ۲۱ | ۴۰ |
| ۳ | مکانیک جامدات (مقاومت مصالح ـ تحلیل سازه‌ها) | ۴۰ | ۴۱ | ۸۰ |
| ۴ | مکانیک خاک | ۲۰ | ۸۱ | ۱۰۰ |
| ۵ | مکانیک سیالات | ۲۰ | ۱۰۱ | ۱۲۰ |

"استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد."

## زبان تخصصی

### متن A

***رفتار لرزه‌ای سیستم‌های خاک ـ سازه:***

اهمیت طبیعت خاک بستر برای پاسخ لرزه‌ای سازه‌ها در بسیاری از زلزله‌ها ثابت شده است، اما یک درک منطقی (نسبتاً خوب) از عوامل درگیر (در آن) فقط در همین اواخر شروع به آشکار شدن کرده است. به‌عنوان مثال از مطالعات زلزله‌های اخیر واضح به نظر می‌رسد که ارتباط بین دوره‌های تناوب لرزش سازه‌ها و دوره تناوب خاک نگهدارنده، در خصوص پاسخ لرزه‌ای سازه به شدت مهم است. در مورد زلزله ۱۹۷۰ در گدیز ترکیه، بخشی از یک کارخانه در شهری با فاصله ۱۳۵ کیلومتر از مرکز زلزله تخریب شد، در حالی که هیچ‌یک از ساختمان‌های دیگر در این شهر خسارت ندیدند. تحقیقات بعدی نشان دادند که دوره تناوب اصلی لرزش کارخانه تقریباً مساوی دورهٔ تناوب خاک زیرین (کارخانه) بوده است. دلیل بعدی اهمیت دوره‌های تناوب لرزش از زلزلهٔ متوسط کاراکاس در سال ۱۹۶۷ به‌دست آمد که چهار ساختمان را به طور کامل ویران کرد و باعث ایجاد خسارت گسترده‌ای به بسیاری دیگر (از ساختمان‌ها) گردید. الگوی خسارت سازه‌ای مستقیماً به عمق آبرفت نرمی که روی سنگ بستر قرار دارد ارتباط داده شده است. خسارت گسترده‌ای به ساختمان‌های با ارتفاع متوسط (۵ تا ۹ طبقه) در مناطقی که عمق تا سنگ بستر کمتر از ۱۰۰ متر بود، گزارش شد، در حالی که در مناطقی که ضخامت (لایه) آبرفتی بیش از ۱۵۰ متر بود، خسارت وارده به ساختمان‌های بلندتر بیشتر بود (بیش از ۱۴ طبقه). البته عمق (لایه) آبرفتی مستقیماً با دوره‌های تناوب لرزشی خاک ارتباط دارد. با در نظر گرفتن موج‌های برشی که به صورت عمودی در داخل یک لایه خاک با عمق $H$ حرکت می‌کنند، دوره‌های تناوب لرزش افقی خاک با رابطه زیر به‌دست می‌آیند:

$$T_n = \frac{۴H}{(۲n-۱)v_S}$$

که در این رابطه $n$ یک عدد صحیح ۱، ۲، ۳ و ... است و $v_S$ سرعت موج برشی است. به منظور ارزیابی پاسخ لرزه‌ای یک سازه در یک محل مشخص، خصوصیات دینامیکی سیستم مرکب خاک - سازه باید درک شود. طبیعت خاک بستر ممکن است به سه شکل بر روی پاسخ سازه اثر بگذارد:

(I) پدیدهٔ تشدید خاک می‌تواند رخ دهد، که در آن تحریک لرزه‌ای در سنگ بستر در طی عبور از لایه‌های خاک بالایی تا پی کاهش یابد. این (موضوع) ممکن است باعث (ایجاد) اثرات کاهندگی یا تشدید گردد.

(II) خصوصیات پایه ثابت دینامیکی سازه می تواند به صورت قابل توجهی با حضور (لایه‌های) خاکی بالای سنگ بستر تغییر نماید. این (موضوع) می‌تواند شامل تغییراتی در شکل‌های مود و دوره‌های تناوب لرزه باشد.

(III) یک بخش مهم از انرژی لرزشی سازه که به صورت انعطاف‌پذیر حمایت می‌گردد می‌تواند در محیطی که (در آن) نگهداری می‌شود، با کمک ضربه‌گیری مصالح و میرایی تشعشعات مستهلک گردد.

بندهای (II) و (III) فوق تحت عنوان عمومی «برهم کنش خاک - سازه» مورد بررسی قرار می‌گیرند که می‌تواند به‌عنوان ارتباط (پاسخ) متقابل (وابسته به هم) بین یک سازه و خاک نگهدارنده آن تعریف شود. بخشی از رفتار سازه بستگی به طبیعت خاک نگهدارنده و به طریق مشابه (بستگی دارد) به رفتار لایه‌ای که با حضور سازه تغییر می‌نماید.

در امتداد این موضوع، تشدید خاک (مورد (I) فوق) نیز با حضور سازه تحت تأثیر قرار خواهد گرفت، این در حالی است که تأثیر اندرکنش خاک - سازه عبارت است از ایجاد یک تفاوت میان حرکت در شالوده سازه و حرکت آزاد زمین در همان موقعیت مکانی و در شرایطی که سازه بر روی آن قرار ندارد. هر چند که در عمل، این تغییر به‌ندرت در تعیین تشدید خاک در نظر گرفته می‌شود، حرکت آزاد زمین عموماً به مدل خاک - سازه اعمال می‌شود که در بخش بعدی مورد بحث قرار می‌گیرد. به‌دلیل سختی‌های موجود در ساخت مدل‌های تحلیل دینامیکی سیستم‌های خاک، عمل چشم‌پوشی از اثرات برهم‌کنش خاک - سازه با فرض ساده نظر گرفتن پایهٔ سازه‌ها به صورت صلب بدون توجه به شرایط خاک، تبدیل به یک امر متعارف گردیده است. هر چند که مطالعهٔ دقیق در سال‌های اخیر پیشرفت‌های قابل توجهی را در دانش ما از اثرات بر هم کنش خاک - سازه و همچنین در تکنیک‌های تحلیلی موجود به‌وجود آورده است که در زیر مورد بحث قرار می‌گیرد.

**۱- در خلال زلزلهٔ گدیز، قسمتی از یک کارخانه به خاطر ..... خراب شد.**

۱) آبرفت نرم ۲) لرزش عمودی ۳) لرزش افقی ۴) پدیدهٔ تشدید (رزنانس)

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

Subsequent investigations revealed that the fundamental period of vibration of the factory was approximately equal to that of the underlying soil.

**۲- پریود غالب (به ثانیه) یک لایه خاک رس در عمق ۲۰ متری با سرعت موج برشی برابر با۲۰۰ متر بر ثانیه چقدر است؟**

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۶

گزینه ۳ صحیح است.

$$T_n = \frac{۴H}{(۲n-۱)s} = \frac{۴\times۲۰}{۱\times۲۰۰} = ۰/۴\,S$$

**۳- متضاد (کلمه) «تشدید» (amplification) چیست؟**

۱) لرزش ۲) تحریک ۳) کاهش ۴) اهمیت

گزینه ۳ صحیح است.

**۴- لغت "refinement" یعنی:**

۱) ضربه زدن ۲) شستشو ۳) خالص‌سازی ۴) تشدید

گزینه ۳ صحیح است.

**۵- لغت "damping" یعنی:**

۱) سختی ۲) غالب ۳) استهلاک ۴) بزرگنمایی

گزینه ۳ صحیح است.

***بر طبق متن A، در ۲ جمله زیر لغت مناسب را برای جاهای خالی انتخاب نمایید.***

**۶- به صورت ایده‌آل، حرکت زلزله لازم است که از ..... تا سیستم خاک - سازه کامل اعمال گردد.**

۱) سنگ بستر ۲) سطح ۳) بالای ساختمان ۴) لایه خاک

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

The phenomenon of soil amplification may occur, in which the seismic excitation at bedrock is modified during transmission through the overlying soils to the foundation.

**۷- عدم قطعیت‌های بزرگی در تعریف طراحی حرکت زمین وجود دارد که نه تنها فقط نشان‌دهنده طبیعت تکان ..... مناسب برای محل است، بلکه همچنین نشان‌دهندهٔ یک سطح خطر مناسب نیز است.**

۱) خاک ۲) ساختمان ۳) ارتعاش ۴) زمین‌لرزه

گزینه ۴ صحیح است.

***متن زیر (B) را بخوانید و به ۸ سوال پس از آن پاسخ دهید.***

**متن B**

***دستیابی به آسمان:***

برنامه‌ریزی شده است که بلندترین ساختمان جهان به زودی افتتاح گردد و دارای نمایی است که شباهتی به آسمان‌خراش‌های قبلی ندارد. یک پایه باریک شونده که بر روی آن یک سری قطعات عریض شونده قرار دارند.

ارتفاع بسیار زیاد - ۵۰۸ متر - و شکل منحصربه‌فرد ساختمان یک سری چالش‌هایی را برای مهندسانی مطرح کرد که طرح سازه‌ای (ساختمان) را انجام دادند و باید راهی را برای بنای آسمانخراش بر روی سازنده‌های ضعیف زمین‌شناسی در منطقه‌ای که به خاطر طوفان‌ها و زلزله‌های شدید معروف بود ارائه می‌کردند. ارتفاع سازه یکی از بزرگترین مسایل را پیش روی مهندسان قرار داد. هر طبقهٔ اضافه شده به یک آسمانخراش یک عامل افزایش هزینه همیشگی است، در اثر آن ، طبقهٔ جدید در پایین ساختمان اضافه می‌شود چرا که (ساختمان) باید دارای ساختار کافی برای تحمل وزن طبقات بالای خود و دربردارندهٔ فضای کافی برای جای دادن آسانسور و پلکان، به علاوهٔ کانال‌های تأسیسات برای سیستم‌های مکانیکی، الکتریکی، لوله‌کشی و حفاظت در برابر آتش باشد. یک قید اقتصادی بر روی ارتفاع ساختمان به‌وجود می‌آید زمانی که هزینهٔ اضافه نمودن یک طبقه از منفعتی که آن طبقه حاصل می‌نماید بیشتر گردد.

(این) برج به صورت سازه‌ای تصور می‌شد که ۲۰۰۰۰۰ متر مربع را شامل شود و در پایه‌اش با ناحیه‌ای به نام "Podium" - یک ۲۰۰۰۰۰ متر مربع اضافی از فضای تجاری و پارکینگ زیرزمینی احاطه گردد. با اندازه‌های سطح زمین که استانداردهای عمومی ساختمان اداری، را در نظر دارد، فضای مورد نیاز اداری ۱۰۱ طبقه تعیین شد.

سنگ بستر نرم زیر محل در موقعیت حدود ۴۰ تا ۶۰ متری زیر لایه‌های خاک رس و خاک واریزه‌ای سخت قرار دارد. ساختن چنین سازه بلندی روی این خاک به نمونه‌برداری و تحقیقات ژئوتکنیکی (زمین‌شناسی) گسترده‌ای نیاز داشت. سطح آب زیرزمینی به صورت نرمال، ۲ متر زیر سطح است. اما مهندسان، زیرسازه ساختمان را که به عمق ۵ طبقه است به گونه‌ای طراحی کردند که انگار سطح آب در تراز بود.

پی‌های کم عمق می‌توانستند منتهی به نشست‌های بیش از حد یا گسیختگی مقاومت خاک گردند، بنابراین، مهندسان یک پی عمیق را برای انتقال مستقیم وزن ساختمان به سنگ بستر طراحی کردند بارهای بزرگتر نیازمند المان‌های بزرگتر پی عمیق یا تعداد بیشتر (آنها) است، بنابراین مهندسان درصدد حداقل کردن بار مرده ساختمان برآمدند. یک طرح قاب فولادی به رسیدن به این هدف کمک کرد. در عین تکیه بر مفاهیم فرهنگ و زیبایی، طراحی ساختمان همچنین نشانگر مقررات عملی احداث (ساختمان‌های) بلندمرتبه نیز است. زیرمدول‌های تکراری که به سمت بالا عریض می‌شوند، برج دارای یک پایهٔ ۲۵ طبقه است که شکل آن شبیه یک هرم ناقص است که دربردارنده امتیازات سازه‌ای است.

اگر سیستم سازه‌ای، ستون‌های محیطی را درگیر کند، یک پایهٔ عریض، مقاومت در برابر واژگونی و سختی جانبی بهتری نسبت به یک (سازه با شکل پایه) مستقیم (راست) به‌وجود می‌آورد. انتقال بین پایهٔ هرمی و قسمت‌های معکوس هرمی آن، به ساختمان یک خط کمر می‌دهد.

**۸- از مقاله می‌توان فهمید که:**

۱) نمای ساختمان از پایین تا بالا مستقیم است.

۲) نمای ساختمان باریک‌تر می‌شود تا یک نقطه و سپس دوباره عریض می‌گردد.

۳) نمای ساختمان باریک‌تر می‌شود تا یک نقطه و سپس به صورت مستقیم بالا می‌رود.

۴) اضلاع ساختمان تا طبقه ۶۲ ام مستقیم هستند و سپس به سمت مرکز کم‌کم باریک می‌شوند.

باتوجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

… has a profile … - a tapered base topped by a series of flared segments.

**۹- هزینه افزودن طبقات به یک آسمانخراش:**

۱) با افزایش تعداد طبقات کاهش می‌یابد.

۲) می‌تواند بیشتر از منفعت مالی باشد که یک طبقهٔ اضافی می‌تواند حاصل کند.

۳) شامل بالا بردن پایه ساختمان می‌باشد برای اضافه کردن طبقات از پایین.

۴) شامل سازه‌های کافی برای حمایت ساختمان می‌باشد، ولی نه هزینه بالابرهای وسایل

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

An economic limit …… occurs when the cost of adding a level exceeds the revenue it will generate .

**۱۰- سکوی بزرگ سازه:**

۱) بالای پایه ساختمان گسترش می‌یابد.

۲) از نظر مساحت، مساوی خود آسمانخراش است.

۳) شامل محوطه‌های خرید است ولی دارای تسهیلات پارکینگ نیست.

۴) شامل محوطه‌های پارکینگ و فونداسیون سنگ بستر می‌باشد.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

The tower was conceived as a structure ecompassing 200000 $m^2$ and surrounded at the base by an area called “the podium’ – an additional 200000 m2 of retail space and basement parking.

**۱۱- دلیل اصلی که یک طرح قاب فولادی انتخاب شد این است که:**

۱) می‌توانست بار مرده آسمانخراش را به حداقل برساند.

۲) بیشترین مقاومت را در برابر خسارات طوفان به‌وجود می‌آورد.

۳) به طراحان اجازه می‌داد که از یک پی کم‌عمق استفاده نمایند.

۴) می‌توانست هزینه کلی و زمان ساخت را کاهش دهد.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

The engineers sought to minimize the building’s deal load. A steel frame design helped to achieve this goal.

**۱۲- یک چالش برای مهندسان، طراحی ساختمان ..... بود.**

۱) برمبنای مفاهیم فرهنگ و زیبایی

۲) با در نظر گرفتن سطح آب خیلی عمیق منطقه

۳) ایستادگی در منطقه‌ای بدون سنگ بستر و مقاومت در برابر زلزله و طوفان‌ها

۴) مقاومت در برابر زلزله‌ها و طوفان‌ها علی‌رغم زمین‌شناسی ضعیف منطقه

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

Unique shape of the building …… on weak geologic formations in an area known for extreme typhoons and earthquakes.

**۱۳- امتیازات سازه‌ای شکل پایه ساختمان:**

۱) فقط اگر ساختمان یک خط کمر داشته باشد درک می‌شود.

۲) دربردارندهٔ مقاومت در برابر واژگونی و سختی جانبی است.

۳) کاهش داده شد زیرا ستون‌های محیطی را درگیر نمی‌کند.

۴) یک مورد اصلی بود زمانی که شکل ساختمان انتخاب شد.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

A wide base provides better overturning resistance and lateral stiffness

**۱۴- پی آسمانخراش ..... است.**

۱) یک پی گسترده کم عمق
۲) شمع‌های فولادی که به صورت عمیق در زمین فرو رفته‌اند
۳) یک سری شمع‌های بتنی درجا
۴) یک پی عمیق که بار را به سنگ بستر منتقل می‌کند

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

The engineers designed a deep foundation to transfer the building's weight directly to bedrock.

**۱۵- ساختمان به گونه‌ای طراحی شد که انگار سطح آب ..... بود.**

۱) در سطح زمین
۲) ۲ متر زیر سطح
۳) ۴۰ تا۶۰ متر زیر سطح
۴) هم‌سطح کف زیرسازه پنج طبقه‌ای

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

Engineers designed the building substructure as if the water table were at grade.

***در ۵ جمله زیر، کلمه مناسب را برای جاهای خالی انتخاب نمایید.***

**۱۶- موج‌های محلی در لنگرگاه ..... را مشکل می‌نمایند، اگر ممکن نباشند.**

۱) کشتیرانی
۲) لنگر انداختن
۳) پهلوگیری کشتی
۴) لنگرگاه

گزینه ۳ صحیح است.

**۱۷- نرخ (سرعت) ..... روسازی‌ها، تابع ترافیکی است که از جاده استفاده می‌نماید.**

۱) خوردگی
۲) تخریب (فرسودگی)
۳) سایش و پارگی
۴) جابه‌جایی‌ها

گزینه ۲ صحیح است.

**۱۸- افزایش مقدار کربن فولاد ..... .**

۱) شکل‌پذیری آن را کاهش می‌دهد.
۲) مقاومتش را کاهش می‌دهد.
۳) چگالی‌اش را افزایش می‌دهد.
۴) قابلیت جوش‌پذیری‌اش را افزایش می‌دهد.

گزینه ۱ صحیح است.

**۱۹- با ..... جان تیر ورق، مقاومتش در برابر کمانش افزایش خواهد یافت.**

۱) تقویت
۲) عریض کردن
۳) سخت کردن
۴) stiffenering

گزینه ۱ و ۲ هر دو می‌توانند جواب باشند. گزینه ۴ کلمه‌ای بی‌معنی است.

**۲۰- در فرمول‌بندی (روش) المان محدود، جابه‌جایی‌های دو المان در خط موقعیتشان باید ..... باشد.**

۱) همانند
۲) معادل
۳) قابل مقایسه
۴) سازگار

گزینه ۴ صحیح است.

## ریاضیات

**۲۱- (۴)**

فرمول کار عبارت است از:

$$F \text{ کار نیروی } = \int_C \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

تمامی عبارات زیر علامت انتگرال و همچنین حدود انتگرال را برحسب $t$ می‌نویسیم:

$$P = xy = t\cdot t^{۲} = t^{۳} \;;\; x = t \;\Rightarrow\; dx = dt$$
$$Q = yz = t^{۲}t^{۳} = t^{۵} \;;\; y = t^{۲} \;\Rightarrow\; dy = ۲t\,dt$$
$$R = xz = tt^{۳} = t^{۴} \;;\; z = t^{۳} \;\Rightarrow\; dz = ۳t^{۲}\,dt$$

$$\Rightarrow\; F \text{ کار نیری } = \int_{t=۰}^{۱} t^{۳}(dt) + t^{۵}(۲t\,dt) + t^{۴}(۳t^{۲}\,dt) = \int_{۰}^{۱}(t^{۳} + ۲t^{۶} + ۳t^{۶})\,dt = \left.\frac{t^{۴}}{۴} + \frac{۵t^{۷}}{۷}\right|_{t=۰}^{۱} = \frac{۱}{۴} + \frac{۵}{۷} = \frac{۲۷}{۲۸}$$

**۲۲- (۱)**

معادله از نوع کشی اویلر بوده و دارای معادله مشخصه زیر است:

$$m(m-1)+5m+4=0 \Rightarrow m^2+4m+4=0 \Rightarrow m=-2\ ,\ -2$$

بنابراین، جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y=c_1x^{-2}+c_2x^{-2}\ln x$$

واضح است که وقتی $x\to+\infty$، جواب فوق به صفر می‌گراید.

**۲۳- (۳)**

انتگرال مذکور معرف تابع گاما به‌ازای $\alpha=\frac{-1}{2}$ می‌باشد.

تعریف تابع گاما : $\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx$

بنابراین، حاصل انتگرال برابر $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ است.

**۲۴- (۲)**

$x=0$ نقطه غیرعادی معادله است، با تقسیم طرفین معادله بر ضریب $y''$ نتیجه می‌شود:

$$y''+\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{4x}y=0 \Rightarrow P(x)=\frac{1}{2x}\ ,\ Q(x)=\frac{1}{4x}$$

برای بررسی منظم بودن این نقطه $(x=0)$ داریم:

$$\alpha=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\ ;\ \beta=\lim_{x\to0}x^2\cdot\frac{1}{4x}=0$$

بنابراین، معادله مشخصه عبارت است از:

$$r^2+(\alpha-1)r+\beta=0 \Rightarrow r^2-\frac{1}{2}r=0 \Rightarrow r=0\ ,\ \frac{1}{2}$$

**۲۵- (۴)**

معادله را با استفاده از تابع پله‌ای به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y''+4y=u_0(t)-u_\pi(t)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس بر طرفین معادله نتیجه می‌شود:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s} \Rightarrow (s^2+4)Y(s)=\frac{1-e^{-\pi s}}{s}+s \Rightarrow Y(s)=\frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}+\frac{s}{s^2+4}$$

**۲۶- (۳)**

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{1}{x}\left\{x-\frac{x^2}{2}+\cdots\right\}}=e^{1-\frac{x}{2}+\cdots}=e\cdot e^{\frac{-x}{2}}\cong e\cdot\left(1-\frac{x}{2}+\cdots\right)=e-\frac{e}{2}x+\cdots$$

بنابراین، ضریب $x$ در بسط مکلوران برابر $\frac{-e}{2}$ خواهد بود.

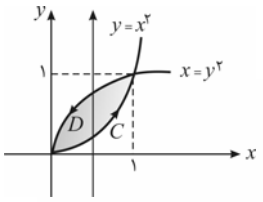
**۲۷- (۴)**

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))}\overset{\text{هم ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}(\cos x-1)}\overset{\text{هم ارزی}}{=\!=}e^{\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)}=e^{\frac{-1}{2}}$$

توجه کنید که در حد بالا از هم ارزی $\ln(\cos(x))\sim\cos(x)-1$ و $\cos x-1\sim\frac{-x^2}{2}$ (وقتی $x\to0$) استفاده شده است.

**۲۸- (۱)**

شرایط قضیه گرین برقرار است، لذا داریم:




$$I=\oint_C (P\,dx+Q\,dy)=\iint_D (Q_x-P_y)\,dx\,dy$$

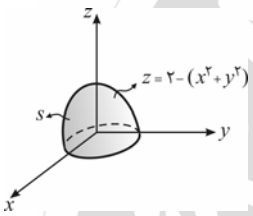
$$=\iint_D (۱-۲x)\,dx\,dy=\int_{x=۰}^{۱}\int_{y=x^۲}^{\sqrt{x}}(۱-۲x)\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=۰}^{۱}(۱-۲x)\,y\Big|_{y=x^۲}^{\sqrt{x}}dx=\int_۰^۱(۱-۲x)(\sqrt{x}-x^۲)\,dx$$

$$=\int_۰^۱\left(x^{\frac{۱}{۲}}-x^۲-۲x^{\frac{۳}{۲}}+۲x^۳\right)dx=\left(\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}-\frac{x^۳}{۳}-۲\times\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}+\frac{۱}{۲}x^۴\right)\Big|_{x=۰}^{۱}=\frac{۱}{۳۰}$$

**۲۹- (۲)**

سطح مورد نظر در شکل مقابل مشاهده می‌شود:




$$S=\iint_s ds$$

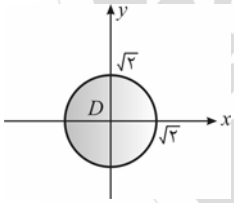
که در آن $ds$ المان سطح بوده و برابر است با:

$$ds=\sqrt{۱+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^۲+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^۲}\,dx\,dy=\sqrt{۱+۴x^۲+۴y^۲}\,dx\,dy$$

بنابراین:

$$S=\iint_D\sqrt{۱+۴x^۲+۴y^۲}\,dx\,dy$$

که در آن $D$ تصویر ناحیه $S$ روی صفحه $xy$ می‌باشد:

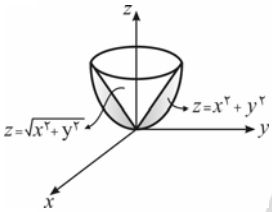



با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$S=\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{\sqrt{۲}}\sqrt{۱+۴r^۲}\,r\,dr\,d\theta=\frac{۲\pi}{۸}\cdot\frac{۲}{۳}(۱+۴r^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{r=۰}^{\sqrt{۲}}=\frac{۹\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۳\pi}{۳}$$

**۳۰- (۳)**

ناحیه مورد نظر مطابق شکل زیر است:




تقاطع رویه‌ها $\begin{cases} z=\sqrt{x^۲+y^۲} \\ z=x^۲+y^۲ \end{cases} \Rightarrow z=۱\,,\ x^۲+y^۲=۱$

بنابراین، حجم این ناحیه عبارت است از:

$$V=\iiint_V dv \xlongequal{\text{مختصات استوانه‌ای}} \int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{۱}\int_{z=r^۲}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=۲\pi\int_۰^۱ r(r-r^۲)\,dr=۲\pi\left(\frac{r^۳}{۳}-\frac{r^۴}{۴}\right)\Big|_{r=۰}^{۱}=۲\pi\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}\right)=\frac{\pi}{۶}$$

**۳۱- (۲)**

مشخص است که مرزهای ناحیه عبارتند از:

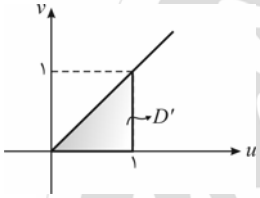
$$x=0\ ,\ x=1\ ,\ y=0\ ,\ y=1-x$$

اگر از تغییر متغیرهای $u=x+y$ و $v=x$ استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\,dy\,dx=\iint_{D'} e^{\frac{u-v}{u}}\,|J|\,du\,dv$$

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}=-1\ ,\ D'=\{(u,v)\,|\,0\le u\le 1\ ,\ 0\le v\le u\}$$

بنابراین:




$$I=\iint_{D'} e^{1-\frac{v}{u}}\,du\,dv=e\iint_{D'} e^{\frac{-v}{u}}\,du\,dv=e\int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{-v}{u}}\,dv\,du=e\int_0^1 -ue^{\frac{-v}{u}}\Big|_{v=0}^{u}\,du$$

$$=e\int_0^1 u\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}e\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{e-1}{2}$$

**۳۲- (۴)**

با توجه به بسط مک لورن تابع $e^x$ داریم:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}}\ e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}\ \xrightarrow{\times x}\ xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}\ \xrightarrow{\frac{d}{dx}}\ e^x+xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^{n-1}}{n!}$$

$$\xrightarrow{\times x}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=(x^2+x)e^x$$

**۳۳- (۱)**

معادله مشخصه : $4m^3-3m+1=0\ \Rightarrow\ (m+1)(4m^2-4m+1)=(m+1)(2m-1)^2=0$

$$\Rightarrow\ m=-1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}$$

بنابراین، جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{1}{2}x}+c_3xe^{\frac{1}{2}x}$$

**۳۴- (۳)**

فاصله مبدأ تا نقاط منحنی در صفحه $xy$ از رابطه $f(x,y)=x^2+y^2$ بدست می‌آید، بنابراین باید می‌نیمم مقید تابع $f(x,y)$ را تحت قید منحنی داده شده بدست آوریم:

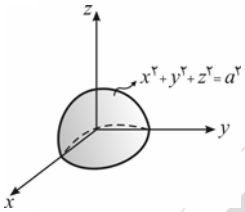
$$\begin{cases} f:x^2+y^2 \\ g:17x^2+12xy+8y^2-100=0 \text{ (قید)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla f=\lambda\nabla y\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{1}{5}\ \Rightarrow\ y=-2x\ \Rightarrow \begin{cases} (2,-4)\ \Rightarrow\ f=20 \\ (-2,4)\ \Rightarrow\ f=20 \end{cases} \\ \lambda=\frac{1}{20}\ \Rightarrow\ x=2y\ \Rightarrow \begin{cases} (2,1)\ \Rightarrow\ f=5 \\ (-2,-1)\ \Rightarrow\ f=5 \end{cases} \end{cases} \\ g(x)=0\ \Rightarrow\ 7x^2+12xy+8y^2=100 \end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases} d_{min}=\sqrt{5} \\ d_{max}=\sqrt{20} \end{cases}$$

**۳۵- (۱)**

با استفاده از مختصات استوانه‌ای در نیمکره فوقانی داریم:

$$I = 2\iiint\limits_{\frac{B}{2}\ (\text{نیمکره فوقانی})} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = 2\iiint r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$




$$\Rightarrow I = 2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-r^2}} r^3\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 2(\theta)\Big|_0^{2\pi}\int_0^a r^3\sqrt{a^2-r^2}\,dr = 4\pi\int_0^a r^2\cdot r\sqrt{a^2-r^2}\,dr$$

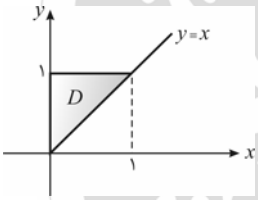
با استفاده از روش جزء به جزء ( $dv = r\sqrt{a^2-r^2}\,dr$ و $u = r^2$) به محاسبه انتگرال می‌پردازیم:

$$I = 4\pi\times\frac{2}{3}\int_0^a r(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\,dr = -\frac{4\pi}{3}\times\frac{2}{5}(a^2-r^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_{r=0}^{a} = \frac{8\pi}{15}a^5$$

**۳۶- (۲)**

$$I = \int_0^1 dx\int_x^1 \frac{y^\lambda}{x^2+y^2}\,dy$$

با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری (شکل) ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:



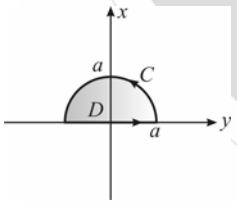

$$I = \int_0^1\int_0^y \frac{y^\lambda}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 y^\lambda\left(\frac{1}{y}Arctan\frac{x}{y}\right)\Big|_{x=0}^{y}\,dy$$

$$= \int_0^1 y^\lambda\left(\frac{\pi}{4y}\right)dy = \frac{\pi}{4}\int_0^1 y^{\lambda-1}\,dy = \frac{\pi}{4}\,\frac{y^\lambda}{\lambda}\Big|_{y=0}^{1} = \frac{\pi}{4\lambda}$$

**۳۷- (۱)**

با توجه به پیوستگی توابع $P = \sin x + 3y^2$ و $Q = 2x - e^{-y^2}$ و بسته بودن مرز $c$ شرایط قضیه گرین برقرار است و داریم:

قضیه گرین: $I = \oint_c P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$




$$\Rightarrow I = \iint\limits_D (2-6y)\,dx\,dy \xlongequal{\text{مختصات قطبی}} \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a}(2-6r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi (r^2 - 2r^3\sin\theta)\Big|_{r=0}^{a}\,d\theta = \int_0^\pi (a^2 - 2a^3\sin\theta)\,d\theta$$

$$= (a^2\theta + 2a^3\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\pi} = a^2\pi - 2a^3 - 2a^3 = \pi a^2 - 4a^3$$

**۳۸- (۴)**

برای سطح $x^2+y^2+z^2=a^2$ داریم:

$$\phi = x^2+y^2+z^2-a^2 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\phi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

بنابراین، یکه عمود بر سطح عبارت است از:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|} \Rightarrow \vec{n} = \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{2(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$$

تابع تحت انتگرال (یعنی $x^2+y^2$) را نیز می‌توان حاصل‌ضرب داخلی بردار $\vec{F} = (ax, ay, 0)$ در $\vec{n}$ دانست. لذا:

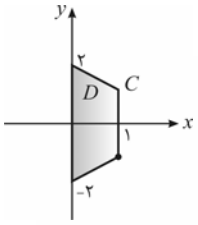
$$\iint\limits_S x^2+y^2\,ds = \iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds \xlongequal{\text{قضیه دیورژانس}} \iiint\limits_V div\,\vec{F}dv = \iiint\limits_V 2a\,dv$$

$$= 2a\iiint\limits_V dv = 2a\ (\text{حجم کره}) = 2a\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{8\pi}{3}a^4$$

**۳۹- (۳)**

مرز $C$ و ناحیه $D$ داخل آن در شکل زیر ملاحظه می‌شود:

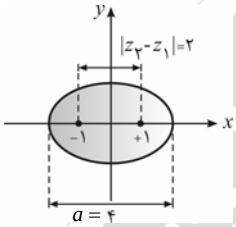
شرایط قضیه گرین فراهم بوده و داریم:




$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D\left(۲xy\cos(y^۲)+۳-۲xy\cos(y^۲)+۲y\right)dx\,dy$$

$$=\iint_D(۳+\underbrace{۲y}_{\substack{\text{تابع فرد}\\ \text{در بازه متقارن}}})\,dx\,dy=\iint_D ۳\,dx\,dy=۳\,(\text{مساحت ذوزنقه})=\frac{۳}{۲}(۲+۴)=۹$$

**۴۰- (۲)**




معادله $|z-z_۱|+|z-z_۲|=a$، معادلهٔ

الف) بیضی است اگر $|z_۲-z_۱|<a$

ب) پاره‌خط است اگر $|z_۲-z_۱|=a$

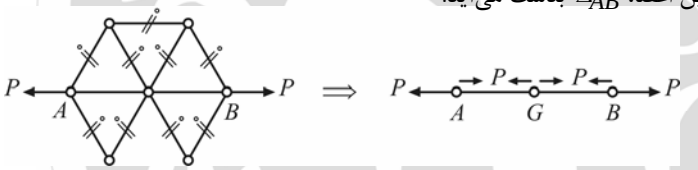
پ) تهی است $|z_۲-z_۱|>a$

در اینجا چون $|-۱-۱|=۲<۴$، پس معادله داده شده یک بیضی است.

## مقاومت مصالح و تحلیل سازه‌ها

**۴۱- (۲)**

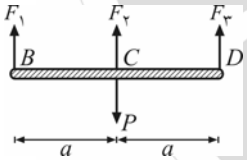
اعضای مشخص شده در شکل زیر، صفر نیرویی می‌باشند. با حذف این اعضا، $\Delta_{AB}$ بدست می‌آید:




$$\Delta_{AB}=\Delta_{AG}+\Delta_{BG}=۲\times\frac{PL}{EA}=\frac{۲PL}{EA}$$

**۴۲- (۴)**

نمودار جسم آزاد عضو صلب را درنظر گرفته، داریم:



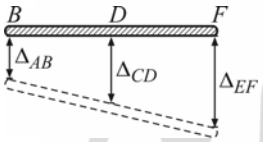

$$\sum M_C=۰\Rightarrow F_۱=F_۳$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\begin{cases}\dfrac{\delta_D}{\delta_B}=\dfrac{\delta_۳}{\delta_۱}=\dfrac{(\frac{FL}{EA})_۳}{(\frac{FL}{EA})_۱}=\dfrac{F_۳}{F_۱}\times\dfrac{A_۱}{A_۳}\\ A_۳=A\ ,\ A_۱=۲A\end{cases}\Rightarrow\frac{\delta_D}{\delta_B}=۱\times\frac{۲A}{A}=۲$$

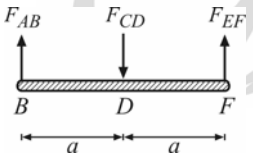
**۴۳- (۴)**

تغییر شکل عضو صلب در اثر گرم شدن میله $CD$، مطابق شکل می‌باشد. بنابراین می‌توان رابطه سازگاری تغییرشکل سازه به‌صورت زیر نوشت:




$$\Delta_{CD}=\frac{\Delta_{AB}+\Delta_{EF}}{۲}$$

همچنین با درنظرگرفتن نمودار جسم آزاد عضو صلب، خواهیم داشت:




$$\sum M_D=۰\Rightarrow F_{EF}=F_{AB}=F$$
$$\sum F_y=۰\Rightarrow F_{CD}=F_{EF}+F_{AB}=۲F$$

با جایگذاری نیروهای بدست آمده در رابطه سازگاری داریم:

$$\begin{cases} \Delta_{CD} = \dfrac{\Delta_{AB} + \Delta_{EF}}{۲} \\ \Delta_{CD} = ۲\alpha\,\Delta TL - \dfrac{۲F_{CD}L}{EA} \\ \Delta_{AB} = \dfrac{F_{AB}L}{EA}\ ,\ \Delta_{EF} = \dfrac{۳F_{EF}L}{EA} \end{cases} \Rightarrow\ ۲\alpha\,\Delta TL - \frac{۴FL}{EA} = \frac{\frac{FL}{EA} + \frac{۳FL}{EA}}{۲} = \frac{۲FL}{EA}\ \Rightarrow\ F = \frac{۱}{۳}\alpha\,\Delta TEA$$

بنابراین تغییرمکان نقطه $D$ (که همان $\Delta_{CD}$ می‌باشد) برابر است با:

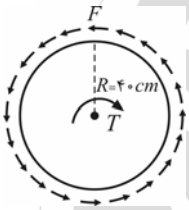
$$\Delta_D = \Delta_{CD} = ۲\alpha\,\Delta TL - \frac{۴FL}{EA} = ۲\alpha\,\Delta TL - ۴\times\left(\frac{۱}{۳}\alpha\,\Delta TEA\right)\times\frac{L}{EA} = \frac{۲}{۳}\alpha\,\Delta TL$$

**۴۴- (۱)**

اگر تنش برشی ایجاد شده در پیچ‌ها را $\tau$ بنامیم، داریم:

$$F_{(\text{نیروی برشی در پیچ‌ها})} = \tau\times A$$

در رابطه فوق، $A$ سطح مقطع پیچ‌ها می‌باشد. بنابراین از تعادل لنگر در محل اتصال (مطابق شکل زیر)، داریم:




$$T = ۲۰FR\ \Rightarrow\ ۲۴\times۱۰^۵ = ۲۰\times\tau\times\frac{\pi\times۲^۲}{۴}\times۴۰\ \Rightarrow\ \tau = ۱۰۰۰\,kg/cm^۲$$

**۴۵- (۱)**

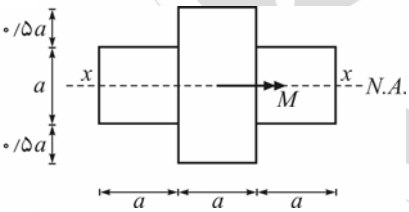
زاویه پیچش اعضای $AB$ و $BC$ در $B$ یکسان است که نتیجه می‌شود این اعضا مانند فنرهای موازی عمل می‌کنند و لنگر پیچشی $T_۰$ به نسبت سختی پیچشی اعضای $AB$ و $BC$ بین آنها توزیع می‌شود. بنابراین برای آنکه $T_۱ = T_۲$ باشد، باید سختی پیچشی این دو عضو باهم برابر باشد.

$$\left(\frac{GJ}{L}\right)_{AB} = \left(\frac{GJ}{L}\right)_{BC}\ \Rightarrow\ \frac{J_{AB}}{a} = \frac{J_{BC}}{b}\ \Rightarrow\ \frac{a}{b} = \frac{J_{AB}}{J_{BC}} = \frac{\frac{\pi R^۴}{۲}}{۰/۱۵a'^۴} = \frac{\frac{\pi R^۴}{۲}}{۰/۱۵\times(R\sqrt{۲})^۴}\ \Rightarrow\ \frac{a}{b} = ۲/۵$$

**۴۶- (۳)**

$$\frac{\sigma_۱}{\sigma_۲} = \frac{\left(\frac{Mc}{I}\right)_۱}{\left(\frac{Mc}{I}\right)_۲} = \frac{c_۱}{c_۲}\times\frac{I_۲}{I_۱}$$

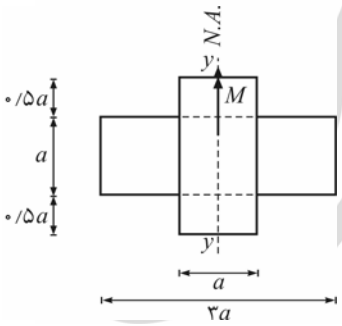
مقادیر $c$ و $I$ را در هر حالت به‌صورت زیر می‌یابیم:




$$c_۱ = ۰/۵a + ۰/۵a = a$$

$$I_۱ = ۲\times\frac{a^۴}{۱۲} + \frac{(۲a)^۳\times a}{۱۲} = \frac{۵}{۶}a^۴$$

برای محاسبه $I$ در حالت ۲ (لنگر حول محور $y$)، مقطع را به‌صورت یک مستطیل با ابعاد $۳a\times a$ و دو مستطیل با ابعاد $a\times۰/۵a$ درنظر گرفته، داریم:




$$c_۲ = \frac{۳a}{۲}$$

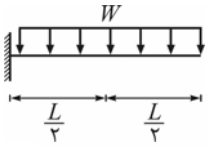
$$I_۲ = ۲\times\frac{a^۳\times۰/۵a}{۱۲} + \frac{(۳a)^۳\times a}{۱۲} = \frac{۷}{۳}a^۴$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_۱}{\sigma_۲} = \frac{a}{\frac{۳}{۲}a}\times\frac{\frac{۷}{۳}a^۴}{\frac{۵}{۶}a^۴} = \frac{۲۸}{۱۵}$$

**۴۷- (۱)**

لنگر خمشی در وسط طول تیرها تحت بار گسترده یکنواخت برابر است با:




$$M_{mid}=\frac{W\left(\frac{L}{۲}\right)^{۲}}{۲}=\frac{WL^{۲}}{۸}$$

اگر ارتفاع مقطع در وسط تیر (۲)، $h_{\circ}$ باشد، ارتفاع مقطع در وسط تیر (۱)، $\frac{h_{\circ}}{۲}$ است. بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma_{max_{۱}}}{\sigma_{max_{۲}}}=\dfrac{\frac{M_{۱}}{S_{۱}}}{\frac{M_{۲}}{S_{۲}}}\\[2ex] M_{۱}=M_{۲}=\dfrac{WL^{۲}}{۸}\end{cases}\Rightarrow\frac{\sigma_{max_{۱}}}{\sigma_{max_{۲}}}=\frac{S_{۲}}{S_{۱}}=\frac{\frac{bh_{\circ}^{۲}}{۶}}{\frac{b\left(\frac{h_{\circ}}{۲}\right)^{۲}}{۶}}=۴$$

**۴۸- (۳)**

در حالت کلی در یک مقطع یکپارچه تحت خمش، لنگر خمشی به نسبت صلبیت خمشی $EI$ بین اجزاء مقطع توزیع می‌شود. با توجه به اینکه مقطع داده شده همگن است، داریم:

$$M_{\text{هاشورخورده}}=M\times\frac{I_{\text{هاشورخورده}}}{I}=M\times\frac{\frac{b\left(\frac{h}{۲}\right)^{۳}}{۱۲}}{\frac{bh^{۳}}{۱۲}}=\frac{M}{۸}$$

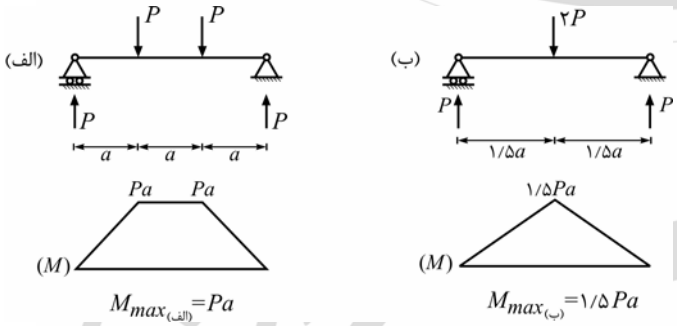
**۴۹- (۲)**

برای آنکه نصف لنگر خمشی توسط المان‌های افقی و نصف دیگر توسط المان‌های قائم تحمل شود، باید ممان اینرسی این المان‌ها باهم برابر باشد. داریم:

$$\begin{cases}I_{\text{افقی}}=I_{\text{قائم}}\\[1ex] I_{\text{افقی}}=۲\times(at_{۱})\times\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}=\dfrac{a^{۳}t_{۱}}{۲}\\[1ex] I_{\text{قائم}}=۲\times\dfrac{a^{۳}t_{۲}}{۱۲}=\dfrac{a^{۳}t_{۲}}{۶}\end{cases}\Rightarrow\frac{a^{۳}t_{۱}}{۲}=\frac{a^{۳}t_{۲}}{۶}\Rightarrow\frac{t_{۲}}{t_{۱}}=۳$$

**۵۰- (۴)**

تنش خمشی ماکزیمم در محل لنگر خمشی ماکزیمم اتفاق می‌افتد. ابتدا با استفاده از نمودار لنگر خمشی تیرها، لنگر خمشی ماکزیمم هریک را می‌یابیم:




بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_{max(\text{ب})}}{\sigma_{max(\text{الف})}}=\frac{\left(\frac{M_{max}\,c}{I}\right)_{(\text{ب})}}{\left(\frac{M_{max}\,c}{I}\right)_{(\text{الف})}}=\frac{۱/۵Pa}{Pa}\times\frac{\frac{a\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{a}{۲}}\times\frac{\frac{a^{۴}}{۱۲}}{\frac{a^{۴}}{۱۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

**۵۱- (۲)**

$$\frac{\tau_A}{\tau_B}=\frac{(\frac{VQ}{It})_A}{(\frac{VQ}{It})_B}=\frac{Q_A}{Q_B}$$

$$\begin{cases}Q_A=at\times 2a=2a^2t\\ Q_B=at\times 2a+2at\times a=4a^2t\end{cases}\Rightarrow \frac{\tau_A}{\tau_B}=\frac{2a^2t}{4a^2t}=\frac{1}{2}$$

**۵۲- (۳)**

جمع نیروی برشی ایجاد شده در دو ورق در راستای قائم باید برابر $V$ شود. از طرفی نیروی ورق‌های مایل با یکدیگر برابر است $(F)$ و داریم:

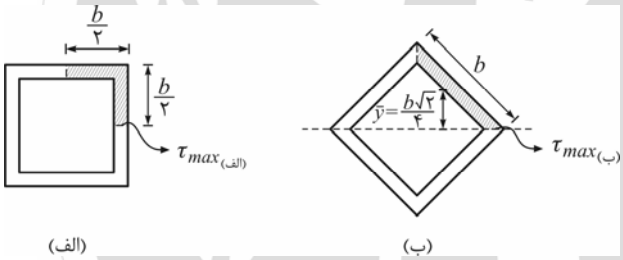
$$2F\cos 45=V \Rightarrow F=\frac{V}{\sqrt{2}}$$

هر یک از ورق‌ها مانند یک مقطع مستطیلی عمل کرده و تنش برشی ماکزیمم ایجاد شده در آنها عبارت است از:

$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{F}{A}=\frac{3}{2}\frac{\frac{V}{\sqrt{2}}}{3\sqrt{2}a\times t}=\frac{V}{4at}$$

**۵۳- (۳)**

در هر دو مقطع تنش برشی ماکزیمم روی محور خنثی اتفاق می‌افتد. داریم:




$$\begin{cases}\frac{\tau_{max\,ب}}{\tau_{max\,الف}}=\frac{(\frac{VQ}{It})_ب}{(\frac{VQ}{It})_{الف}}\\ I_{الف}=I_ب\end{cases}\Rightarrow \frac{\tau_{max\,ب}}{\tau_{max\,الف}}=\frac{Q_ب}{Q_{الف}}$$

$$\begin{cases}Q_{الف}=\frac{b}{2}\times t\times\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\times t\times\frac{b}{4}=\frac{3b^2t}{8}\\ Q_ب=bt\times\frac{b\sqrt{2}}{4}=\frac{b^2t\sqrt{2}}{4}\end{cases}\Rightarrow \frac{\tau_{max\,ب}}{\tau_{max\,الف}}=\frac{\frac{b^2t\sqrt{2}}{4}}{\frac{3b^2t}{8}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

**۵۴- (۱)**

رابطه انحنا با لنگر خمشی در تیر به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases}\kappa(x)=\frac{M(x)}{EI}\\ \kappa(x)=\frac{1}{\rho}=kx\end{cases}\Rightarrow M(x)=k'x$$

بنابراین لنگر خمشی باید به‌صورت خطی در طول تیر افزایش یابد. در بین بارگذاری‌های داده شده، فقط به‌ازاء بار متمرکز در انتهای تیر، این اتفاق می‌افتد.

**۵۵- (۲)**

انرژی ذخیره شده در یک عضو برابر است با:

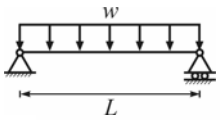
$$U=\frac{1}{2}P\Delta$$

تغییرمکان $(\Delta)$ اعضای $AB$ و $BC$ باهم برابر است. بنابراین برای آنکه انرژی کرنشی ذخیره شده در تیرها باهم برابر باشد، باید بار $P$ به نسبت مساوی بین این اعضا تقسیم شود، لذا باید سختی این اعضا باهم برابر باشد. داریم:

$$(\frac{3EI}{L^3})_{AB}=(\frac{3EI}{L^3})_{BC}\Rightarrow \frac{I_{AB}}{8L^3}=\frac{I_{BC}}{L^3}\Rightarrow I_{AB}=8I_{BC}\Rightarrow \frac{h_{AB}^3\,b}{12}=\frac{8h_{BC}^3\,b}{12}\Rightarrow h_{AB}=2h_{BC}$$

**۵۶- (۴)**

منظور از تیر ساده، تیر دوسرمفصل می‌باشد. بنابراین بارگذاری هریک از تیرها تحت اثر وزنشان به‌صورت زیر است:




$$M_{max}=\frac{wL^{۲}}{۸}\ ,\ w=\gamma A$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_{max_a}}{\sigma_{max_s}}=\frac{(\frac{M_{max}}{S})_a}{(\frac{M_{max}}{S})_s}\xrightarrow{S_a=S_s}\frac{\sigma_{max_a}}{\sigma_{max_s}}=\frac{M_{max_a}}{M_{max_s}}=\frac{\frac{w_a L^{۲}}{۸}}{\frac{w_s L^{۲}}{۸}}=\frac{\gamma_a A}{\gamma_s A}=\frac{۱}{۳}$$

**۵۷- (۲)**

چون عضو قائم صلب است، تغییرمکان انتهای اعضای (۱) و (۲) باهم برابر بوده و این اعضا مانند فنرهای موازی عمل می‌کنند. لذا بار $P$ به نسبت سختی اعضا $(\frac{۳EI}{L^{۳}})$ بین آنها توزیع می‌شود:

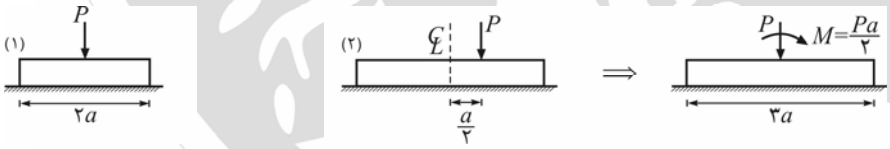
$$P_{۱}=P\times\frac{(\frac{۳EI}{L^{۳}})_{۱}}{(\frac{۳EI}{L^{۳}})_{۱}+(\frac{۳EI}{L^{۳}})_{۲}}=P\times\frac{I_{۱}}{I_{۱}+I_{۲}}\quad,\quad P_{۲}=P\times\frac{I_{۲}}{I_{۱}+I_{۲}}$$

تنش خمشی ماکزیمم در هر میله، در محل لنگر خمشی ماکزیمم (در تکیه‌گاه) ایجاد می‌شود. بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_{max_{۱}}}{\sigma_{max_{۲}}}=\frac{(\frac{M_{max}\,c}{I})_{۱}}{(\frac{M_{max}\,c}{I})_{۲}}=\frac{P_{۱}L}{P_{۲}L}\times\frac{I_{۲}}{I_{۱}}\times\frac{c_{۱}}{c_{۲}}=\frac{P\times\frac{I_{۱}}{I_{۱}+I_{۲}}}{P\times\frac{I_{۲}}{I_{۱}+I_{۲}}}\times\frac{I_{۲}}{I_{۱}}\times\frac{c_{۱}}{c_{۲}}\Rightarrow\frac{\sigma_{max_{۱}}}{\sigma_{max_{۲}}}=\frac{c_{۱}}{c_{۲}}=\frac{\frac{d_{۱}}{۲}}{\frac{d_{۲}}{۲}}\xrightarrow{d_{۱}=۲d_{۲}}\frac{\sigma_{max_{۱}}}{\sigma_{max_{۲}}}=۲$$

**۵۸- (۴)**

در پی دوم، بار $P$ را به مرکز پی منتقل کرده و لنگر $M$ ناشی از انتقال بار را بر پی وارد می‌کنیم. اگر بعد دیگر پی‌ها را $b$ درنظر بگیریم، داریم:




$$\sigma_{max_{۱}}=\frac{P}{A}=\frac{P}{۲ab}\qquad\qquad\sigma_{max_{۲}}=\frac{P}{A}+\frac{M}{S}=\frac{P}{۳ab}+\frac{\frac{Pa}{۲}}{\frac{(۳a)^{۲}\times b}{۶}}=\frac{۲P}{۳ab}$$

لذا نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_{max_{۱}}}{\sigma_{max_{۲}}}=\frac{\frac{P}{۲ab}}{\frac{۲P}{۳ab}}=\frac{۳}{۴}$$

**۵۹- (۳)**

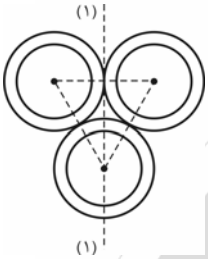
اگر شعاع دایره هاشورخورده را $R'$ بنامیم، داریم:

$$\begin{cases}T'=\frac{T}{۲}\\ T'=T\times\frac{J'}{J}=T\times\frac{\frac{\pi R'^{۴}}{۲}}{\frac{\pi R^{۴}}{۲}}=T\times(\frac{R'}{R})^{۴}\end{cases}\Rightarrow(\frac{R'}{R})^{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow R'=\frac{R}{\sqrt[۴]{۲}}$$

**۶۰- (۱)**

اگر شعاع لوله‌ها را $R$ و ضخامت هریک را $t$ درنظر بگیریم، شعاع ژیراسیون هر لوله به تنهایی برابر است با: $r_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A_1}} = \sqrt{\frac{\pi R^3 t}{2\pi R t}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$

با توجه به اینکه مقطع داده شده، بیش از ۳ محور تقارن دارد، ممان اینرسی حول هر یک از محورهای عبوری از مرکز سطح مقطع، یکسان خواهد بود. ممان اینرسی مقطع را حول محور تقارن قائم مقطع (محور ۱-۱) می یابیم.



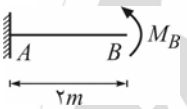

$$I_2 = 2\times\left[\pi R^3 t + 2\pi R t \times R^2\right] + \pi R^3 t = 7\pi R^3 t$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A_2}} = \sqrt{\frac{7\pi R^3 t}{3\times 2\pi R t}} = \sqrt{\frac{7}{6}}R$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{\frac{7}{6}}R}{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

**۶۱- (۲)**

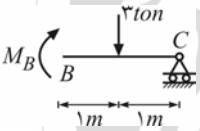
قطعه $AB$ به‌صورت مقابل بارگذاری می‌شود.




$$\Delta_B = \frac{M_B\,(L_{BA})^2}{2EI}$$

از معادلات تعادل در قسمت $BC$ ، $M_B$ به‌دست می‌آید.

توجه شود که به علت وجود مفصل برشی، $V_B$ در هر دو قسمت $AB$ و $BC$ صفر است.




$$\sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; M_B = 3\,ton.m$$

بنابراین $\Delta_B$ برابر است با:

$$\Delta_B = \frac{3\times 2^2}{2\times 10^3}\times 10^3 = 6\,mm$$

**۶۲- (۲)**

**نکته:** جهت تعیین تعداد درجات آزادی انتقالی یک قاب $(n_\Delta)$ می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد: $n_\Delta = 2m + n - p$

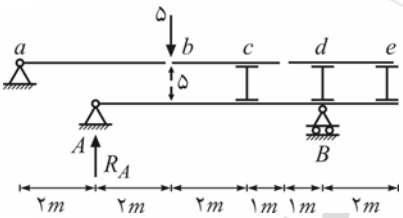
در رابطه فوق داریم:

$m$ : تعداد گره‌های داخلی (غیر تکیه‌گاهی) $n$ : تعداد تغییر مکان‌های تکیه‌گاهی $p$ : تعداد اعضای فاقد تغییر شکل محوری

حال با توجه به رابطه فوق خواهیم داشت: $n_\Delta = 2m + n - p = 2\times 2 + 0 - 3 = 1$

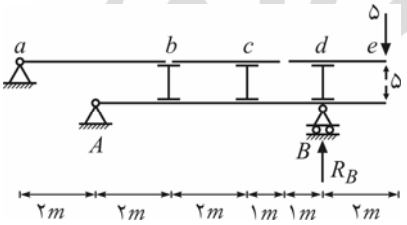
**۶۳- (۴)**

واضح است که برای حداکثر شدن $R_A$، بیشترین بار منتقل شده از طریق تیرهای فرعی، باید در نزدیکی این تکیه‌گاه وارد شود. بنابراین بار $5\,ton$ باید در نقطه $b$ اعمال شود که در این حالت $R_A$ برابر است با:




$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; R_A\times 6 = 5\times 4 \;\Rightarrow\; R_{A_{max}} = \frac{10}{3}\,ton$$

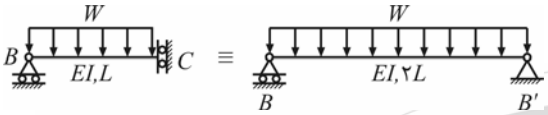
همچنین برای حداکثر شدن $R_B$، باید بار منتقل شده از طریق تیرهای فرعی، در نزدیکی این تکیه‌گاه، بیشترین مقدار را داشته باشد. به علت اثر تشدیدکنندگی قسمت کنسول $(de)$ بار $5\,ton$ را روی $e$ قرار داده، داریم:




$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; R_B\times 6 = 5\times 8 \;\Rightarrow\; R_{B_{max}} = \frac{20}{3}\,ton$$

**۶۴- (۱)**

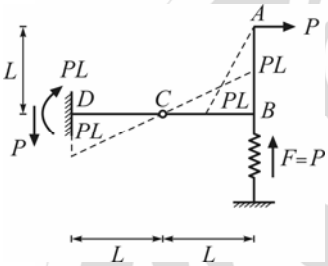
می‌توان $BC$ را به‌صورت زیر درنظر گرفت:




$$\theta_B = \frac{W(۲L)^۳}{۲۴EI} = \frac{WL^۳}{۳EI}$$

**۶۵- (۳)**

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. نمودار لنگر سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی مشابه نمودار لنگر سازه اصلی است که به جای $P$ در آن، نیروی واحد قرار می‌گیرد.




$$ABC: \sum M_C = ۰ \Rightarrow PL = FL \Rightarrow F = P \text{ (فشاری)}$$

$$\text{کل سازه}: \sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{D_y} = P$$

$$DC: \sum M_C = ۰ \Rightarrow M_D = PL$$

$$۱\times \Delta_{A_H} = ۳\left(\frac{A_M\,\bar{m}}{EI}\right) + \frac{Ff}{K} = ۳\times\frac{\left(\frac{۱}{۲}PL^۲\right)\left(\frac{۲L}{۳}\right)}{EI} + \frac{P\times ۱}{\frac{۳EI}{L^۳}} = \frac{۴PL^۳}{۳EI}$$

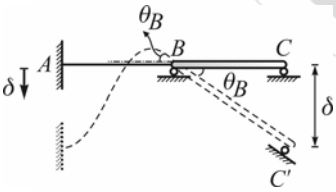
**۶۶- (۴)**

تغییر مکان گره $B$ ناشی از تغییر شکل خمشی تیر $AB$ و نیز دوران گره $A$ (دوران فنر پیچشی) می‌باشد.

$$\begin{cases} \Delta_B = \Delta_{AB_{\text{خمشی}}} + \theta_A \times L_{AB} \\ \Delta_{AB_{\text{خمشی}}} = \dfrac{PL^۳}{۳EI} \\ \theta_A = \dfrac{M_A}{K_A}\ ,\ M_A = PL \Rightarrow \theta_A = \dfrac{PL}{\frac{۲EI}{L}} = \dfrac{PL^۲}{۲EI} \end{cases} \Rightarrow \Delta_B = \frac{PL^۳}{۳EI} + \frac{PL^۲}{۲EI}\times L = \frac{۵PL^۳}{۶EI}$$

**۶۷- (۱)**

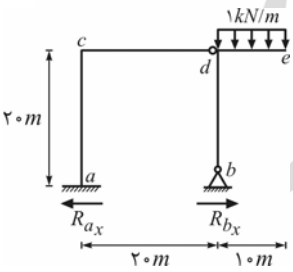
با توجه به تغییرشکل سازه و با استفاده از روابط شیب افت، داریم:




$$\text{از هندسه شکل } (\overset{\Delta}{BCC'}): \theta_B = \frac{\delta}{L}$$

$$M_A = M_{AB} = \frac{۲EI}{L}\left(۲\theta_A + \theta_B - \frac{۳\Delta_{B/A}}{L}\right) = \frac{۲EI}{L}\left(۰ + \frac{\delta}{L} + \frac{۳\delta}{L}\right) = \frac{۸EI\,\delta}{L^۲}$$

**۶۸- (۳)**

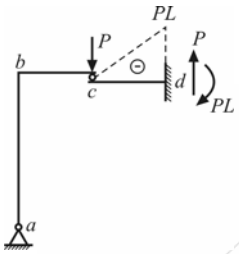



$$bde: \sum M_d = ۰ \Rightarrow R_{b_x}\times ۲۰ = ۱\times\frac{۱۰^۲}{۲} \Rightarrow R_{b_x} = ۲/۵\ kN$$

$$\text{کل سازه}: \sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{a_x} = R_{b_x} = ۲/۵\ kN$$

**۶۹- (۴)**

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. توجه شود که گره $b$ در راستای قائم جابه‌جایی ندارد. بنابراین در سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی، بار واحد را در جهت افقی به $b$ اعمال می‌کنیم.

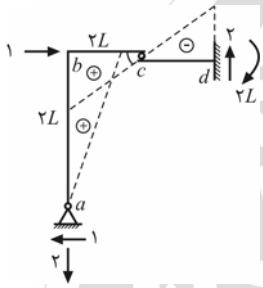


سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی

$$abc:\begin{cases}\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{a_x} = ۰\\ \sum M_c = ۰ \Rightarrow R_{a_y} = ۰\end{cases} \Rightarrow$$ بنابراین لنگر خمشی در کل $abc$ صفر است.

$$\text{کل سازه}: \sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{d_y} = P$$

$$cd: \sum M_c = ۰ \Rightarrow M_d = PL$$



سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

$$abc:\begin{cases}\sum F_x = ۰ \Rightarrow r_{a_x} = ۱\\ \sum M_c = ۰ \Rightarrow r_{a_y} \times L = r_{a_x} \times ۲L = ۱\times ۲L \Rightarrow r_{a_y} = ۲\end{cases}$$

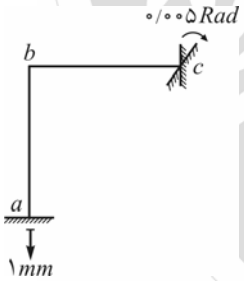
$$\text{کل سازه}: \sum F_y = ۰ \Rightarrow r_{d_y} = r_{a_y} = ۲$$

$$cd: \sum M_c = ۰ \Rightarrow M_d = ۲\times L = ۲L$$

$$۱\times \Delta_{b_H} = \left(\frac{A_M\,\bar{m}}{EI}\right)_{cd} = \frac{\left(\frac{۱}{۲}PL\times L\right)\times\left(\frac{۲}{۳}\times ۲L\right)}{EI} = \frac{۲PL^۳}{۳EI}$$

**۷۰- (۳)**

ابتدا با استفاده از روابط شیب افت، دوران گره $b$ را می‌یابیم. توجه داریم که چون از تغییر شکل‌های محوری صرف‌نظر شده است گره $b$ هیچ جابجایی افقی نخواهد داشت.




$$M_{ba} + M_{bc} = ۰$$

$$\frac{۲EI}{L}\left[۲\theta_b + \theta_a - \frac{۳\Delta_{ba}}{L}\right] + \frac{۲EI}{L}\left[۲\theta_b + \theta_c - \frac{۳\Delta_{bc}}{L}\right] = ۰$$

$$\Rightarrow \left[۲\theta_b + ۰ - \frac{۳\times ۰}{۳}\right] + \left[۲\theta_b + ۰/۰۰۵ + \frac{۳\times ۰/۰۰۱}{۳}\right] = ۰ \Rightarrow \theta_b = -۱/۵\times ۱۰^{-۳}\,rad$$

علامت منفی نشان می‌دهد، $\theta_b$ در خلاف جهت مثبت قراردادی بوده و پادساعتگرد است.

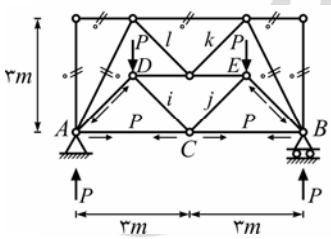
$$M_{cb} = \frac{۲EI}{L}\left[۲\theta_c + \theta_b - \frac{۳\Delta_{bc}}{L}\right] = \frac{۲\times ۱۴۴۰\times ۱۰^۳}{۳}\left[۲\times ۵\times ۱۰^{-۳} + (-۱/۵\times ۱۰^{-۳}) + \frac{۳\times ۰/۰۰۱}{۳}\right] \Rightarrow M_{cb} = ۹۱۲۰\,kg.m$$

**۷۱- (۴)**

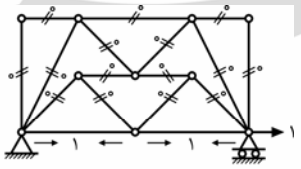
درجه نامعینی سازه را کنترل می‌کنیم.

$$n = m + r - ۲j = ۱۷ + ۳ - ۲\times ۱۰ = ۰$$

چون سازه معین است، افزایش حرارت، هیچ نیرویی در اعضای آن ایجاد نمی‌کند. از روش بار واحد برای تعیین $\Delta_B$ استفاده می‌کنیم. اعضای مورب، $i$ و $j$ و همچنین اعضای $k$ و $l$ قرینه یکدیگر نسبت به محور تقارن سازه بوده و در سازه اصلی و واحد با نوشتن معادله تعادل نیروها در راستای قائم نتیجه می‌شود که این اعضا صفر نیرویی هستند. با نوشتن معادلات تعادل نهایتاً نتیجه می‌شود که به غیر از اعضای واقع بین دو تکیه‌گاه، سایر اعضای سازه واحد صفر نیرویی می‌باشند.



سازه تحت اثر بارگذاری اصلی



سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

از تحلیل سازه اصلی داریم:

$$\sum F_y = ۰ \xrightarrow{\text{باتوجه به تقارن}} R_{A_y} = R_{B_y} = P$$

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{A_x} = ۰$$

$$A \text{ درگره}: \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{DA}\frac{\sqrt{۲}}{۲} = P \Rightarrow F_{DA} = \sqrt{۲}P \ \text{(فشاری)}$$

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{DA}\frac{\sqrt{۲}}{۲} = F_{AC} \Rightarrow F_{AC} = P \ \text{(کششی)}$$

با جایگذاری نیروهای به‌دست آمده در رابطه روش بار واحد، داریم:

$$۱\times\Delta_B = \sum_{n=۱}^{۲}\frac{FfL}{EA} + \sum_{n=۱}^{۲} f\,(\alpha\Delta TL)$$

$$\Delta_B = ۲\times\frac{P\times۱\times۳}{EA} + ۲\times۱\times(\alpha\times۳۰\times۳) = ۱۸۰\,\alpha + \frac{۶P}{EA}$$

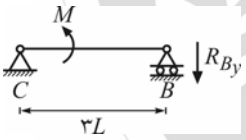
**۷۲- (۱)**

$$M_{AB} = \frac{۲EI}{L_{AB}}\left[۲\theta_A + \theta_B - \frac{۳\Delta_{B/A}}{L}\right]$$

$\Delta_A$ و $\Delta_B$ در رابطه بالا، تغییرمکان $B$ و $A$ در راستای عمود بر محور $AB$ می‌باشند. اما این تغییرمکان‌ها باهم برابر هستند. زیرا در غیر این‌صورت عضو $AB$ دارای تغییرطول محوری خواهد بود که خلاف فرضیات روش شیب افت است. لذا $\Delta_{B/A} = ۰$ بوده و با معلوم بودن $\theta_A$ و $\theta_B$، $M_{AB}$ از رابطه بالا قابل تعیین است.

**۷۳- (۲)**

سازه متقارن و بارگذاری روی آن پادمتقارن است. بنابراین عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه $C$ صفر است. برای محاسبه عکس‌العمل تکیه‌گاه $B$ می‌توان به‌جای تحلیل کل سازه، نیمی از آن (تیر $BC$) را درنظر گرفت:




$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow M = R_{B_y}\times۳L \Rightarrow R_{B_y} = \frac{M}{۳L}$$

**۷۴- (۴)**

باتوجه به فرمول کلی قضیه تقابل کار ماکسول داریم:

$$F_۱\times\Delta_۲\times EI_۲ = M_۲\times\theta_۱\times EI_۱$$

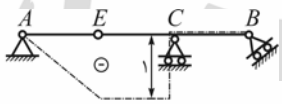
$$-P\times۰/۰۳ = -۲\times۰/۰۲\times\frac{EI_۱}{EI_۲} \xrightarrow[\frac{EI_۱}{EI_۲}=۲]{} P = \frac{۸}{۳}\,ton$$

توجه شود که چون لنگر برحسب تن متر است، تغییر مکان نقطه اثر بار $P$ برحسب متر مورد استفاده قرار گرفته است.

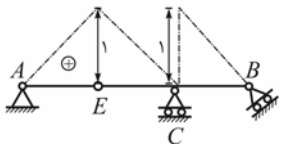
**۷۵- (۲)**

ابتدا عضو $BD$ را مطابق شکل با تکیه‌گاهی در $B$ معادل‌سازی می‌کنیم. برای ترسیم خط تأثیر برش در سمت چپ و راست تکیه‌گاه میانی، یک مفصل برشی مجازی در چپ و راست تکیه‌گاه میانی قرار داده و جابجایی نسبی واحد ایجاد می‌کنیم:

خط تأثیر برش در سمت چپ $C$




خط تأثیر برش در سمت راست $C$



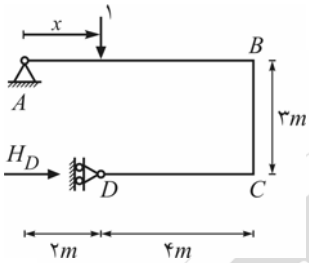
**۷۶- (۱)**

از آنجا که $BC$ و $CD$ تغییر طول محوری نمی‌دهند، $\Delta_C = ۰$ است. بنابراین داریم:

$$\Delta L_{AC} = ۰ \Rightarrow F_{AC} = ۰$$

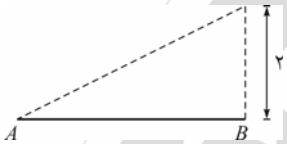
**۷۷- (۳)**

بار واحد را به فاصله $x$ از $A$ قرار می‌دهیم و رابطه $H_D$ را برحسب $x$ می‌یابیم:



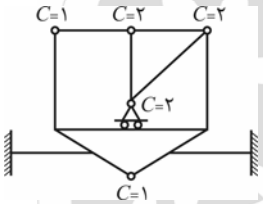

$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow H_D \times ۳ = ۱ \times x \Rightarrow H_D = \frac{x}{۳}$$

معادله بدست آمده، معادله نمودار خط تأثیر $H_D$ می‌باشد که به صورت زیر است.




**۷۸- (۲)**

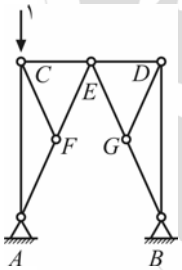
از روش حلقه درجه نامعینی این سازه را می‌یابیم:



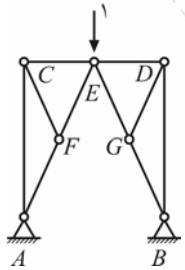

$$n = ۳k + r - (C + ۳) = ۳ \times ۴ + ۶ - (۸ + ۳) = ۷$$

**۷۹- (۱)**

بار واحد را روی گره‌های $C$، $E$ و $D$ قرار داده و $F_{AC}$ را در هر حالت به‌دست می‌آوریم. به این ترتیب نمودار خط تأثیر $F_{AC}$ قابل ترسیم است. (از تعادل نیروها در گرهٔ $F$ در می‌یابیم که عضو $CF$ در هر سه خرپا صفر نیرویی می‌باشد.)

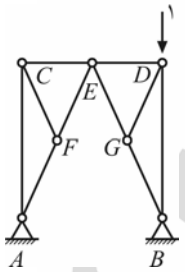



گرهٔ $C$ : $\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{AC} = -۱$ (فشاری است)




گرهٔ $F$ : $\sum F = ۰$ (در راستای عمود بر راستای $AFE$) $\Rightarrow F_{CF} = ۰$

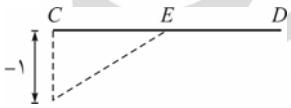
گرهٔ $C$ : $\sum F_x = ۰ \ , \ \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{CE} = F_{AC} = ۰$




گرهٔ $F$ : $\sum F = ۰$ (در راستای عمود بر راستای $AFE$) $\Rightarrow F_{CF} = ۰$

گرهٔ $C$ : $\sum F_x = ۰ \ , \ \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{CE} = F_{AC} = ۰$

و بنابراین خط تأثیر $F_{AC}$ به‌صورت زیر است:

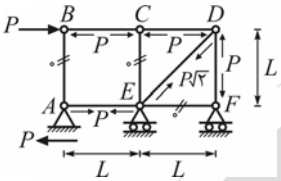


**۸۰- (۳)**

$$n = m + r - ۲j = ۸ + ۴ - ۲\times ۶ = ۰$$

خرپا معین است. بنابراین از روش بار واحد استفاده می‌کنیم.

سازه واحد مشابه سازه اصلی است که به جای $P$ در آن، نیروی واحد قرار می‌گیرد. اعضای صفر نیرویی روی شکل مشخص شده‌اند.




$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{A_x} = P$$

$$A : \sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{AE} = P \text{ (کششی)}$$

$$B , C : \sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{BC} = F_{CD} = P \text{ (فشاری)}$$

$$D : \sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{DE} = \sqrt{۲}\, P \text{ (کششی)}$$

$$D : \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{DF} = P \text{ (فشاری)}$$

$$۱\times \Delta_B = \sum_{k=۱}^{۵} \left(\frac{FfL}{EA}\right)_k$$

$$\Delta_B = ۳\times \frac{(-P)\times(-۱)\,L}{EA} + \frac{P\times ۱\times L}{EA} + \frac{(\sqrt{۲}P)(\sqrt{۲})(\sqrt{۲}L)}{EA} = \frac{۲PL}{EA}(۲+\sqrt{۲})$$

## مکانیک خاک

**۸۱- (۲)**

مقاومت برشی خاک طبق رابطه گسیختگی مور - کولمب برابر است با:

$$\tau_f = \sigma'_f \tan\phi' + c'$$

اگر در خاک ماسه‌ای از چسبندگی و در خاک رسی از اصطکاک صرفنظر کنیم، در آن‌صورت خواهیم داشت:

$$\tau_f = \sigma'_f \tan\phi' \quad \text{ماسه} \quad , \quad \tau_f = c' \quad \text{رس}$$

حال اگر فشار همه‌جانبه ۱۰ برابر شود، با افزایش $\sigma'$، مقاومت برشی ماسه افزایش می‌یابد درحالی که مقاومت برشی رس تغییری نخواهد کرد. به عبارت دیگر در این حالت مقاومت ماسه خیلی بیشتر از مقاومت رس خواهد بود.

**۸۲- (۴)**

با استفاده از رابطه مور - کولمب و بکارگیری نتایج آزمایش برش مستقیم خواهیم داشت:

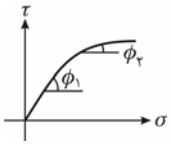
$$\begin{cases} ۰/۸ = ۱\times \tan\phi + c \\ ۱ = ۱/۵ \tan\phi + c \end{cases} \Rightarrow \tan\phi = ۰/۴ \Rightarrow \phi = ۲۲^\circ \quad , \quad c = ۰/۴\ kg/cm^۲$$

پارامترهای مقاومت برشی بالا برای خاک موردنظر، با پارامترهای به‌دست آمده از یک آزمایش تک‌محوری برروی این خاک یکی است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\phi_{UU} = ۲۲^\circ \quad , \quad c_{UU} = ۰/۴\, kg/cm^۲$$

$$q_u = ۲c_{UU} \tan\left(۴۵ + \frac{\phi_{UU}}{۲}\right) \Rightarrow q_u = ۲\times ۰/۴\times \tan\left(۴۵ + \frac{۲۲}{۲}\right) = ۰/۸ \tan ۵۶ = ۱/۲\, kg/cm^۲$$

**۸۳- (۳)**




در خاک دانه‌ای متشکل از مخلوط شن و قلوه‌سنگ، با افزایش فشار همه‌جانبه در آزمایش $CD$، زاویه اصطکاک داخلی خاک کاهش می‌یابد $(\phi_۱ > \phi_۲)$ که علت آن سایش و خرد شدن گوشه‌های تیز در فشارهای بالاست.

**۸۴- (۳)**

با استفاده از رابطه گسیختگی المان خاک در حالت تنش مؤثر خواهیم داشت:

$$(\sigma_۱ - u_f) = (\sigma_۳ - u_f)\tan^۲\theta + ۲c'\tan\theta \quad , \quad c' = ۰ \text{ (خاک ماسه‌ای)}$$

و برای دو آزمایش انجام شده، داریم:

$$\begin{cases} (۱۰۰ + ۲۰۰ - u_f) = (۱۰۰ - u_f)\tan^۲\theta + ۰ \\ (۱۵۰ + ۴۰۰ - u_f) = (۱۵۰ - u_f)\tan^۲\theta + ۰ \end{cases}$$

$$(۵۵۰ - ۳۰۰) = (۱۵۰ - ۱۰۰)\tan^۲\theta \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{۵} \Rightarrow \theta = \tan^{-۱}\sqrt{۵}$$

**۸۵- (۲)**

وقوع ترک کششی را بایستی به‌طور جداگانه در هر لایه بررسی کنیم:

۱- می‌خواهیم در لایه بالایی ترک رخ ندهد، بنابراین بایستی با قرار دادن سربار کافی ($q$)، عمق ترک برابر صفر شود.

$$z_{cr}=\frac{۲c'}{\gamma'\sqrt{k_a}}-\frac{q_{min}}{\gamma'}=۰ \;\Rightarrow\; q_{min}=\frac{۲c'}{\sqrt{k_a}}=\frac{۲\times۱۰\sqrt{۳}}{tan\left(۴۵-\frac{۳۰}{۲}\right)}=۶۰\,kN/m^۲$$

۲- حالا می‌خواهیم ببینیم که با وجود این سربار، در لایه پایینی ترک رخ می‌دهد یا نه؟

$$z_{cr}=\frac{۲c'}{\gamma'\sqrt{k_a}}-\frac{q}{\gamma'}=\frac{۲\times۱۶/۸}{۱۰\times tan\left(۴۵-\frac{۱۰}{۲}\right)}-\frac{۶۰+۲\times۱۰}{۱۰}=۴-۸=-۴<۰$$

یعنی ترک رخ نمی‌دهد و سربار $q=۶۰\,kN/m^۲$ کافی بوده است.

**توجه:** در محاسبه $q$ در حالت دوم، وزن (مؤثر) خاک لایه بالایی (۲×۱۰) نیز لحاظ شده است.

**۸۶- (۳)**

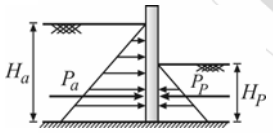
برای به‌دست آوردن ضریب اطمینان شیروانی در برابر لغزش در سطح نشان داده شده به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} FS=\dfrac{\left(\dfrac{W\cos\theta}{A}\right)tan\,\phi+c}{\dfrac{W\sin\theta}{A}} \\ W=\frac{۱}{۲}\gamma H^۲\left(cot\,\theta-cot\,\beta\right)=\frac{۱}{۲}\times(۲۰)(۶^۲)\left(cot\,۳۰-cot\,۶۰\right)=۲۴۰\sqrt{۳}\;kN/m \\ A=\dfrac{H}{\sin\theta}=\dfrac{۶}{\sin۳۰}=۱۲\,m^۲/m \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; FS=\frac{\dfrac{۲۴۰\sqrt{۳}\times\cos۳۰}{۱۲}\times tan\,۳۰+۱۰}{\dfrac{۲۴۰\times\sqrt{۳}\times\sin۳۰}{۱۲}}=۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}=۱/۵۸$$

**۸۷- (۲)**

ابتدا با استفاده از حالت اول رابطه $k_a$ و $k_P$ را به‌دست آورده و سپس برای حالت دوم نسبت رانش مقاوم به محرک را محاسبه می‌کنیم:




$$\begin{cases} P_a=\frac{۱}{۲}\sigma_v\,k_a\,H_a-۲c\,H_a\sqrt{k_a} \\ P_p=\frac{۱}{۲}\sigma_v\,k_p\,H_p+۲c\,H_p\sqrt{k_p} \end{cases}\xrightarrow[c=۰]{\text{(خاک ماسه‌ای)}}\begin{cases} P_a=\frac{۱}{۲}\gamma H_a^۲k_a \\ P_p=\frac{۱}{۲}\gamma H_p^۲k_p \end{cases}$$

طبق صورت مسئله در حالت اول داریم:

$$P_a=P_p\;,\;H_a=۲H_p\;\rightarrow\;\frac{۱}{۲}\gamma(۲H_p)^۲k_a=\frac{۱}{۲}\gamma H_p^۲k_p\;\rightarrow\;k_p=۴k_a$$

در حالت دوم $H_a=۳H_p$ شده است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{P_p}{P_a}=\frac{\frac{۱}{۲}\gamma(H_p)^۲\times(۴k_a)}{\frac{۱}{۲}\gamma(۳H_p)^۲\times k_a}=\frac{۴}{۹}=۰/۴۴$$

**۸۸- (۳)**

در زهکش‌های قائم آب به‌صورت افقی و در زهکش‌های افقی آب به‌صورت قائم به زهکش وارد شده و از آن طریق خارج می‌شود. چون در خاکها ضریب نفوذپذیری درجهت افقی معمولاً از ضریب نفوذپذیری درجهت قائم بیشتر است، بنابراین آب از طریق زهکش‌های قائم زودتر زهکشی می‌شود. از این‌رو در صورتیکه از زهکش‌های افقی و قائم با فواصل یکسان استفاده شود (مثل این سؤال)، تأثیر زهکش‌های قائم در تسریع عمل تحکیم بیشتر است.

**۸۹- (۴)**

$$\begin{cases}\sigma'_{\circ}=(۱۹-۱۰)\times ۳+(۲۰-۱۰)\times ۲/۵=۵۲\,kN/m^{۲}\\ \sigma'_f=\sigma'_{\circ}+\Delta\sigma' \quad , \quad \Delta\sigma'=۲۶\,kN/m^{۲} \;\Rightarrow\; \sigma'_f=۵۲+۲۶=۷۸\,kN/m^{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\; \Delta H=\frac{H_{\circ}}{۱+e_{\circ}}C_c\log\left(\frac{\sigma'_f}{\sigma'_{\circ}}\right)=\frac{۵۰۰\times ۰/۲۱}{۱+۱/۱}\log\left(\frac{۷۸}{۵۲}\right)=۵۰\log ۱/۵=۱۰\,cm$$

$$U=\frac{\Delta H}{\Delta H_{\infty}}=۱-\frac{\Delta u}{\Delta u_{\circ}}\;,\;\Delta u_{\circ}=\Delta\sigma=۲۶\,kN/m^{۲} \;\Rightarrow\; \frac{۵}{۱۰}=۱-\frac{\Delta u}{۲۶} \;\Rightarrow\; \Delta u=۱۳\,kN/m^{۲}$$

$\Delta u_m>\Delta u=۱۳\,kN/m^{۲}$ (اضافه فشار آب حفره‌ای در وسط لایه رس)

**۹۰- (۲)**

منظور از فشار مؤثر متوسط، میانگین تنش مؤثر در ابتدا و انتهای تحکیم در وسط لایه رسی است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\sigma'_{\circ}=۲\times ۲+(۲/۲-۱)\times ۱۰=۱۶\,t/m^{۲}\\ \sigma'_f=\sigma'_{\circ}+\Delta\sigma'=۱۶+(۲\times ۴)=۲۴\,t/m^{۲}\end{cases}\Rightarrow P'_{ave}=\frac{\sigma'_{\circ}+\sigma'_f}{۲}=\frac{۱۶+۲۴}{۲}=۲۰\,t/m^{۲}=۲\,kg/cm^{۲}$$

حال با استفاده از نمودار نشان داده شده در صورت سؤال، $C_v$ نظیر $P'_{ave}=۲\,kg/cm^{۲}$ را پیدا می‌کنیم که برابر $۱\times ۱۰^{-۴}\,cm^{۲}/s$ است.

**۹۱- (۲)**

$$\begin{cases}\sigma'_{\circ}=(۱۷/۲-۱۰)\times ۵=۳۶\,kN/m^{۲}\\ \sigma'_c=OCR\times\sigma'_{\circ}=۲\times ۳۶=۷۲\,kN/m^{۲}\\ \sigma'_f=\sigma'_{\circ}+\Delta\sigma'=۳۶+۱۸\times ۴=۱۰۸\,kN/m^{۲}>\sigma'_c\end{cases}$$

چون $\sigma'_f>\sigma'_c$ است، بنابراین در محاسبه نشست تحکیم نهایی از رابطه $\Delta H=\frac{H_{\circ}}{۱+e_{\circ}}\left[C_r\log\left(\frac{\sigma'_c}{\sigma'_{\circ}}\right)+C_c\log\left(\frac{\sigma'_f}{\sigma'_c}\right)\right]$ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta H_{\infty}=\frac{H_{\circ}}{۱+e_{\circ}}\left[C_s\log\left(\frac{\sigma'_c}{\sigma'_{\circ}}\right)+C_c\log\left(\frac{\sigma'_f}{\sigma'_c}\right)\right]=\frac{۱۰}{۱+۰/۷}\left[۰/۰۶\log\left(\frac{۷۲}{۳۶}\right)+۰/۲۵\log\left(\frac{۱۰۸}{۷۲}\right)\right]$$

$$=\frac{۱۰}{۱/۷}(۰/۰۶\log ۲+۰/۲۵\log ۳-۰/۲۵\log ۲)=\frac{۱۰}{۱/۷}(۰/۰۶\times ۰/۳+۰/۲۵\times ۰/۵-۰/۲۵\times ۰/۳)=۰/۴\,m$$

$$\Delta H=U\times\Delta H_{\infty}=۰/۳\times ۰/۴=۰/۱۲\,m=۱۲\,cm$$

**۹۲- (۱)**

نحوهٔ توزیع تنش در زیر پی صلب و همچنین نشست پی صلب زمانی‌که خاک زیر پی دانه‌ای است، به‌صورت زیر است:

توزیع تنش در زیر پی صلب برروی خاک دانه‌ای — نشست پی صلب برروی خاک دانه‌ای

**۹۳- (۳)**

ترسیم شبکه جریان در واقع رسم یک نقاشی است که قواعد و ضوابط مربوط به خود را دارد. اختلاف بار آبی دو طرف سپر یا نفوذپذیری خاک، هیچ‌کدام در رسم این نقاشی تأثیر ندارند و مثل آن است که کاغذ نقاشی را عوض کرده باشیم. اما چارچوب نقاشی برای ما مهم بوده و قطعاً در ترسیم این نقاشی تأثیرگذار است. این چارچوب در واقع همان حدود مرزی و هندسه سؤال است که لایه سنگی کم عمق نیز می‌تواند جزئی از آن باشد.

**۹۴- (۲)**

امتداد جریان عمود بر سطح لایه‌هاست، بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 = \Delta H = h_c \quad , \quad \Delta h_1 = 0/2 h_c \ (\text{طبق صورت سؤال}) \Rightarrow \Delta h_2 = h_c - 0/2 h_c = 0/8 h_c$$

با لحاظ کردن شرط جوشش (۱=جوشش $FS$) در خاک (۲)، داریم:

$$FS_{\text{جوشش}} = \frac{i_{cr}}{i} = 1 \Rightarrow i = i_{cr} \Rightarrow \frac{\Delta h_2}{L_2} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \Rightarrow \frac{0/8 h_c}{40} = \frac{(20-10)}{10} \Rightarrow h_c = 50 cm$$

**۹۵- (۴)**

$$\begin{cases} Q = kiA \\ i = \dfrac{\Delta H}{L} \quad , \quad \Delta H = \Delta h_z + \Delta h_p \quad , \quad \Delta h_p = 0 \Rightarrow i = \dfrac{\Delta h_z}{L} = \sin\alpha \\ A = H\cos\alpha \times 1 = H\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = (k)(\sin\alpha)(H\cos\alpha) = \frac{1}{2} k H \sin 2\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)(4\times 10^{-3})(5)(\sin 20^\circ) = 0/01 \sin 20^\circ \, m^3/s = 10 \sin 20^\circ \, lit/s$$

**۹۶- (۱)**

اگر فرض کنیم محور افقی اندازه همهٔ ذرات خاک را از ریزدانه تا درشت‌دانه نشان دهد، در آن‌صورت می‌توان گفت دانه‌بندی خاک $B$ از خاک $A$ بهتر است زیرا خاک $B$ از تمام اندازه‌های خاک، تقریباً به میزان مساوی در اختیار دارد درحالی که خاک $A$ دارای دانه‌بندی یکنواخت بوده و فاقد ریزدانه است. باتوجه به اینکه در یک توده خاک هرچه دانه‌بندی کیفیت بهتر داشته باشد، تراکم خاک نیز بهتر خواهد بود، ازلحاظ تراکم‌پذیری خاک $B$ شرایط بهتری نسبت به خاک $A$ دارد زیرا کیفیت دانه‌بندی آن بهتر است.

**۹۷- (۱)**

می‌دانیم دوقطبی بودن مولکول آب، هیدراته شدن کاتیون‌ها و شریک شدن اتم هیدروژنِ آب توسط اتمهای اکسیژن روی سطح رسی، عوامل ایجاد آب جذب سطحی در اطراف ذرات رس می‌باشند. بنابراین باتوجه به گزینه‌ها می‌توان نتیجه گرفت که تنها حالت (ج) یعنی گزینه (۱) صحیح است.

**۹۸- (۴)**

رطوبت حد انقباض ($\omega_{SL}$) و تمام رطوبت‌های کمتر از آن چنانچه از مقدارشان کاسته شود نمونه را با کاهش حجم مواجه نمی‌کنند، بنابراین حد انقباض حداکثر رطوبتی است که کاهش آن سبب کاهش حجم نمونه نمی‌شود.

**۹۹- (۱)**

اگر پس از متراکم شدن، حجم هر قسمت برابر $V_1$ و $V_2$ شود و وزن آن‌ها به‌ترتیب $W_1$ و $W_2$ باشد، در آن صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} W_{s_1} = W_{s_2} = W_s \\ \dfrac{\gamma_{d_2}}{\gamma_{d_1}} = \dfrac{0/8\,\gamma_{d\,max}}{\gamma_{d\,max}} = 0/8 \end{cases} \Rightarrow \frac{\dfrac{W_s}{V_2}}{\dfrac{W_s}{V_1}} = 0/8 \Rightarrow V_2 = 1/25 V_1$$

$$\gamma_{d\,\text{کل}} = \frac{W_{s_1} + W_{s_2}}{V_1 + V_2} = \frac{W_s + W_s}{V_1 + 1/25 V_1} = \frac{W_s}{V_1} \times \left(\frac{2}{2/25}\right) = 0/89 \gamma_{d_1} = 0/89 \gamma_{d\,max} \Rightarrow RC = \frac{\gamma_{d\,\text{کل}}}{\gamma_{d\,max}} = 0/89 = 89\%$$

**۱۰۰- (۴)**

با استفاده از رابطه کلی تغییر شکل در محاسبه نشست تحکیم، خواهیم داشت:

$$\Delta H = H_0 \left(\frac{e_0 - e_f}{1 + e_0}\right) = 4 \times \left(\frac{0/6 - 0/57}{1 + 0/6}\right) = 0/075 m = 7/5 cm$$

## مکانیک سیالات

**۱۰۱- (۲)**

اگر نیروهای مقاوم وارد بر وجه‌های بالایی و پایینی صفحه متحرک را به ترتیب $F_1$ و $F_2$ بنامیم، داریم:

$$F = F_1 + F_2 = (\tau_1 + \tau_2) A = \left(\mu \frac{V}{h_1} + \mu \frac{V}{h_2}\right) A = \mu V A \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) = \mu_0 V A \left[\frac{1}{\left(\frac{h}{2}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{h}{2}\right)}\right] = \frac{4 \mu_0 V A}{h}$$

**۱۰۲- (۱)**

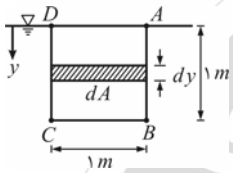
با استفاده از روش مانومتری محاسبه فشار، می‌نویسیم:

$$P_B+\gamma_2\times 0/5-\gamma_1\times 0/2=P_{atm}=0\Rightarrow P_B+10\times 0/5-20\times 0/2=0\Rightarrow P_B=-1kPa$$

**توجه:** فاصله قائم $A$ تا $C$ برابر $20\ cm$ است، زیرا:

$$h_{AC}=50\times\left(\frac{3}{5}\right)-10=20cm$$

**۱۰۳- (۴)**




$$dA=1\times dy=dy$$

$$P=\int_0^y \gamma dy=\int_0^y (10000+1200y)\,dy=10000y+600y^2$$

$$M_{AB}=M_y=\int_0^1 xPdA=\int_0^1 (0/5)(10000y+600y^2)\,dy=2500y^2+100y^3\Big|_0^1=2600\,N.m$$

**توجه:** $x$ فاصله مرکز سطح المان تا محور $AB$ است.

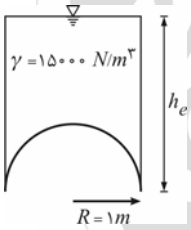
**۱۰۴- (۱)**

در حل این مسئله:

الف) مقدار فشار سیال وارد بر نیمکره را محاسبه می‌کنیم.

ب) با استفاده از روش مایع مجازی نیروی قائم وارد بر نیمکره را به‌دست می‌آوریم.

ج) با نوشتن رابطه تعادل نیروها در راستای قائم، برای نیمکره، مقدار نیروی کششی پیچ‌ها را حساب می‌کنیم.




$$h_e=\frac{P_g}{\gamma}-1/5=\frac{75}{15}-1/5=3/5\ m$$

$$F_V=\gamma V=15\times\left[(\pi\times 1^2\times 3/5)-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3}\pi\times 1^3\right)\right]=127/5\ kN$$

$$\sum F_y=0\ \Rightarrow\ F_V=W+2F_t\ \Rightarrow\ 127/5=4/5+2F_t$$

$$\Rightarrow\ F_t=61/5\ kN$$

**۱۰۵- (۴)**

به نقطه $A$ تنها نیروی افقی وارد می‌شود $(A_y=0)$، بنابراین رابطه تعادل نیروها در راستای قائم به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum F_y=0\ \Rightarrow\ B_y=W-F_V$$

مقدار $F_V$ (وارد بر نیمه $BDC$) با استفاده از روش مایع مجازی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

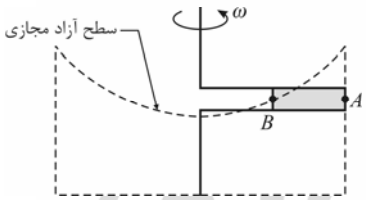
$$F_V=\gamma V=10\times\left[\frac{1}{2}\times(\pi\times 1/5^2\times 4)\right]=135\ kN$$

بنابراین مقدار عکس‌العمل قائم در $B$ ( $B_y$ ) برابر است با:

$$B_y=200-135=65\ kN$$

**۱۰۶- (۳)**

با ترسیم سطح آزاد مجازی آب به هنگام دوران لولهٔ افقی، خواهیم داشت:




همان‌طور که ملاحظه می‌شود نقاط $A$ و $B$ بر روی یک تراز افقی قرار دارند، بنابراین اختلاف فاصله آنها از سطح آزاد مایع که در واقع اختلاف ارتفاع فشاری آن دو نیز می‌باشد، برابر است با:

$$\Delta H_{AB}=\frac{(r_A^2-r_B^2)}{2g}\cdot\omega^2=\frac{(2^2-1^2)\,\omega^2}{2g}=\frac{3\omega^2}{2g}\quad \text{(متر آب)}$$

از آنجایی که فشار نقطهٔ $B$ برابر صفر است، لذا می‌توان نتیجه گرفت که اختلاف فشار دو نقطهٔ $A$ و $B$ همان فشار نقطهٔ $A$ (انتهای لوله بسته) است.

**۱۰۷- (۲)**

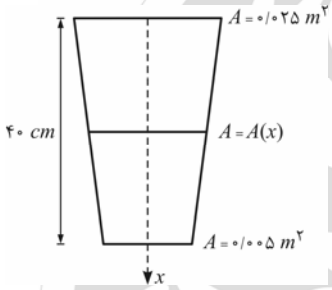
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow W = F_B \Rightarrow \gamma_s . V = \gamma_f . V_d$$

$$\rho_w\, g\,(۲L) + ۲\rho_w\, g\,(L) = \rho_f\, g\,(L + ۲L - x) \Rightarrow \rho_f = \rho_w \left[\frac{۴L}{۳L - x}\right]$$

با توجه به اینکه $x$ (قسمتی از مجموعه که بیرون آب قرار دارد) مقداری مثبت است، نتیجه می‌شود که $\left[\frac{۴L}{۳L - x}\right] > ۱$ است، بنابراین $\rho_f > \rho_w$ خواهد بود.

**۱۰۸- (۳)**

از آنجایی که دبی ثابت است، می‌توان نتیجه گرفت که در یک مقطع مشخص، $\frac{\partial V}{\partial t}$ (شتاب محلی) برابر صفر می‌باشد. در این حالت برای محاسبهٔ شتاب انتقالی $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot V\right)$ نیز می‌توان نوشت:




| | | |
|---|---|---|
| $A = ۰/۰۲۵\ m^۲$ | $A = A(x)$ | $A = ۰/۰۰۵\ m^۲$ |
| ۰ | $x$ | ۰/۴ |

$$\xrightarrow[\text{(درون‌یابی)}]{\text{انترپوله}} \frac{۰/۰۰۵ - ۰/۰۲۵}{۰/۴ - ۰} = \frac{A(x) - ۰/۰۲۵}{x - ۰} \Rightarrow A(x) = ۰/۰۲۵ - ۰/۰۵x$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{Q}{A} = \frac{۰/۰۴}{۰/۰۲۵ - ۰/۰۵x}$$

$$a_{(\text{انتقالی})} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot V = \left[\frac{۰/۰۵ \times ۰/۰۴}{(۰/۰۲۵ - ۰/۰۵x)^۲}\right]\left[\frac{۰/۰۴}{۰/۰۲۵ - ۰/۰۵x}\right] = \frac{۰/۰۰۰۰۸}{(۰/۰۲۵ - ۰/۰۵x)^۳}$$

$$\Rightarrow a_{x = ۰/۱\,(\text{انتقالی})} = \frac{۰/۰۰۰۰۸}{(۰/۰۲۵ - ۰/۰۰۵)^۳} = ۱۰\ m/s^۲$$

**۱۰۹- (۱)**

$$\begin{cases} a = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot V + \frac{\partial V}{\partial t} \xrightarrow[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot V = ۰]{\text{جریان یکنواخت}} a = \frac{dV}{dt} \\ V(t) = \frac{Q(t)}{A} = \frac{۰/۸ + ۰/۰۰۸t}{۰/۸} = ۱ + ۰/۰۱t \end{cases} \Rightarrow a = \frac{dV}{dt} = ۰/۰۱\ m/s^۲$$

**۱۱۰- (۳)**

فرض می‌کنیم وسیله مورد نظر توربین است. در این صورت با توجه به اینکه $H_A > H_B$ است، جریان قطعاً از $A$ به $B$ خواهد بود. با نوشتن معادله برنولی بین نقطه (۱) قبل از وسیله $x$ و نقطه (۲) بعد از وسیله $x$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{P_۱}{\gamma} + \frac{V_۱^۲}{۲g} = \frac{P_۲}{\gamma} + \frac{V_۲^۲}{۲g} + H_T \\ D_۱ = D_۲ \Rightarrow V_۱ = V_۲ \end{cases} \Rightarrow H_T = \frac{P_۱ - P_۲}{\gamma_w}$$

دقت شود که چون دقیقاً قبل و بعد از توربین را در نظر گرفته و معادله برنولی را نوشتیم، هیچ افتی وارد معادله نمی‌شود. $\frac{P_۱ - P_۲}{\gamma_w}$ از رابطه مانومتری محاسبه فشار به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P_۱ + ۰/۰۵\gamma_w - ۰/۰۵ \times ۱۳/۶ \times \gamma_w = P_۲ \Rightarrow \frac{P_۱ - P_۲}{\gamma_w} = ۱۲/۶ \times ۰/۰۵ = ۰/۶۳\ m \Rightarrow H_T = ۰/۶۳$$

حال اگر با قرار دادن $H_T = ۰/۶۳$ ، معادله برنولی بین مخازن $A$ و $B$ برقرار شود ($\Delta H_{(\text{افت})} > ۰$ شود)، نتیجه می‌شود که فرض توربین بودن وسیله $x$ صحیح می‌باشد. حال آنکه اگر $\Delta H_{(\text{افت})} < ۰$ به‌دست بیاید، باید فرض دیگری انجام دهیم.

$$z_A = z_B + H_T + \Delta H \Rightarrow ۱ = ۰/۶۳ + \Delta H \Rightarrow \Delta H\,(\text{افت}) = ۰/۳۷ > ۰$$

چون عدد به‌دست آمده برای افت مثبت شد، بنابراین معادله برنولی برقرار بوده و فرض انجام شده صحیح است. یعنی $x$ توربین بوده و جریان از $A$ به $B$ برقرار است.

**۱۱۱- (۴)**

معادلهٔ مسیر حرکت پرتابه (جت) افقی ($\theta = ۰$) به‌صورت $y = \frac{-g x^{۲}}{۲V_{۰}^{۲}}$ می‌باشد که در آن، $V_{۰}$ سرعت جت خروجی از روزنه برابر است با:

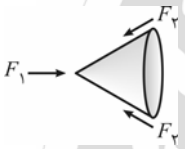
$$V_{۰} = \sqrt{۲gh}$$

با جایگذاری در معادله مسیر حرکت پرتابه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -y_{۱} = \frac{-g x_{۰}^{۲}}{۲(۲gh_{۱})} = -\frac{x_{۰}^{۲}}{۴h_{۱}} \\ -y_{۲} = \frac{-g x_{۰}^{۲}}{۲(۲gh_{۲})} = -\frac{x_{۰}^{۲}}{۴h_{۲}} \end{cases} \Rightarrow \frac{y_{۱}}{y_{۲}} = \frac{h_{۲}}{h_{۱}} \Rightarrow y_{۱}h_{۱} = y_{۲}h_{۲}$$

**۱۱۲- (۲)**

با ترسیم دیاگرام آزاد جسم مخروطی، خواهیم داشت:

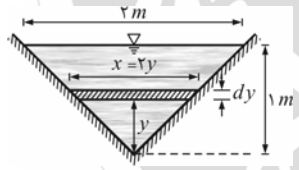



$$F_{۱} = \rho Q_{۱} V = \rho V^{۲} A_{۱} = \rho V^{۲}\left(\frac{\pi}{۴} \times D^{۲}\right) = \frac{۳}{۴}\rho V^{۲} D^{۲}$$

$$F_{۲} = \rho Q_{۲} V = \rho\left(\frac{Q_{۱}}{۲}\right)V = \frac{۱}{۲}\rho V^{۲} A_{۱} = \frac{۱}{۲}\rho V^{۲}\left(\frac{\pi}{۴} \times D^{۲}\right) = \frac{۳}{۸}\rho V^{۲} D^{۲}$$

$$\begin{cases} \sum F_{x} = F_{۱} - ۲F_{۲}\cos ۳۰ = \frac{۳}{۴}\rho V^{۲} D^{۲} - ۲ \times \frac{۳}{۸}\rho V^{۲} D^{۲}\cos ۳۰ = ۰/۱۰۵\ \rho V^{۲} D^{۲} \\ \sum F_{y} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \sum F = \sum F_{x} = ۰/۱۰۵\ \rho V^{۲} D^{۲}$$

**۱۱۳- (۳)**




$$\frac{x}{۲} = \frac{y}{۱} \Rightarrow x = ۲y \Rightarrow dA = ۲y\, dy$$

$$V = \frac{۱}{A}\int v\, dA = \frac{۱}{۱ \times ۱}\int_{۰}^{۱}(ky)(۲y\, dy) = \frac{۲k}{۳}$$

$$\beta = \frac{۱}{A}\int \left(\frac{v}{V}\right)^{۲} dA = \frac{۱}{۱ \times ۱}\int_{۰}^{۱}\left(\frac{ky}{\frac{۲k}{۳}}\right)^{۲}(۲y\, dy) = \frac{۹}{۲}\int_{۰}^{۱} y^{۳} dy = \frac{۹}{۸} = ۱/۱۲۵$$

**۱۱۴- (۱)**

$$\sum F_{y} = ۰ \Rightarrow W = R \ ,\ R = \rho QV\ ,\ W = mg \Rightarrow mg = \rho QV$$

$$۱/۵ \times ۱۰ = (۱۰۰۰)\left(۱۰ \times \frac{\pi \times ۰/۰۳^{۲}}{۴}\right)(V) \Rightarrow V = ۵\ m/s$$

$$V_{۰}^{۲} - V^{۲} = ۲gh \Rightarrow ۱۰^{۲} - ۵^{۲} = ۲ \times ۱۰ \times h \Rightarrow h = ۳/۷۵\ m$$

**۱۱۵- (۴)**

$$\frac{\rho \Delta P}{D^{۲}\omega^{۲}} \equiv M^{۲} L^{-۶}$$

$$\frac{\rho \omega^{۲}}{\Delta P\, D^{۲}} \equiv L^{-۴}$$

$$\frac{\Delta P\, \omega^{۲}}{D^{۲}\rho} \equiv T^{-۴}$$

$$\frac{\Delta P}{D^{۲}\rho\omega^{۲}} \equiv ۱ \Rightarrow$$ بدون بعد $\Rightarrow$ جواب صحیح می‌باشد.

**۱۱۶- (۲)**

الف) $\begin{cases} \text{نیروی اینرسی} = \rho V^{۲} L^{۲} \\ \text{نیروی مقاومت} = R \end{cases} \Rightarrow \pi_{۱} = \dfrac{R}{\rho V^{۲} L^{۲}}$

ب) عدد ماخ $= M = \dfrac{V}{c} = (\dfrac{\rho V^{۲}}{K})^{۰/۵} \Rightarrow \pi_{۲} = \dfrac{K}{\rho V^{۲}}$

ج) عدد رینولدز $= Re = \dfrac{\rho V L}{\mu} \Rightarrow \pi_{۳} = \dfrac{\mu}{\rho V L}$

$$\Rightarrow \frac{R}{\rho V^{۲} L^{۲}} = f\left(\frac{K}{\rho V^{۲}}, \frac{\mu}{\rho V L}\right) \Rightarrow R = \rho V^{۲} L^{۲} f\left(\frac{\mu}{\rho V L}, \frac{K}{\rho V^{۲}}\right)$$

**توجه:** با کنترل گزینه‌ها نیز مشخص می‌شد که گروه‌های بدون بعد در گزینه (۲) قرار گرفته‌اند.

**۱۱۷- (۱)**

با فرض تراکم‌ناپذیری هوا در مدل و نمونه اصلی و به‌کارگیری تشابه رینولدز بین مدل و نمونه طبیعی خواهیم داشت:

$$(Re)_m = (Re)_p \Rightarrow (\frac{\rho V l}{\mu})_m = (\frac{\rho V l}{\mu})_p \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \frac{l_p}{l_m} \Rightarrow V_r = \frac{۱}{L_r} \Rightarrow \frac{V_m}{۱۰} = ۱۰ \Rightarrow V_m = ۱۰۰\ m/s$$

$$F_r = m_r \times a_r \ ,\ m_r = (\frac{\rho_m}{\rho_p}) L_r^{۳} \ ,\ a_r = \frac{V_r^{۲}}{L_r} \Rightarrow F_r = (\frac{\rho_m}{\rho_p}) V_r^{۲} L_r^{۲}$$

با توجه به یکسان بودن سیال در مدل و طبیعت و این که $V_r = \dfrac{۱}{L_r}$ است، می‌توان نوشت:

$$F_r = ۱ \Rightarrow F_m = F_p = ۱۵۴۰\ N$$

**۱۱۸- (۴)**

$$(\frac{\Delta H_T}{L})_{(۱)} = \frac{f}{D} \cdot \frac{V^{۲}}{۲g} \Rightarrow \frac{\Delta H_{T\,(۱)}}{۵۰۰} = ۰/۰۱ \Rightarrow \Delta H_{T\,(۱)} = ۵\ m$$

$$(\frac{\Delta H_T}{L})_{(۲)} = \frac{f}{D} \cdot \frac{V^{۲}}{۲g} \Rightarrow \frac{۲۰}{L_{۲}} = ۰/۰۱ \Rightarrow L_{۲} = ۲۰۰۰\ m$$

برای محاسبه ارتفاع نظیر انرژی پمپ ($h_p$)، خواهیم داشت:

$$h_p = \Delta z + \Delta H = \Delta z + \Delta H_T = ۵۰ + (۵ + ۲۰) = ۷۵\ m$$

**۱۱۹- (۲)**

$$\Delta H_{T\,(AC)} = f\ \frac{L}{D} \cdot \frac{V^{۲}}{۲g} \Rightarrow (۰/۰۲)(\frac{۱۰۰}{۰/۲})(\frac{۳^{۲}}{۲ \times ۱۰}) = ۴/۵\ m$$

$$H_A = H_C + \Delta H_{T\,(AC)} \Rightarrow ۰ + ۰ + ۰ = ۳ + \frac{P_C}{\gamma} + \frac{۳^{۲}}{۲ \times ۱۰} + ۴/۵ \Rightarrow \frac{P_C}{\gamma} = -۷/۹۵\ m$$

**۱۲۰- (۳)**

می‌توان انتظار داشت که چون قطر لولهٔ $AB$ از لوله $AC$ بیشتر است، دبی بیشتر متعلق به این لوله باشد. (توجه کنید که این امر قطعی نیست و فقط فرض است) بنابراین جهت جریان در لوله $BC$ به‌صورت زیر است:

$$Q_{AB} > Q_{AC} \Rightarrow \text{جهت جریان}: B \rightarrow C$$

حال بر اساس فرض مذکور و پیوستگی جریان خواهیم داشت:

$$Q_{AB} + Q_{AC} = ۱ \ ,\ Q_{AB} - Q_{BC} = ۰/۵ \ ,\ Q_{AC} + Q_{BC} = ۰/۵$$

از طرفی می‌دانیم: $\Delta H_{T\,(AC)} = \Delta H_{T\,(AB)} + \Delta H_{T\,(BC)}$ است که با جایگذاری مقادیر آنها از رابطه دارسی ـ ویسباخ، به‌دست می‌آید:

$$\frac{f L Q_{AC}^{۲}}{۱۲/۱ D_{AC}^{۵}} = \frac{f L Q_{AB}^{۲}}{۱۲/۱ D_{AB}^{۵}} + \frac{f L Q_{BC}^{۲}}{۱۲/۱ D_{BC}^{۵}} \Rightarrow \frac{Q_{AC}^{۲}}{D_{AC}^{۵}} = \frac{Q_{BC}^{۲}}{D_{BC}^{۵}} + \frac{Q_{AB}^{۲}}{D_{AB}^{۵}}$$

$$\Rightarrow \frac{(۰/۵ - Q_{BC})^{۲}}{D^{۵}} = \frac{(۰/۵ + Q_{BC})^{۲}}{(۳D)^{۵}} + \frac{Q_{BC}^{۲}}{(۲D)^{۵}} \Rightarrow Q_{BC} = ۰/۴۱\ m^{۳}/s$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود $Q_{BC} > ۰$ است، یعنی فرض ما مبنی بر این که جهت جریان از $B$ به $C$ بوده است، درست می‌باشد.

اگر دانشگاه اصلاح شود، مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

## مجموعه پاسخ‌های تشریحی

# آزمون سراسری سال ۱۳۸۵

## کارشناسی ارشد

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سوالات | از شماره | تا شماره |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | زبان تخصصی | ۲۰ | ۱ | ۲۰ |
| ۲ | ریاضیات | ۲۰ | ۲۱ | ۴۰ |
| ۳ | مکانیک جامدات (مقاومت مصالح ـ تحلیل سازه‌ها) | ۴۰ | ۴۱ | ۸۰ |
| ۴ | مکانیک خاک | ۲۰ | ۸۱ | ۱۰۰ |
| ۵ | مکانیک سیالات | ۲۰ | ۱۰۱ | ۱۲۰ |

"استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد."

## زبان تخصصی

### بخش A : درک مطلب

### متن A1

**تأثیر طراحی بر رفتار :**

سازه‌ای که برای نیروهای افقی زلزلهٔ بسیار بزرگ‌تری نسبت به آنچه معمول است طراحی می‌شود، به دلیل سختی بزرگترش، دوره تناوب لرزش کوتاه‌تری خواهد داشت. دوره تناوب کوتاه‌تر منجر به شتاب‌های طیفی بالاتر می‌گردد، بنابراین سازهٔ صلب‌تر، نیروی افقی بیشتری را می‌تواند جذب نماید. بنابراین، سازه‌ای که برای نیروهای خیلی بزرگ طراحی می‌گردد، لزوماً از سازه‌ای مشابه (که) برمبنای نیروهای کوچکتر (طراحی می‌شود) ایمن‌تر نخواهد بود. با این وجود طراحی برمبنای نیروی بسیار کوچک، سازه را انعطاف‌پذیرتر می‌نماید و تغییر شکل‌های نسبی طبقه را افزایش خواهد داد.

در کل تسلیم ابتدا در طبقه‌ای رخ می‌دهد که در مقایسه با بزرگی نیروهای برشی منتقل شده ضعیف‌ترین است. در بسیاری از موارد این (اتفاق) نزدیک پی سازه خواهد بود. اگر سیستم در اصل کشسان ـ خمیری (الاستوپلاستیک) باشد، نیروهای انتقال یافته در طبقهٔ تسلیم شده نمی‌تواند از برش تسلیم آن طبقه تجاوز نماید. بنابراین، برش‌ها، شتاب‌ها و تغییر شکل‌های نسبی بخشی از سازه (که) بالای طبقهٔ تسلیم شده قرار دارد، در مقایسه با (برش‌ها، شتاب‌ها و تغییر شکل‌های نسبی) یک سازهٔ ارتجاعی که در معرض حرکت پایهٔ مشابه قرار می‌گیرد، کاهش می‌یابد. در نتیجه اگر سازه‌ای برای یک برش پایه‌ای طراحی می‌شود که کمتر از حداکثر مقدار محاسبه شده برای یک سیستم ارتجاعی است، طبقه پایین‌تر تسلیم خواهد شد و برش‌ها در طبقات بالاتر، کاهش خواهند یافت. این بدان معناست که با تمهیدات صحیح جذب انرژی در طبقات پایین‌تر، به طور کلی یک سازه دارای مقاومت کافی خواهد بود، که باعث می‌شود نیروهای برشی طراحی برای طبقات بالاتر با برش پایه طراحی سازگار باشند.

یک تغییر شکل غیر ارتجاعی مهم در یک سازه جلوی حالات بالاتر نوسان را می‌گیرد. بنابراین، تغییر شکل عمده در حالتی است که در آن تغییر شکل غیر ارتجاعی غالب است، که معمولاً حالت بنیادی است.

***براساس متن A1، (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) هرکدام که هر مورد (سؤال) را به بهترین شکل کامل می‌نماید را انتخاب کنید:***

**۱- پیام اصلی متن فوق ..... است.**

۱) طراحی سازه برای نیروهای افقی کوچک
۲) طراحی سازه برای نیروهای افقی بزرگتر
۳) طراحی برای نیروهای برشی و شکل‌پذیری سازگار
۴) طراحی سازه برای نیروهای افقی کوچک (این گزینه تکراری بوده است)

گزینه ۳ صحیح است.

**۲- گسیختگی سازه‌ای در برابر زلزله ابتدا در ..... رخ خواهد داد.**

۱) طبقهٔ اول
۲) فونداسیون
۳) پایین‌ترین طبقه
۴) ضعیف‌ترین طبقه

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

In general, yielding occurs first in the story that is weakest compared with the magnitudes of the shearing forces to be transmitted.

**۳- حالت بنیادی (اصلی) لرزش ..... .**

۱) حاکم بر رفتار ابتدایی سازه است.
۲) دارای دوره تناوب بزرگتری نسبت به حالات بالاتر است.
۳) معروف‌ترین تغییر شکل عمده سازه است.
۴) همه گزینه‌ها

گزینه ۴ صحیح است.

**۴- مترادف کلمهٔ "inhibit" در متن فوق چیست؟**

۱) نمایش دادن
۲) جلوگیری کردن از
۳) افزایش دادن
۴) نشان دادن

گزینه ۲ صحیح است.

### متن A2

**اتصالات نیمه‌صلب در فولاد:**

اتصالات نیمه‌صلب در سازه‌های فولادی بیش از ۵۰ سال است که در فازهای گوناگونی از توسعه بوده‌اند و به نظر می‌رسد که در پایان قرن بیستم در آغاز کاربرد خود قرار داشته باشند.

این عقیده وجود دارد که در طی ۱۰ سال یک انفجار بین‌المللی در استفاده‌های جدید و کاربردهای نوین رویکرد نیمه صلب، به‌وجود خواهد آمد. پس از یک قرن استفاده از فولاد ساختمانی به‌عنوان یک مصالح قاب‌بندی کاربردی طراحان نهایتاً در حال نظر انداختن به نقش اتصالات در چهارچوب‌ها با دید منتقدانه‌تر هستند. در ساختمان‌ها انتظار می‌رفت که اتصالات یا به شکل مفصلی یا صلب عمل نمایند.

در میان این دو نوع (اتصال)، عملکرد نیمه صلب بسیار غیر قابل پیش‌بینی بود و همچنین علی‌رغم امتیازات واضح در کاهش اندازه و وزن در عضو متصل شده، برای انجام تحلیل‌های بیشتر ارزشمند نبود.

امروزه هجوم پیشرفت تکنولوژیکی در حال حذف آن موانع تاریخی است و انعطاف‌پذیری در طراحی اتصال، قریب‌الوقوع به نظر می‌رسد. دلیل آن نیز توسعه فراگیر اطلاعات با مبنای جهانی است که به روشن ساختن و تأمین مدل‌های رفتاری که قابل پیش‌بینی بودن، قابل اعتماد بودن و گزینه‌های اقتصادی را به‌وجود می‌آورند ادامه می‌دهد.

شاید مهم‌ترین نیاز امروز در زمینه تکنولوژیکی اتصالات فولادی (یافتن) راه بهتری برای طبقه‌بندی و نام‌گذاری انواع مختلف اتصال از نظر دامنه کارایی عملی آن‌ها است. هنوز سردرگمی‌هایی از جمله اینکه منظور از اتصالات «نیمه مقید شده»، «ارتجاعی» یا «نیمه صلب» چیست وجود دارد.

به نظر می‌رسد که قبل از اینکه طراحان سازه‌ای شروع به استفاده از چنین اتصالاتی به عنوان بخشی از روند طراحی فولادی بنمایند، نیاز دارند که مجدداً مطمئن گردند که اثری را که این نوع اتصال بر روی عملکرد کل سازه دارد را فهمیده‌اند (یا نه). این (امر) شامل مدل‌های طراحی درک شدهٔ موجودی است که هم قابلیت اعتماد و صرفهٔ اقتصادی از استفاده و هم برخی برآوردهای اقتصادی را از نقطه نظر مهندسی ارزش فراهم می‌آورند.

***براساس متن A2، (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) هرکدام که هر سؤال را به بهترین شکل کامل می‌نماید را انتخاب نمایید:***

**۵- طراحی اتصالات نیمه‌صلب ..... .**

۱) نیاز به مدل‌سازی و تحلیل بیشتر دارد.
۲) تنها گزینه قابل اعتماد و اقتصادی است.
۳) در طی ۱۰ سال آینده مجاز خواهد شد.
۴) هنوز عملی نمی‌باشد.

گزینه ۱ صحیح است.

**۶- در ساختمان‌ها، اتصالات ..... .**

۱) در عملکرد کلی و تعیین اندازه اعضا، مشارکت می‌نمایند.
۲) به این شکل که یا ارتجاعی یا نیمه‌صلب باشند طبقه‌بندی می‌شوند.
۳) بر اساس مهندسیِ ارزش انتخاب می‌شوند.
۴) یا لولایی یا صلب هستند.

براساس عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

In between …… despite obvious benefits of some weight or size reduction in the connected member …

**۷- بهترین معادل برای واژهٔ "imminent" چیست؟**

۱) ایمن
۲) اجباری
۳) غیرممکن
۴) قریب‌الوقوع

گزینه ۴ صحیح است.

**۸- مطلوب‌ترین دانش (آگاهی) در اتصالات چارچوبی ..... است.**

۱) رسیدن به راه‌حل اقتصادی
۲) پیشرفت تکنیک‌های تحلیلی
۳) با اطمینان در بر گرفتن گزینه‌های مختلف
۴) دقیق کردن مدلسازی بعدی و جنبه‌های طبقه‌بندی

گزینه ۴ صحیح است.

Perhaps the most important need today …… is a better way of classifying and labeling the different connection types in terms of the range of their practical performance.

***بخش B: (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) هرکدام که هر سؤال را به بهترین شکل از نظر فنی (تخصصی) کامل می‌نماید را انتخاب نمایید.***

**۹- به یک ماده (مصالح)، شکل‌پذیر گفته می‌شود، اگر بتواند قبل از شکستگی، تغییر شکل‌های بزرگ و ..... را تحمل نماید.**

۱) باقیمانده (مازاد)
۲) موقتی
۳) دائمی (ماندگار)
۴) دینامیکی

گزینه ۳ صحیح است.

**۱۰- اگر ..... به صورت درست برای یک دوره طولانی انجام پذیرد، بتن مستحکم‌تر و مقاوم‌تر در برابر آب حاصل می‌کند.**

۱) ویبره کردن
۲) عمل‌آوری بتن
۳) ماده افزودنی
۴) تقویت کردن (مسلح کردن)

گزینه ۲ صحیح است.

**۱۱- برای بتن بدون حبابت هوای ..... ، تداوم محافت در مقابل یخ‌زدگی دو برابر مدت زمان حداکثر دوام است.**

۱) احاطه شده
۲) وارد شده
۳) ایجاد شده
۴) سرگرم شده

گزینه ۳ صحیح است.

**۱۲- جهت‌هایی که در آن‌ها تنش‌های نرمال حداکثر یا حداقل می‌گردند، ..... نامیده می‌شوند.**

۱) جهت‌های اصلی ۲) جهت‌های موهر ۳) جهت‌های متعامد ۴) جهت‌های اصلی و فرعی

گزینه ۱ صحیح است.

**۱۳- خاک برای پی‌ها می‌تواند توسط ..... تحکیم و یا جایگزینی آن با مصالح انتخابی اصلاح شود تا با خصوصیت دلخواه تطبیق نماید.**

۱) مخلوط‌ها ۲) متراکم کردن ۳) ویبره کردن ۴) اشباع کردن

گزینه ۲ صحیح است.

**۱۴- موج‌های محلی در لنگرگاه ..... را مشکل می‌نمایند، اگر ممکن نباشند.**

۱) پهلوگیری کشتی ۲) کشتیرانی ۳) لنگر انداختن ۴) لنگرگاه

گزینه ۱ صحیح است.

**۱۵- نرخ (سرعت) ..... روسازی‌ها، تابع ترافیکی است که از جاده استفاده می‌نماید.**

۱) خوردگی ۲) جابجایی‌ها ۳) تخریب (فرسودگی) ۴) سایش و پارگی

گزینه ۳ صحیح است.

**۱۶- افزایش مقدار کربن فولاد ..... .**

۱) شکل‌پذیری آن را کاهش می‌دهد. ۲) چگالی‌اش را افزایش می‌دهد.

۳) مقاومتش را کاهش می‌دهد. ۴) قابلیت جوش‌پذیری‌اش را افزایش می‌دهد.

گزینه ۱ صحیح است.

**۱۷- با ..... جان تیر ورق، مقاومتش در برابر کمانش افزایش خواهد یافت.**

۱) عریض کردن ۲) تقویت ۳) سخت کردن ۴) stiffenering

گزینه ۲ صحیح است.

برای تقویت اعضا از صنعت "stiffening" استفاده می‌شود و کلمهٔ "hardening" کاربرد دیگری دارد و گزینه ۴ بی‌معنی می‌باشد.

**۱۸- در فرمول‌بندی (روش) المان محدود، جابه‌جایی‌های دو المان در خط موقعیتشان باید ..... باشد.**

۱) همانند ۲) معادل ۳) سازگار ۴) قابل مقایسه

گزینه ۳ صحیح است.

**۱۹- سیستم‌های ..... عموماً در معرض قیود وابسته به زمان هستند.**

۱) پایدار ۲) ناپایدار ۳) غیر قابل اعتماد ۴) ناپایستار

گزینه ۴ صحیح است.

**۲۰- نظریه حرکت موج در اجسام ارتجاعی یک کاربرد بسیار مهم در ..... دارد.**

۱) ژرفاسنجی کردن ۲) لرزه‌شناسی ۳) ریخت‌شناسی ۴) آزمایش‌های دریایی

گزینه ۲ صحیح است.

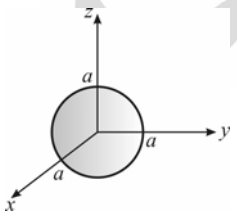
## ریاضیات

**۲۱- (۴)**

سطح $S$ بسته بوده و شرایط قضیه دیورژانس فراهم است. طبق این قضیه داریم:

$$I = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iiint_V div\, \vec{F}\, dv$$

دیورژانس $\vec{F}$ عبارت است از:




$$div\, F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ۱ - ۲ + ۴ = ۳$$

$$\Rightarrow \quad I = \iiint_V ۳\, dv = ۳ \iiint_V dv = ۳\,(\text{حجم کره}) = ۳ \times \frac{۴}{۳}\pi a^۳ = ۴\pi a^۳$$

**۲۲- (۴)**

پاسخ تست ۳۹ سال ۸۴ را ملاحظه نمایید.

**۲۳- (۱)**

$$0 \le t < 2 \;\Rightarrow\; 0 \le t^2 < 4 \;\Rightarrow\; [t^2] = 0, 1, 2, 3$$

بنابراین، تابع تحت انتگرال دارای ضابطه زیر است:

$$\left[t^2\right] = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t < \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} \le t < \sqrt{3} \\ 3 & \sqrt{3} \le t < 2 \end{cases}$$

در نتیجه، انتگرال مورد نظر برابر است با:

$$\int_0^2 \left[t^2\right] dt = \int_0^1 0\, dt + \int_1^{\sqrt{2}} 1\, dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2\, dt + \int_{\sqrt{3}}^{2} 3\, dt = 0 + \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 3\times 2 - 3\sqrt{3} = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

**۲۴- (۲)**

می‌دانیم که طول قوس از رابطه زیر به دست می‌آید: ( $ds$ المان طول قوس است.)

$$l = \int_{A(0,a)}^{B(x_1, y_1)} ds$$

چون رابطه منحنی به صورت $y = P(x)$ است، $ds$ عبارت است از:

$$ds = \sqrt{1 + P'^2(x)}\, dx = \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx = \left|\left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right| dx = \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

$$\Rightarrow\; l = \int_0^{x_1} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^{x_1} = a \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right)$$

**۲۵- (۱)**

برای تعیین شعاع همگرایی، با توجه به آزمون کشی (ریشه) داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \;\Rightarrow\; \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)2^n}} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{R = 2}$$

$$|x - x_0| < R \;\Rightarrow\; |x + 3| < 2 \;\Rightarrow\; -2 < x + 3 < 2 \;\Rightarrow\; -5 < x < -1$$

نقاط مرزی بازه، یعنی $x = -1$ و $x = -5$ باید به طور جداگانه بررسی شوند:

$$x = -1:\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \quad \text{(واگرا)}$$

$$x = -5:\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{همگرا (سری متناوب)}$$

بنابراین، بازه همگرایی $[-5, -1)$ است.

**۲۶- (۳)**

این معادله کامل است، زیرا:

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2xy + 2) = \frac{\partial}{\partial x}(6y^2 - x^2 + 3) = -2x$$

بنابراین، جواب معادله برابر است با:

$$\int M dx + \int N^* dy = C$$

که در آن $N^*$ قسمتی از $N$ است که در آن $x$ نداریم.

$$\Rightarrow \quad \text{جواب معادله}: x^3 - x^2 y + 2x + 2y^3 + 3y = C$$

**۲۷- (۲)**

معادله مشخصه به صورت زیر است:

$$m^{۲}+۴m+۵=۰ \Rightarrow (m+۲)^{۲}+۱=۰ \Rightarrow m=-۲\pm i$$

بنابراین، جواب عمومی دیفرانسیل داده شده عبارت است از:

$$y=e^{-۲x}(c_{۱}\cos x+c_{۲}\sin x)$$

گزینه‌های اول و چهارم منطبق با جواب به دست آمده نیست، و از بین گزینه‌های دوم و سوم تنها گزینه دوم شرایط اولیه را ارضا می‌کند.

**۲۸- (۳)**

این معادله از نوع کشی اویلر بوده و دارای معادله مشخصه زیر است:

$$m(m-۱)+۳m+۵=۰ \Rightarrow m^{۲}+۲m+۵=۰ \Rightarrow (m+۱)^{۲}+۴=۰ \Rightarrow m=-۱\pm ۲i$$

بنابراین، جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y=x^{-۱}\big(c_{۱}\cos(۲\ln x)+c_{۲}\sin(۲\ln x)\big)$$

**۲۹- (۲)**

معادله مشخصه عبارت است از:

$$m^{۴}+۱=۰ \Rightarrow m^{۴}=-۱ \overset{\text{فرم قطبی}}{=\!=\!=} e^{-i(\pi+۲k\pi)} \Rightarrow m=e^{-i(\frac{\pi}{۴}+\frac{k\pi}{۲})}$$

$$\Rightarrow m=\cos\left(\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)-i\sin\left(\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)$$

به‌ازای $k=۰,۱,۲,۳$ داریم:

$$m_{۱}=\cos\frac{\pi}{۴}-i\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}-\frac{i}{\sqrt{۲}}\ ;\ (k=۰)$$

$$m_{۲}=\cos\frac{۳\pi}{۴}-i\sin\frac{۳\pi}{۴}=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}-\frac{i}{\sqrt{۲}}\ ;\ (k=۱)$$

$$m_{۳}=\cos\frac{۵\pi}{۴}-i\sin\frac{۵\pi}{۴}=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}+\frac{i}{\sqrt{۲}}\ ;\ (k=۲)$$

$$m_{۴}=\cos\frac{۷\pi}{۴}-i\sin\frac{۷\pi}{۴}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{i}{\sqrt{۲}}\ ;\ (k=۳)$$

بنابراین، جواب عمومی عبارت است از:

$$y=e^{\frac{x}{\sqrt{۲}}}\left(c_{۱}\cos\frac{x}{\sqrt{۲}}+c_{۲}\sin\frac{x}{\sqrt{۲}}\right)+e^{\frac{-x}{\sqrt{۲}}}\left(c_{۳}\cos\frac{x}{\sqrt{۲}}+c_{۴}\sin\frac{x}{\sqrt{۲}}\right)$$

**۳۰- (۱)**

$x=۰$ نقطه غیرعادی معادله است، با تقسیم طرفین معادله به ضریب $y''$ نتیجه می‌شود:

$$y''+\frac{۱}{۲x}y'+\frac{۱}{۲}y=۰ \Rightarrow P(x)=\frac{۱}{۲x}\ ;\ Q(x)=\frac{۱}{۲}$$

برای بررسی منظم بودن نقطه $x=۰$، داریم:

$$\alpha=\lim_{x\to ۰} x\cdot\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{۲}\ ,\ \beta=\lim_{x\to ۰} x^{۲}\cdot\frac{۱}{۲}=۰$$

بنابراین، معادله مشخصه آن برابر است با:

$$r^{۲}+(\alpha-۱)r+\beta=۰ \Rightarrow r^{۲}-\frac{۱}{۲}r=۰ \Rightarrow r=۰,\frac{۱}{۲}$$

لذا جواب‌های پایه عبارت‌اند از:

$$y_{۱}=x^{\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}a_{n}x^{n}\ ,\ y_{۲}=\sum_{n=۰}^{\infty}b_{n}x^{n}$$

**۳۱- (۴)**

$P = z^{۲} \ , \ Q = ۲y \ , \ R = \lambda x z$

برای استقلال انتگرال فوق از مسیر، باید میدان $\vec{F} = (P \ , Q \ , R)$ پایستار باشد. پس کرل آن باید صفر باشد.

$$\overrightarrow{Curl}\, F = \vec{۰} \ \Rightarrow \ \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^{۲} & ۲y & \lambda x z \end{vmatrix} = ۰\vec{i} - (\lambda z - ۲z)\,\vec{j} + ۰\vec{k} = (۲-\lambda)\,z\,\vec{j} = \vec{۰} \ \Rightarrow \ \lambda = ۲$$

**۳۲- (۳)**

اگر $e^{x}$ و $e^{۲x}$ جواب‌های پایه معادله باشند، نتیجه می‌شود که اولاً معادله از نوع خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت بوده و ثانیاً جواب‌های معادله مشخصه $m = ۱ \, , ۲$ می‌باشد. پس معادله مشخصه باید به صورت زیر باشد:

$$\text{معادله مشخصه}: (m-۱)(m-۲) = ۰ \ \Rightarrow \ m^{۲} - ۳m + ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{معادله دیفرانسیل نظیر}} y'' - ۳y' + ۲y = ۰$$

**۳۳- (۲)**

با توجه به رابطه $\int_{I} \delta(t-a) f(t)\, dt = f(a)$ ($I$ بازه‌ای شامل $x = a$) و تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$L\left\{\delta(t-۱)\cos t\right\} = \int_{۰}^{\infty} e^{-st}\, \delta(t-۱)\cos t \ dt = e^{-s}\cos(۱)$$

**۳۴- (۳)**

$$\int_{۰}^{۱}\int_{x^{۲}}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\, dy\, dx$$

انتگرال فوق را به صورت قطبی بازنویسی می‌کنیم:

$$y = x \ \Rightarrow \ r\sin\theta = r\cos\theta \ \Rightarrow \ \theta = \frac{\pi}{۴}$$

$$y = x^{۲} \ \Rightarrow \ r\sin\theta = r^{۲}\cos^{۲}\theta \ \Rightarrow \ r = \frac{\sin\theta}{\cos^{۲}\theta}$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۰}^{\frac{\sin\theta}{\cos ۲\theta}} \frac{۱}{r}(r\,dr\,d\theta) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin\theta}{\cos^{۲}\theta}\, d\theta = \frac{۱}{\cos\theta}\Bigg|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} = \sqrt{۲} - ۱$$

**۳۵- (۴)**

با توجه به روش جزء به جزء در انتگرال‌گیری داریم:

$$I_n = \int_{۰}^{a} \underbrace{(a^{۲}-x^{۲})^{n}}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} \ \Rightarrow \ \begin{cases} du = -۲nx\,(a^{۲}-x^{۲})^{n-۱} \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ I_n = x\,(a^{۲}-x^{۲})^{n}\Big|_{۰}^{a} + ۲n\int_{۰}^{a} x^{۲}(a^{۲}-x^{۲})^{n-۱}\, dx = -۲n\int_{۰}^{a} (-a^{۲}-x^{۲}+a^{۲})(a^{۲}-x^{۲})^{n-۱}\, dx$$

$$= -۲n\int_{۰}^{a} (a^{۲}-x^{۲})^{n}\, dx + ۲n\,a^{۲}\int_{۰}^{a} (a^{۲}-x^{۲})^{n-۱}\, dx$$

$$\Rightarrow \ I_n = -۲n\,I_n + ۲n\,a^{۲} I_{n-۱} \ \Rightarrow \ (۲n+۱) I_n = ۲n\,a^{۲} I_{n-۱} \ \Rightarrow \ \boxed{I_n = \frac{۲a^{۲}n}{۲n+۱} I_{n-۱}}$$

**۳۶- (۳)**

قید $x^2+y^2=1$ را به صورت پارامتری $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ , $0\le t<2\pi$ نوشته و داریم:

$$f(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{\cos t}{a}+\frac{\sin t}{b} \Rightarrow f(t)=\frac{\cos t}{a}+\frac{\sin t}{b}$$

برای به دست آوردن نقطه اکسترمم از این تابع مشتق گرفته و آن را برابر صفر می‌گیریم:

$$f'(t)=\frac{-\sin t}{a}+\frac{\cos t}{b}=0 \Rightarrow \tan t=\frac{a}{b} \Rightarrow t=\tan^{-1}\frac{a}{b}$$

حال با توجه به آنکه $\tan t=\frac{a}{b}$ نتیجه می‌شود که:

$$\cos^2 t=\frac{1}{1+\tan^2 t}=\frac{1}{1+\frac{a^2}{b^2}}=\frac{b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow \cos t=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

بنابراین، مقدار تابع در این نقطه به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$f(t)=\frac{\cos t}{a}+\frac{\sin t}{b}=\cos t\left(\frac{1}{a}+\frac{\tan t}{b}\right)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}\right)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b^2+a^2}{ab^2}\right)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

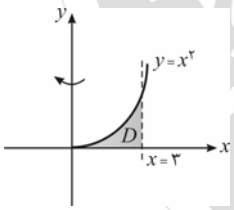
به‌عنوان تمرین این مسأله را از روش لاگرانژ نیز حل کنید.

**۳۷- (۴)**

**روش اول:** با استفاده از روش پوسته خواهیم داشت:

$$V=2\pi\int_0^3 xy\,dx \xrightarrow{y=x^2} V=2\pi\int_0^3 x^3dx=\frac{\pi}{2}x^4\Big|_0^3=\frac{81\pi}{2}$$

**روش دوم:** ناحیه مورد نظر در شکل نشان داده شده است. حجم حاصل از دوران گفته شده عبارت است از:




$$V=\iint_D 2\pi x\,dx\,dy=\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{x^2}2\pi x\,dy\,dx=\int_0^3 2\pi x^3\,dx=2\pi\frac{x^4}{4}\Big|_0^3=\frac{81\pi}{2}$$

**۳۸- (۱)**

اگر از تغییر متغیر $u=\frac{t}{a}$ یا $t=au$ استفاده کنیم، داریم:

$$F(x,a)=\int_0^x\frac{t^p}{(t^2+a^2)^q}dt=\int_0^{\frac{x}{a}}\frac{a^pu^p}{(a^2u^2+a^2)^q}d(au)=a^{p+1-2q}\int_0^{\frac{x}{a}}\frac{u^p}{(u^2+1)^q}du$$

چون $u$ در انتگرال معین فوق متغیری مجازی است، آن را به $t$ تبدیل می‌کنیم:

$$F(x,a)=a^{p+1-2q}\int_0^{\frac{x}{a}}\frac{t^p}{(t^2+1)^q}dt=a^{p+1-2q}F\left(\frac{x}{a},1\right)$$

**۳۹- (۱)**

ابتدا جواب خصوصی را از روش عملگر معکوس می‌یابیم:

$$y''+2y'=4\sin 2x \Rightarrow y_p=\frac{1}{D^2+2D}\{4\sin 2x\}=4\frac{1}{D^2+2D}\{\sin 2x\}$$

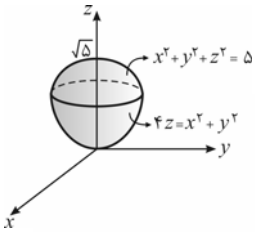
ملاحظه می‌کنیم که ضریب $x$ در آرگومان مقابل سینوس برابر ۲ می‌باشد، بنابراین باید از تبدیل $D^2 \to -2^2$ ($D^2 \to -4$) استفاده کنیم:

$$y_p=4\times\frac{1}{-4+2D}\{\sin 2x\}=2\frac{1}{D-2}\{\sin 2x\}=2(D+2)\frac{1}{D^2-4}\{\sin 2x\}$$

$$=2(D+2)\frac{1}{-4-4}(\sin 2x)=\frac{-1}{4}(2\cos 2x+2\sin 2x)=\frac{-1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$$

این جواب تنها در گزینه اول دیده می‌شود.

**۴۰- (۲)**




$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ x^2+y^2=4z \end{cases} \Rightarrow z^2+4z-5=0 \Rightarrow z=1,-5$$

بنابراین تقاطع دو رویه در صفحه $z=1$ بوده و دایره‌ای به معادله $x^2+y^2=4$ می‌باشد.

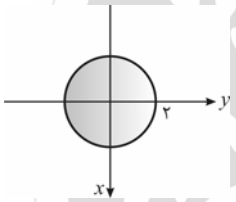
برای محاسبه حجم از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:

از آنجایی که هر خط موازی محور $z$ از سهمی‌گون $z=\frac{r^2}{4}$ وارد و از کره $z=\sqrt{5-r^2}$ خارج می‌شود، داریم:

$$V=\iiint_V dv=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{5-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^2\left(\sqrt{5-r^2}-\frac{r^2}{4}\right)r\,dr=2\pi\left\{\frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}(5-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^4}{16}\right\}\Bigg|_{r=0}^{2}=2\pi\left(\frac{-1}{3}-1+\frac{1}{3}5\sqrt{5}\right)=\frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-4\right)$$

دقت کنید که حدود تغییرات $r$ و $\theta$ با تصویر حجم $V$ روی صفحه $xy$ به راحتی قابل تشخیص است:




$$0\le\theta<2\pi\ ,\ 0\le r\le 2$$

## مقاومت مصالح و تحلیل سازه‌ها

**۴۱- (۲)**

حداکثر کرنش ایجاد شده در سیم باید از کرنش مجاز داده شده کمتر باشد:

$$\varepsilon_{max}\le\varepsilon \Rightarrow \frac{y_{max}}{R}\le\varepsilon \Rightarrow R\ge\frac{y_{max}}{\varepsilon}=\frac{\frac{d}{2}}{\varepsilon}=\frac{d}{2\varepsilon}$$

بنابراین حداقل طول سیم به‌صورت مقابل بدست می‌آید:

$$L=2\pi R \Rightarrow R=\frac{L}{2\pi} \Rightarrow \frac{L}{2\pi}\ge\frac{d}{2\varepsilon} \Rightarrow L\ge\frac{\pi d}{\varepsilon}$$

**۴۲- (۲)**

تغییرمکان وسط عضو$AB$، از دو قسمت تشکیل می‌شود:

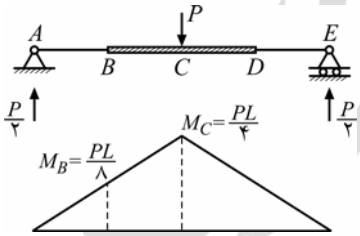
$$\Delta_C=\underbrace{\Delta_{C_1}}_{\text{ناشی از خمش عضو } AB}+\underbrace{\Delta_{C_2}}_{\text{ناشی از تغییرطول فنر}}$$

$$\Delta_{C_1}=\frac{5qL^4}{384EI}=\frac{5\times(600\times10^{-2})\times(400)^4}{384\times2\times10^6\times500}=2\,cm$$

$$\Delta_{C_2}=\frac{1}{2}\Delta_{\text{فنر}} \text{ و } \Delta_{\text{فنر}}=\frac{F_{\text{فنر}}}{k}=\frac{\frac{qL}{2}}{k}=\frac{600\times10^{-2}\times4\times10^2}{2\times2000}=0/6\,cm \Rightarrow \Delta_{C_2}=\frac{1}{2}\times0/6=0/3\,cm \Rightarrow \Delta_C=2+0/3=2/3\,cm$$

**۴۳- (۳)**

نمودار لنگر خمشی تیر به‌صورت مقابل می‌باشد:




نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_{max_C}}{\sigma_{max_B}}=\frac{\frac{M_C}{S_C}}{\frac{M_B}{S_B}}=\frac{M_C}{M_B}\times\frac{S_B}{S_C}=\frac{\frac{PL}{4}}{\frac{PL}{8}}\times\frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{b(2h)^2}{6}}=\frac{1}{2}$$

**۴۴- (۴)**

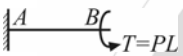
تغییرمکان قائم $C$ از دو قسمت تشکیل می‌شود:

$$\Delta_C = \Delta_{C_1} + \Delta_{C_2}$$

ناشی از خمش عضو $BC$ و $AB$ ← $\Delta_{C_1}$ ، $\Delta_{C_2}$ → ناشی از پیچش در $AB$

$$\Delta_{C_1} = \Delta_{C/B} + \Delta_{B/A} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^3}{3EI} = \frac{2PL^3}{3EI}$$

تیر$AB$ به‌صورت زیر تحت لنگر پیچشی $T = PL$ قرار می‌گیرد. دوران انتهای $B$ برابر است با:




$$\begin{cases} \varphi_B = \dfrac{TL}{GJ} = \dfrac{PL^2}{GJ} \\ J = 2I \ , \ G = \dfrac{E}{2.6} \end{cases} \Rightarrow \varphi_B = \frac{PL^2}{\frac{E}{2.6}\times 2I} = \frac{1.3PL^2}{EI}$$

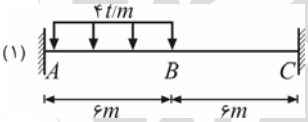
در اثر دوران پیچشی$B$ ، انتهای $C$ به اندازه $\varphi_B L_{BC}$ پایین می‌آید.

$$\Delta_{C_2} = \varphi_B L_{BC} = \frac{1.3PL^3}{EI}$$

$$\Delta_C = \Delta_{C_1} + \Delta_{C_2} = \frac{2PL^3}{3EI} + \frac{1.3PL^3}{EI} = \frac{5.9PL^3}{3EI}$$

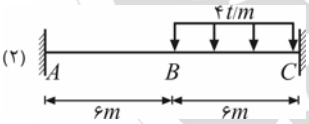
**۴۵- (۱)**

بارگذاری روی تیر مطرح شده به‌صورت زیر است:



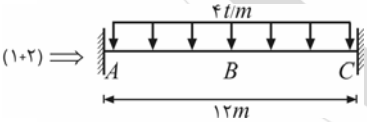

$$M_{B_1} = M$$

لنگر خمشی در وسط تیر مذکور، با لنگر خمشی در وسط تیر زیر برابر است:




$$M_{B_2} = M$$

اکنون با استفاده از اصل جمع آثار قوا داریم:



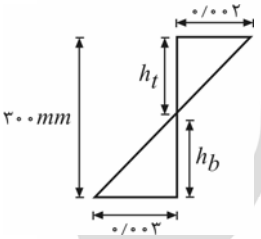

$$M_B = M_{B_1} + M_{B_2} = 2M \Rightarrow M = \frac{M_B}{2}$$

برای یافتن $M_B$ در تیر فوق، با استفاده از راهنمایی سوال داریم:

$$M_B = \frac{qL^2}{24} = \frac{4\times 12^2}{24} = 24t.m \Rightarrow M = \frac{M_B}{2} = 12t.m$$

**۴۶- (۳)**

نمودار توزیع کرنش در مقطع این تیر به‌صورت زیر است. با استفاده از قضیه تالس، داریم:

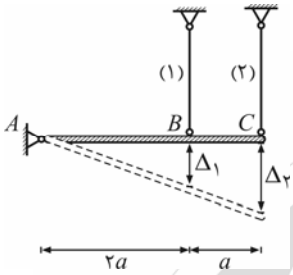



$$\frac{h_t}{300} = \frac{0.002}{0.002 + 0.003} = \frac{2}{5} \Rightarrow h_t = 120mm$$

بنابراین شعاع انحنای مقطع برابر است با:

$$\rho = \frac{h_t}{\varepsilon_t} = \frac{120}{0.002}\times 10^{-3} = 60m$$

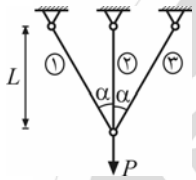
**۴۷- (۳)**




باتوجه به صلب بودن عضو افقی و همچنین با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} = \dfrac{2a}{3a} = \dfrac{2}{3} \\ \Delta_1 = \dfrac{P_1 L}{EA} \ , \ \Delta_2 = \dfrac{P_2 L}{EA} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} = \dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{2}{3}$$

**۴۸- (۱)**




ابتدا وضعیت نیروهای ایجاد شده در میله‌ها را در حضور بار $P$ مشخص می‌کنیم. سختی میله قائم $(K_2)$، برابر $\frac{EA}{L}$ و سختی میله‌های مایل $(K_3, K_1)$ در راستای بار $P$، با توجه به طول آن‌ها $\frac{EA}{L}\cos^3\alpha$ می‌باشد. بنابراین $K_2 > K_1 = K_3$ می‌باشد. از طرفی باتوجه به تقارن، میله‌ها مانند فنرهای موازی عمل کرده و بار $P$ به نسبت سختی هر یک، بین آنها توزیع می‌شود. لذا می‌توان گفت: $F_2 > F_1 = F_3$

نیروی هر ۳ میله در این حالت کششی است. بنابراین برای آنکه نیروی میله‌ها باهم برابر شود، باید در میله (۲) نیروی فشاری و در میله‌های (۱) و (۳) نیروی کششی ایجاد شود.

با کاهش دمای محیط، میله‌ها تمایل به کاهش طول دارند. اما چون سازه هیپراستاتیک (نامعین) است، در مقابل این تغییرطول مقاومت می‌کند. ماهیت سازه هیپراستاتیک به این صورت است که در مقابل تغییر طول‌های بزرگتر، نیروهای مقاوم ایجاد می‌کند. چون طول میله‌های (۱) و (۳) بلندتر از میله (۲) است، لذا باتوجه به رابطه $\Delta = \alpha \Delta T L$، تغییرطول این میله‌ها بیشتر است. بنابراین با ایجاد نیروی کششی، تغییرطول میله‌های مایل کاهش داده می‌شود و در میله (۲) نیز نیروی فشاری ایجاد می‌شود.

**۴۹- (۴)**

باتوجه به تقارن شکل و بارگذاری، عضوصلب باید بدون دوران پایین بیاید. از طرفی چون میله (۲) صلب است، تغییر طولی در آن رخ نمی‌دهد. بنابراین جابجایی قائم عضو صلب افقی، صفر است. داریم:

$$\Delta_1 = \Delta_3 = 0 \ \Rightarrow \ P_1 = P_3 = 0$$
$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow \ P_2 = P$$

**۵۰- (۱)**

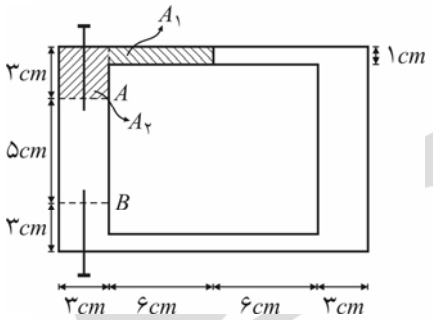
میله‌های $AB$ و $BC$ به صورت فنرهای موازی عمل می‌کنند و لنگر پیچشی $T$ به نسبت سختی پیچشی میله‌ها، بین آنها توزیع می‌شود:

$$T_A = T_{AB} = T \times \frac{(\frac{GJ}{L})_{AB}}{(\frac{GJ}{L})_{AB} + (\frac{GJ}{L})_{BC}} = T \times \frac{\frac{J}{2L}}{\frac{J}{2L} + \frac{4J}{L}} = \frac{T}{9}$$

$$T_C = T - T_A = T - \frac{T}{9} = \frac{8T}{9}$$

**۵۱- (۳)**

$$F = \frac{VQ}{I} e$$



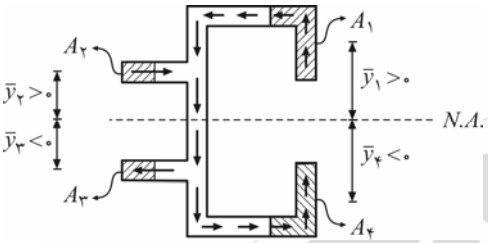

در مقطع داده شده، $Q$ مقطع محل اتصال به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$Q = \sum A_i \bar{y}_i = (6 \times 1 \times 5) + (3 \times 3 \times 4) = 66\, cm^3$$

با جایگذاری $Q$، $e$ و $F$ در رابطه $F = \frac{VQ}{I} e$، حداکثر نیروی برشی مجاز به اعمال مقطع بدست می‌آید:

$$\begin{cases} F = \dfrac{VQ}{I} e \ \Rightarrow \ V = \dfrac{FI}{Qe} \\ F = 1000\, kg \ , \ Q = 66\, cm^3 \ , \ e = 10\, cm \end{cases} \Rightarrow \ V = \frac{1000 I}{66 \times 10} \simeq 1.5 I \ (kg)$$

**۵۲- (۳)**



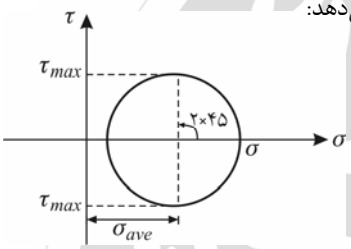

باتوجه به شکل مقابل، مقاطع بالای محورخنثی دارای $\bar{y}$ مثبت برای محاسبه $Q$ می‌باشند. لذا در این قسمت‌ها $Q>0$ بوده و جریان برش از آنها خارج می‌شود. از طرفی مقاطع پایین محور خنثی دارای $\bar{y}$ منفی و $Q<0$ می‌باشند. لذا جریان برش به آنها وارد می‌شود.

جریان برش رسم شده در گزینهٔ (۳) با توضیحات فوق مطابقت دارد.

**۵۳- (۱)**

صفحه با تنش عمودی $\sigma$، یکی از صفحات اصلی است، زیرا تنش برشی روی آن صفر است.

از طرفی می‌دانیم صفحه با تنش برشی ماکزیمم، زاویه $45^\circ$ با صفحه تنش‌های عمودی ماکزیمم تشکیل می‌دهد:



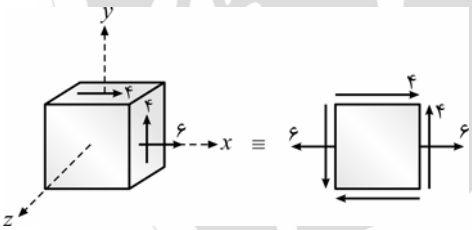

$45^\circ$ در المان $\Rightarrow$ $2\times45^\circ$ در دایره موهر

لذا صفحات $x$ و $y$ داده شده در این المان، صفحات با تنش برشی ماکزیمم در صفحه المان می‌باشند. لذا $\sigma_x$ و $\sigma_y$ برابر $\sigma_{ave}$ می‌باشند. داریم:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=\frac{\sigma_{ave}}{\sigma_{ave}}=1$$

**۵۴- (۲)**

شکل المان به صورت زیر بوده و یکی از تنش‌های اصلی نیز صفر می‌باشد.




$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{6+0}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{6-0}{2}\right)^2+4^2}\Rightarrow\begin{cases}\sigma_1=-2\\ \sigma_2=8\end{cases}$$

مقدار تنش نرمال در صفحه‌ای که تنش برشی بیشینه است، عبارت است از:

$$\sigma_{max}=8\,,\ \sigma_{min}=-2\ \Rightarrow\ \sigma_{ave}=\frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2}=\frac{8+(-2)}{2}=3$$

**۵۵- (۴)**

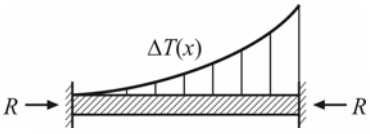
برای آنکه عضو صلب به‌صورت افقی پایین بیاید، باید $W$ به مرکز سختی مجموعه وارد شود. مرکز سختی سازه به‌صورت زیر بدست می‌آید: (مبدأ محور $x$ ها را روی $C$ درنظر می‌گیریم)

$$\bar{x}=\frac{\sum\bar{x}_i K_i}{\sum K_i}$$

$$K_i=\left(\frac{EA}{L}\right)_i\ \Rightarrow\ \begin{cases}K_{AC}=\left(\frac{EA}{L}\right)_{AC}=\frac{1000\times1}{1/5}=\frac{2000}{3}\\ K_{BD}=\left(\frac{EA}{L}\right)_{BD}=\frac{500\times2}{2}=500\end{cases}$$

$$\bar{x}=\frac{0\times\frac{2000}{3}+1\times500}{\frac{2000}{3}+500}=\frac{3}{7}m$$

**۵۶- (۳)**




سازه داده شده نامعین است و در اثر افزایش دما، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی $R$ در دو انتهای آن ایجاد می‌شود. باتوجه به اینکه تغییرطول میله صفر است، داریم:

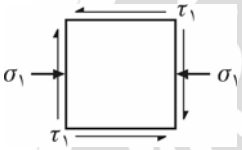
$$\Delta_{\text{میله}}=0 \Rightarrow \int_0^L \alpha\,\Delta T(x)\,dx-\frac{RL}{EA}=0 \Rightarrow \int_0^L \alpha\,\Delta T_0\frac{x^2}{L^2}\,dx=\frac{RL}{EA} \Rightarrow \frac{\alpha\,\Delta T_0 L}{3}=\frac{RL}{EA} \Rightarrow R=\frac{1}{3}\alpha\,\Delta T_0 EA$$

عکس‌العمل $R$، در تمامی طول میله به طور ثابت اعمال می‌شود. بنابراین تنش عمودی ایجاد شده در مقطع میله برابر است با:

$$\sigma=\frac{R}{A}=\frac{1}{3}E\alpha\,\Delta T_0$$

**۵۷- (۱)**

درحالت اول، المان طولی میله در بالای مقطع به‌صورت زیر تحت تنش است:

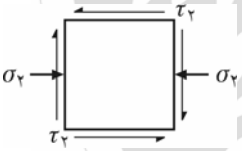



$$\sigma_1=\frac{M_1R}{I}=\frac{\frac{T}{2}R}{\frac{J}{2}}=\frac{TR}{J}$$

$$\tau_1=\frac{T_1R}{J}=\frac{TR}{J}$$

$$\Rightarrow \tau_{max_1}=\sqrt{(\frac{\sigma_1}{2})^2+\tau_1^2}=\sqrt{(\frac{TR}{2J})^2+(\frac{TR}{J})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{TR}{J}$$

درحالت دوم مقادیر $\sigma_2$ و $\tau_2$ در المان طولی میله به‌صورت زیر می‌باشند.




$$\sigma_2=\frac{M_2R}{I}=\frac{2M_1R}{I}=\frac{2\times\frac{T}{2}\times R}{\frac{J}{2}}=\frac{2TR}{J}$$

$$\tau_2=\frac{T_2R}{J}=\frac{\frac{T_1}{2}R}{J}=\frac{TR}{2J}$$

$$\Rightarrow \tau_{max_2}=\sqrt{(\frac{\sigma_2}{2})^2+\tau_2^2}=\sqrt{(\frac{TR}{J})^2+(\frac{TR}{2J})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{TR}{J}$$

ملاحظه می‌شود که مقدار $\tau_{max}$ درحالت‌های اول و دوم برابر است.

**۵۸- (۴)**

$$\begin{cases}\dfrac{\tau_{max_A}}{\tau_{max_B}}=\dfrac{\left(\dfrac{T\times\frac{D}{2}}{J}\right)_A}{\left(\dfrac{T\times\frac{D}{2}}{J}\right)_B}=\dfrac{(\frac{T}{D^3})_A}{(\frac{T}{D^3})_B}=\dfrac{T_A}{T_B}\times(\dfrac{D_B}{D_A})^3 \\ T_A=2T_B=2T\ ,\ D_A=2D_B=2D\end{cases} \Rightarrow \frac{\tau_{max_A}}{\tau_{max_B}}=\frac{2T}{T}\times(\frac{D}{2D})^3=\frac{1}{4}$$

**۵۹- (۲)**

مقطع دایروی: $\tau_1=\dfrac{T\frac{d}{2}}{J}=\dfrac{\frac{Td}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}}=\dfrac{16T}{\pi d^3}$

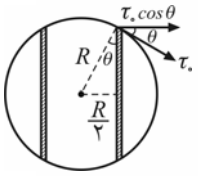
مقطع جدار نازک: $\tau_2=\dfrac{T}{2A_m t_{min}}=\dfrac{T}{2\times 2d^2\times t_{min}}=\dfrac{T}{4d^2 t_{min}}$

از تساوی $\tau_1$ و $\tau_2$، $t$ به‌دست می‌آید:

$$\tau_1=\tau_2 \Rightarrow \frac{16T}{\pi d^3}=\frac{T}{4d^2 t_{min}} \Rightarrow t_{min}=\frac{\pi d}{64}$$

**۶۰- (۴)**

مولفه‌ای از تنش برشی که بر راستای چسب در مقطع عمود است، در چسب تنش برشی ایجاد می‌کند. باتوجه به شکل زیر، داریم:




$$\tau_\circ = \tau_{max} = \frac{TR}{J}$$

$$\sin\theta = \frac{\frac{R}{۲}}{R} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tau_{\text{چسب}} = \tau_\circ \cos\theta = \frac{TR\sqrt{۳}}{۲J}$$

مقدار بدست آمده باید از تنش برشی مجاز چسب کمتر باشد:

$$\frac{TR\sqrt{۳}}{۲J} \le \tau \Rightarrow T_۱ \le \frac{۲J}{R\sqrt{۳}}\tau$$

اگر تنش برشی مجاز چوب را ملاک طراحی در نظر بگیریم، داریم:

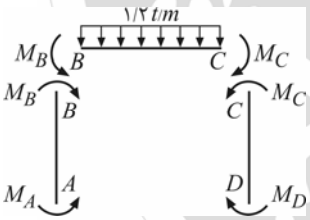
$$\tau_{max} = \tau_\circ \le ۵\tau \Rightarrow \frac{TR}{J} \le ۵\tau \Rightarrow T_۲ \le \frac{۵J}{R}\tau$$

حداکثر کوپل پیچشی $T$ مجاز به اعمال به این مقطع، کمترین مقدار بدست آمده بین $T_۱$ و $T_۲$ می‌باشد:

$$T_{\text{مجاز}} = \min\{T_۱, T_۲\} = \frac{۲J}{R\sqrt{۳}}\tau$$

**۶۱- (۴)**

فرض می‌کنیم لنگر داخلی $M_B$ و $M_C$ در $B$ و $C$ ایجاد شود. قسمت‌های $BC$ ، $BA$ و $CD$ را مطابق شکل زیر به‌صورت جدا از هم در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که سازه و بارگذاری حول محورهای افقی و قائم متقارن است نتیجه می‌شود لنگر خمشی در چهار گوشهٔ $A$ و $B$ و $C$ و $D$ با هم برابر است:



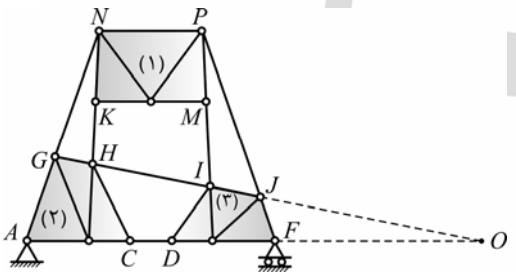

$$M_A = M_B = M_C = M_D = M$$

$\theta_B$ در $BC$ باید با $\theta_B$ در $AB$ برابر باشد. (رابطه سازگاری)

$$\begin{cases} BC: \theta_B = \dfrac{WL_{BC}^۳}{۲۴EI} - \dfrac{ML_{BC}}{۲EI} \\ AB: \theta_B = \dfrac{ML_{AB}}{۲EI} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱/۲\times ۶^۳}{۲۴EI} - \frac{۶M}{۲EI} = \frac{۴M}{۲EI} \Rightarrow M = ۲/۱۶\, ton.m$$

$$\theta_B = \frac{ML_{AB}}{۲EI} = \frac{۲/۱۶\times ۴}{۲EI} = \frac{۴/۳۲}{EI}$$

**۶۲- (۱)**




خرپاهای جزئی مشخص شده در شکل ازنظر داخلی پایدار می‌باشند. این اعضای پایدار را می‌توان مانند ۳ قطعه صلب پایدار درنظر گرفت.

بین هر دو قطعه از این ۳ قطعه صلب، ۲ عضو دو نیرویی موجود است. در محل برخورد اعضای $KH$ و $NG$ ، مفصل موهومی به وجود می‌آید (گره $N$)، همچنین در محل برخورد اعضای $MI$ و $PJ$ نیز مفصل موهومی به‌وجود می‌آید (گره $P$) و مفصل موهومی آخر در محل برخورد اعضای $HI$ و $CD$ (نقطهٔ $O$) به وجود می‌آید. با توجه به این که سه مفصل موهومی $N$ و $P$ و $O$ در یک امتداد واقع نمی‌شوند نتیجه می‌شود که خرپا پایدار است.

$n = m + r - ۲j = ۲۷ + ۳ - ۲\times ۱۵ = ۰ \Rightarrow$ سازه معین است

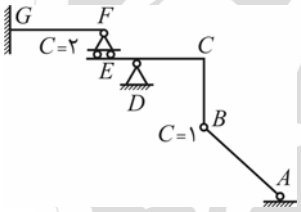
**۶۳- (۳)**

باتوجه به تیرهای مزدوج رسم شده در گزینه‌ها، کافیست تبدیل گره $D$ از تیر اصلی به تیر مزدوج را بررسی کنیم.

در گره $D$ از تیر اصلی، تغییر مکان قائم تیر، برابر $\frac{F_1}{K}$ است که $F_1$ نیروی فنر می‌باشد. بنابراین لنگر خمشی در این نقطه از تیر مزدوج نیز باید برابر $\frac{F_1}{K}$ باشد، لذا تیر مزدوج رسم شده در گزینه ۳ صحیح است.

**۶۴- (۱)**

$GF$ پایدار است. لذا برای باقی مانده سازه مانند زمین به حساب می‌آید و یک قید نیرویی قائم در $E$ به باقی مانده سازه وارد می‌شود. (به عبارت دیگر می‌توان برای $BCDE$ یک تکیه‌گاه غلتکی در $E$ در نظر گرفت) همچنین می‌توان عضو دو نیرویی $AB$ را حذف کرد و برای $BCDE$ یک تکیه‌گاه غلتکی با همان زاویهٔ $AB$، در $B$ قرار داد.




ملاحظه می‌شود که $BCDE$ پایدار داخلی و خارجی می‌باشد. چرا که حداقل تعداد قید لازم خارجی را دارا می‌باشد و این قیدها متقارب و یا موازی نیستند، لذا سازه بدون توجه به امتداد $AB$ پایدار است.

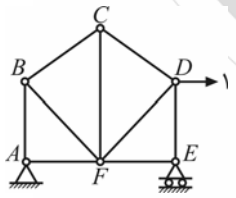
$$n = ۳k + r - (C + ۳) = ۳\times ۰ + ۷ - (۳ + ۳) = ۱ \Rightarrow$$ ۱ درجه نامعین است

**۶۵- (۲)**

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. ابتدا درجهٔ نامعینی سازه را می‌یابیم:

$$n = m + r - ۲j = ۹ + ۳ - ۲\times ۶ = ۰$$

از آنجا که سازه معین است، خطای ساخت هیچ نیروی داخلی در اعضای خرپا ایجاد نمی‌کند. بنابراین کافیست در سازه واحد، نیروی عضو $CF$ را که خطای ساخت دارد، بیابیم.




$$۱\times \Delta_D = f_{CF} \times \Delta_{\text{(خطای ساخت)}}$$

$f_{CF}$ نیروی عضو $CF$ در سازه واحد مطابق شکل فوق است. طبق راهنمایی داده شده در مسأله داریم:

$$P_{\text{(نیروی افقی در } D)} = ۷\,ton \Rightarrow f_{CF} = -۲/۶۲۵\,ton \text{ (فشاری)}$$

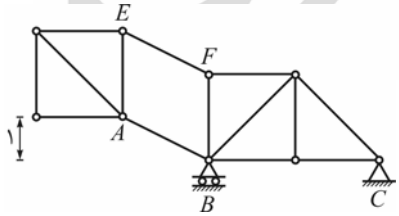
$$P_{\text{(نیروی افقی در } D)} = ۱\,ton \Rightarrow f_{CF} = \frac{۱}{۷}(-۲/۶۲۵) = -۰/۳۷۵ \text{ (فشاری)}$$

چون گفته شده $CF$ کوتاهتر ساخته شده، بنابراین $\Delta_{\text{(خطای ساخت)}}$ باید با علامت منفی لحاظ شود.

$$۱\times \Delta_D = -۰/۳۷۵\times(-۲) = +۰/۷۵\,cm$$

علامت مثبت نشان می‌دهد تغییرمکان افقی $D$ با جهت بار واحد اعمال شده یکسان بوده و به سمت راست می‌باشد.

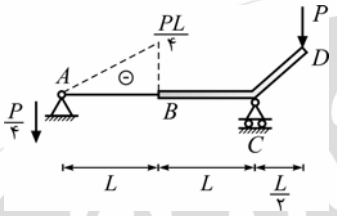
**۶۶- (۳)**



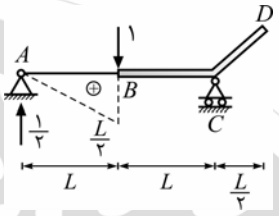

قید تکیه‌گاهی $A$ را حذف می‌کنیم و محل تکیه‌گاه را به میزان واحد به سمت بالا جابجا می‌کنیم. با توجه به این که خرپای واقع در بالای گره‌های $B$ و $C$ پایدار است هیچ‌گونه تغییر شکلی نخواهد داشت و عرض خط تأثیر در قسمت $BC$ برابر صفر است. با جابجایی گره $A$ به میزان واحد به سمت بالا، خرپا به صورت مقابل تغییر شکل می‌دهد که با توجه به آن گزینه سوم صحیح است.

**۶۷- (۱)**

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. توجه شود که چون $BCD$ صلب است، عبارت‌های مربوط به این قطعه در رابطهٔ بار واحد صفر خواهند شد ($EI \to \infty$ در مخرج است)، لذا کافیست نمودار لنگر خمشی برای قسمت $AB$ در دو سازه بدست بیاید.




سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی




سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

$$1\times\Delta_{B_y} = \left(\frac{A_M\,\bar{m}}{EI}\right)_{AB} = \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4}\times L\right)\times\frac{L}{3}}{EI} = -\frac{PL^3}{24EI}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که نقطه $B$ به سمت بالا می‌رود.

**۶۸- (۳)**

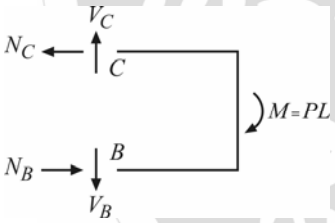
این سوال دقیقاً مشابه تست ۵۷ آزمون سراسری سال ۱۳۸۲ می‌باشد.

**۶۹- (۴)**

این سوال دقیقاً مشابه تست ۴۸ آزمون سراسری سال ۱۳۸۲ می‌باشد.

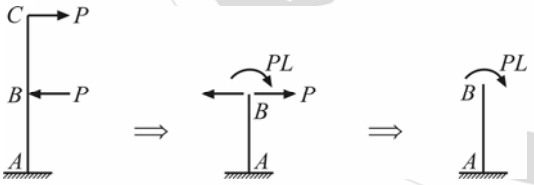
**۷۰- (۲)**

ابتدا قسمت $BC$ را مطابق شکل به‌طور جداگانه درنظر می‌گیریم:




$$\sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; N_B L = PL \;\Rightarrow\; N_B = P$$
$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; N_C = P$$

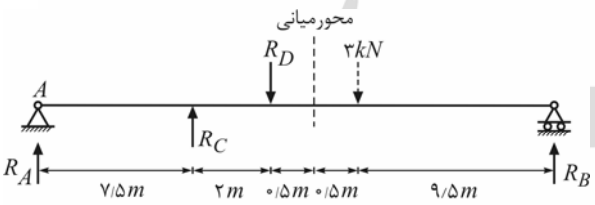
عکس این نیروها به ستون $ABC$ می‌رسد. چون $\Delta_{B_x}$ را می‌خواهیم، می‌توان قسمت $BC$ را که به صورت طره می‌باشد حذف نموده و بار $P$ را از $C$ به $B$ منتقل کنیم و لنگر ناشی از این انتقال را نیز در $B$ لحاظ نماییم.




$$\Delta_B = \frac{(PL)(L^2)}{2EI} = \frac{PL^3}{2EI}$$

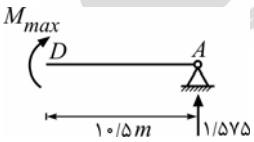
**۷۱- (۲)**

برآیند دو بار $R_C$ و $R_D$ معادل وزن بسته بوده و حداکثر لنگر در تیر هنگامی رخ می‌دهد که محور میانی تیر، بین وزن بسته (برآیند بارگذاری) و $R_D$ قرار گیرد. در این حالت حداکثر لنگر در زیر $R_D$ رخ می‌دهد:




$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; 3\times 10/5 = R_B\times 20 \;\Rightarrow\; R_B = 1/575$$



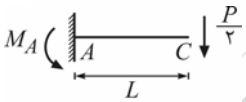



$$M_{max} = 1/575\times 10/5 \simeq 16/5\ kN.m$$

**۷۲- (۳)**

$$\Delta_{C(AC)} = \Delta_{C(BC)}$$

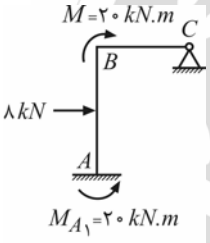
بنابراین $AC$ و $BC$ مانند فنرهای موازی عمل می‌کنند و چون سختی انتقالی آنها $\frac{3EI}{L^3}$ و باهم برابر است، بنابراین نیروی $\frac{P}{2}$ به هریک از دو تیر می‌رسد.




$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = \frac{PL}{2}$$

**۷۳- (۳)**

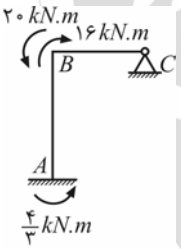
از روش پخش لنگر استفاده نموده و گره $B$ را باز و بسته می‌کنیم. با اعمال لنگر ساعتگرد $M$، دوران گره $B$ را صفر می کنیم. در این صورت عضو$AB$ مانند یک عضو دو سرگیردار عمل می‌کند. سپس با اعمال لنگر $M$ در جهت عکس به همین قاب و با استفاده از اصل جمع آثار قوا، $M_A$ را که مجموع لنگر تکیه‌گاه $A$ در دو سازه به‌دست آمده می‌باشد، به‌دست می‌آوریم.




(بستن $B$)

$$M = \frac{PL}{8} = \frac{8\times 20}{8} = 20\ kN.m$$

$$M_{A_1} = \frac{PL}{8} = 20\ kN.m$$




(بازکردن $B$)

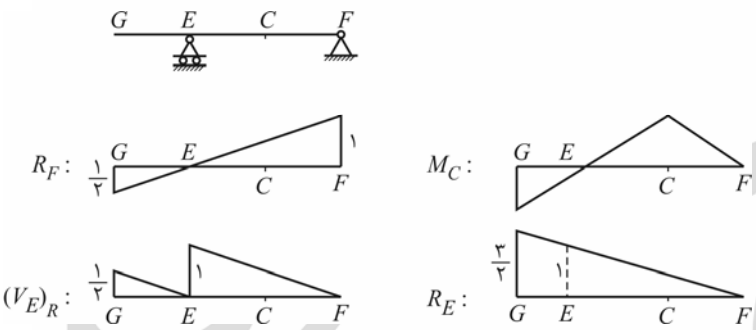
$$M_{BA} = 4\times\frac{4(\frac{EI}{L})_{AB}}{4(\frac{EI}{L})_{AB} + 3(\frac{EI}{L})_{BC}} = 4\times\frac{4\times 3}{4\times 3+3\times 2} = \frac{8}{3}$$

$$M_{A_2} = M_{AB} = M_{BA} \times C.O.F. = \frac{8}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{4}{3}\ kN.m$$

$$M_A = M_{A_1} + M_{A_2} = 20 + \frac{4}{3} = 21.33\ kN.m$$

**۷۴- (۴)**

خط تأثیر رسم شده در گزینهٔ (۴) مربوط به هیچ عاملی در این تیر نمی‌باشد. خطوط تأثیر سایر گزینه‌ها مطابق شکل زیر است. دقت شود که ارتفاع خط تأثیر عکس‌العمل $E$ در انتهای تیر برابر $\frac{3}{2}$ است.




**۷۵- (۴)**

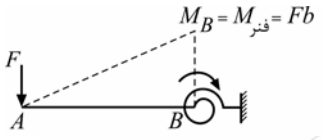
سازه با بارگذاری $P$ را (۱) و سازه با بارگذاری $Q$ را (۲) می‌نامیم. از قضیهٔ دوجانبه ماکسول استفاده می‌کنیم:

$P \times \Delta_{(2)}$ (گره متناظر محل اثر $P$ در سازه (۲)) $= Q \times \Delta_{(1)}$ (گره متناظر محل اثر $Q$ در سازه (۱))

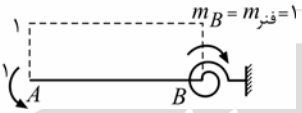
$$P\times(-0.1) = Q\times(-0.3) \Rightarrow P = 3Q$$

**۷۶- (۱)**

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم:




سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی



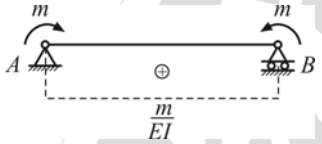

سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

$$۱\times\theta_A = \frac{A_M\,\bar{m}}{EI} + \frac{Mm}{k} = \frac{\frac{۱}{۲}(Fb\times b)\times ۱}{EI} + \frac{Fb\times ۱}{\frac{۸EI}{b}} = \frac{۵Fb^۲}{۸EI}$$

**تذکر:** این سازه ناپایدار می‌باشد و تست غلط است (چرا؟)

**۷۷- (۴)**

برای محاسبه انحراف مماسی $t_{A/B}$ از قضیه دوم لنگر سطح استفاده می‌کنیم:




$$t_{A/B} = \int \frac{M(x)\,dx}{EI}\times\bar{x} = \frac{mL}{EI}\times\frac{L}{۲} = \frac{mL^۲}{۲EI}$$

همچنین می‌دانیم دوران گرهٔ $A$ برابر است با:

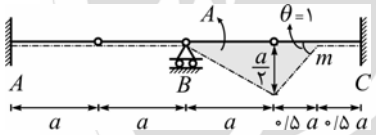
$$\theta_A = \frac{mL}{۲EI}$$

**۷۸- (۱)**

سازه از اعضای خمشی تشکیل شده است. بنابراین اعضا تغییرطول محوری نداشته و جابجایی انتهای $A$ باید در راستای عمود بر هر دو عضو باشد که این امر امکان‌پذیر نیست، لذا نقطه $A$ نمی‌تواند جابجا شود.

**۷۹- (۱)**

ابتدا خط تأثیر لنگر خمشی در این مقطع را رسم می‌کنیم:




بار گسترده متحرک $W$ باید در قسمتی از تیر قرار بگیرد که حداکثر سطح موجود زیر نمودار خط تأثیر را پوشش دهد. با توجه به نمودار خط تأثیر فوق نتیجه می‌شود که از طول $۲/۵\,a$ بایستی طول $۱/۵\,a$ از بار گسترده در فاصله $Bm$ روی سازه اعمال گردد که در این صورت داریم:

$$M_{max_m} = WA = W\times\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳a}{۲}\times\frac{a}{۲}\right) = \frac{۳Wa^۲}{۸}$$

**۸۰- (۲)**

اگر تغییرمکان وسط تیرها (محل اثر $P$) را $\Delta$ بنامیم، می‌توان انرژی کرنشی هر یک از سازه‌ها را به صورت زیر به‌دست آورد:

$$(\text{انرژی})\ U = \frac{۱}{۲}P\Delta$$

بنابراین تغییرمکان محل اثر هرتیری که بیشتر باشد، انرژی ذخیره شده در آن نیز بیشتر خواهد بود.

تغییرمکان محل اثر نیرو در تیرها ناشی از تغییر شکل خمشی تیر دوسر مفصل و نیز فشردگی ایجاد شده در فنرهای انتهایی هر تیر می‌باشد. با توجه به این که فنرهای زیر تیر ۲ خیلی نرم هستند و کمترین سختی را دارا می‌باشند نتیجه می‌شود که در تیر ۲ تغییر مکان نقطه اثر بار $P$ ماکزیمم است و در نتیجه در این تیر بیشترین انرژی کرنشی ذخیره می‌شود. برای توضیح کامل مطلب، در ادامه تغییر مکان نقطه اثر بار $P$ در چهار گزینه به دست آمده است:

$$۱:\Delta = \frac{PL^۳}{۴۸EI} + \frac{۱}{۲}\times\left(\frac{\frac{P}{۲}}{K} + ۰\right) = \frac{PL^۳}{۴۸EI} + \frac{P}{۴K}$$

$$۲:\Delta = \frac{PL^۳}{۴۸EI} + \frac{۱}{۲}\times\left(\frac{\frac{P}{۲}}{\frac{K}{۲}} + \frac{\frac{P}{۲}}{\frac{K}{۲}}\right) = \frac{PL^۳}{۴۸EI} + \frac{P}{K}$$

$$۳:\Delta = \frac{PL^۳}{۴۸EI} + \frac{۱}{۲}\times\left(\frac{\frac{P}{۲}}{\frac{K}{۲}} + \frac{\frac{P}{۲}}{K}\right) = \frac{PL^۳}{۴۸EI} + \frac{۳P}{۴K}$$

$$۴:\Delta = \frac{PL^۳}{۴۸EI} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\frac{P}{۲}}{K} + \frac{\frac{P}{۲}}{K}\right) = \frac{PL^۳}{۴۸EI} + \frac{P}{۲K}$$

$$\Delta_۲ > \Delta_۳ > \Delta_۴ > \Delta_۱ \Rightarrow U_۲ > U_۳ > U_۴ > U_۱$$

## مکانیک خاک

**۸۱- (۳)**

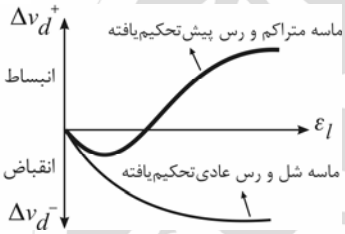
چون پایداری کوتاه‌مدت شیروانی مدنظر است، بنابراین $\tau_f = c_u$ خواهد بود. در این حالت با نوشتن رابطهٔ ضریب اطمینان خواهیم داشت:

$$FS = \frac{\tau_f RL}{Wd} = \frac{c_u RL}{Wd} = \frac{(۶۰)(۱۵)(۲۰)}{(۲۰\times۱۰۰)(۵)} = ۱/۸$$

**۸۲- (۲)**

در آزمایش $CD$ به هنگام اعمال تنش انحرافی، $\Delta u_d = ۰$ است، بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست می‌باشند. از طرفی در ابتدای مرحله دوم آزمایش $CD$ هیچگاه با افزایش حجم مواجه نمی‌شویم، بنابراین گزینه (۱) نیز نادرست است.

صحت گزینه باقی‌مانده یعنی گزینه (۲) را می‌توانید در نمودار شکل زیر ملاحظه کنید.



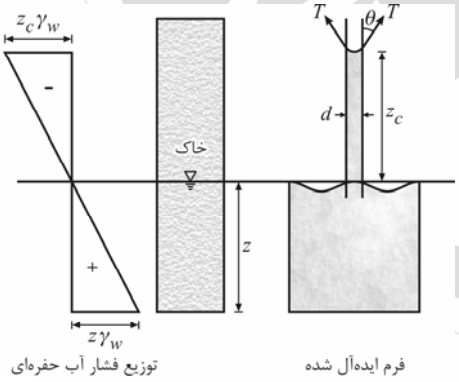

**۸۳- (۴)**

امتداد جریان به موازات سطح لایه‌هاست، بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta h_۱ = \Delta h_۲ \xrightarrow{L_۱=L_۲} \frac{\Delta h_۱}{L_۱} = \frac{\Delta h_۲}{L_۲} \Rightarrow i_۱ = i_۲$$

$$\begin{cases} V_۱ = k_۱ i_۱ \\ V_۲ = k_۲ i_۲ \end{cases} \xrightarrow[k_۱>k_۲]{i_۱=i_۲} V_۱ > V_۲$$

**۸۴- (۴)**



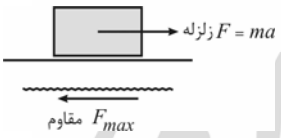

همان‌طور که می‌دانیم صعود مویینگی باعث می‌شود تا:

۱- فشار آب حفره‌ای در ناحیه صعود مویینگی کاهش یابد (از صفر به منفی تبدیل شود) ولی در نواحی زیر آن، فشار آب حفره‌ای تغییر نمی‌کند.

۲- تنش مؤثر در کلیه نواحی شامل ناحیه صعود مویینگی، روی سطح سفرهٔ آب زیرزمینی و زیر سطح سفرهٔ آب زیرزمینی، افزایش یابد.

در این سؤال سطح ($X-X$) زیر سطح سفرهٔ آب زیرزمینی (سطح $A-A$) قرار دارد و با صعود مویینگی، فشار آب حفره‌ای در آن ثابت مانده ولی تنش مؤثر زیاد می‌شود.

**۸۵- (۱)**




باتوجه به اینکه چسبندگی خاک به بتن بیش از چسبندگی خاک به خاک است، بنابراین لغزش در سطحی بین دو لایه خاک محتمل بوده و پارامترهای مقاومت برشی خاک به کار می‌آیند. در این حالت باتوجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال، مقاومت برشی خاک براساس مقاومت برشی زهکشی نشده محاسبه و استفاده می‌شود.

$$\text{زلزله}\ F = ma = \frac{W}{g}\times a = W\left(\frac{a}{g}\right) = W\times K_h = (۲/۵\times۱\times۱\times۱)(۰/۲) = ۰/۵\ ton$$

$$\text{مقاوم}\ F_{max} = \tau_f \times A = c_u \times A = \left(\frac{۱}{۲}q_u\right)(A) = \left(\frac{۱}{۲}\times۰/۳\times۱۰\right)(۱\times۱) = ۱/۵\ ton$$

$$FS = \frac{\text{نیروی مقاوم حداکثر}}{\text{نیروی محرک}} = \frac{\text{مقاوم}\ F_{max}}{\text{زلزله}\ F} = \frac{۱/۵}{۰/۵} = ۳$$

**۸۶- (۳)**

سطح آب در پایین‌دست را به‌عنوان سطح مبنا اختیار می‌کنیم و با استفاده از روابط $H_A = \Delta H - (N_d)_A \Delta h$ ، $(h_p)_A = H_A - (h_z)_A$ و $u_A = (h_p)_A \gamma_w$ ، فشار آب حفره‌ای در نقطهٔ $A$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$u_A = \left[\Delta H - (N_d)_A \Delta h - (h_z)_A\right]\gamma_w = \left[۶ - ۱\times\left(\frac{۶}{۸}\right) - (-۶)\right]\times ۱۰ = ۱۱۲/۵\ kN/m^۲$$

حال تنش کل در نقطه $A$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma_A = ۱۰\times ۶ + ۲۰\times ۶ = ۱۸۰\ kN/m^۲$$

و در نهایت با استفاده از اصل تنش مؤثر خواهیم داشت:

$$\sigma'_A = \sigma_A - u_A = ۱۸۰ - ۱۱۲/۵ = ۶۷/۵\ kN/m^۲$$

**۸۷- (۴)**

ابتدا درشت‌دانه یا ریزدانه بودن خاک را با استفاده از درصد عبوری از الک نمره ۲۰۰ $(F_{۲۰۰})$ به صورت زیر تشخیص می‌دهیم:

$F_{۲۰۰} = ۵\% < ۵۰\% \Rightarrow$ خاک درشت‌دانه است. ( $S$ یا $G$)

حال شن یا ماسه بودن این خاک را به وسیله درصد ماسه در درشت‌دانه $(F_۴^*)$ بررسی می‌کنیم:

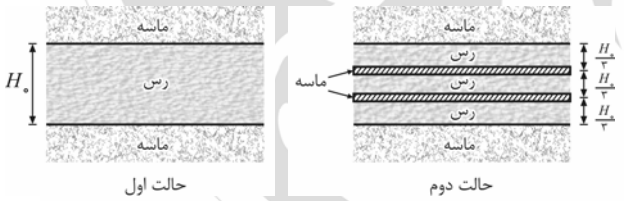
$$F_۴^* = \left(\frac{F_۴ - F_{۲۰۰}}{۱۰۰ - F_{۲۰۰}}\right)\times ۱۰۰ = \left(\frac{۵۵ - ۵}{۱۰۰ - ۵}\right)\times ۱۰۰ = ۵۲/۶\% > ۵۰ \Rightarrow$$ خاک ماسه‌ای $(S)$ است.

چون درصد ریزدانهٔ خاک $(F_{۲۰۰})$ از ۱۲ درصد بیشتر نیست، بنابراین حرف دوم نامگذاری نمی‌تواند $C$ یا $M$ باشد. از این‌رو تنها گزینه (۴) می‌تواند پاسخ صحیح باشد.

**توجه**: باتوجه به اطلاعات داده شده درصورت سؤال، نمی‌توانیم نام کامل خاک را به‌دست آوریم.

**۸۸- (۱)**

استفاده از زهکش‌های ماسه‌ای مطابق با آنچه در صورت سؤال به آن اشاره شده است، حداکثر مسافت زهکشی را در کل لایه، $\frac{۱}{۳}$ مقدار اولیه خواهد کرد. بنابراین طبق روابط سرعت تحکیم خواهیم داشت:




$$\frac{t_۲}{t_۱} = \left(\frac{H_{dr_۲}}{H_{dr_۱}}\right)^۲ = \left(\frac{\frac{H_۰}{۳}\times\frac{۱}{۲}}{H_۰\times\frac{۱}{۲}}\right)^۲ = \frac{۱}{۹}$$

**۸۹- (۲)**

$$\begin{cases}\omega G_s = S_r e \\ e = \dfrac{n}{۱-n}\end{cases} \Rightarrow S_r = \omega G_s\left(\frac{۱-n}{n}\right)$$

**۹۰- (۳)**

طبق رابطه گسیختگی تنش‌های اصلی داریم:

$$\sigma_۱ = \sigma_۳ \tan^۲\theta + ۲c\tan\theta \quad , \quad c = ۰$$ رس‌عادی‌تحکیم‌یافته

در آزمایش اول خواهیم داشت:

$$(۱۵۰ + ۳۰۰) = (۱۵۰)\tan^۲\theta + ۰ \Rightarrow \theta = ۶۰^\circ$$

و برای آزمایش دوم می‌نویسیم:

$$(۲۵۰ + \Delta\sigma_d) = (۲۵۰)\tan^۲ ۶۰ + ۰ \Rightarrow \Delta\sigma_d = ۵۰۰\ kN/m^۲$$

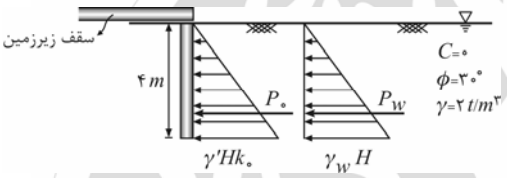
**۹۱- (۲)**

با استفاده از روابط مطرح شده در مورد تغییر ضخامت یا همان نشست خاک داریم:

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\Delta H}{H_\circ} = \dfrac{\Delta e}{1+e_\circ} \quad , \quad \varepsilon = 0/05 \\ \Delta e = e_\circ - e_f \quad , \quad e_f = \omega_f G_s = 0/1 \times 2/5 = 0/25 \end{cases} \Rightarrow \quad 0/05 = \frac{e_\circ - 0/25}{1+e_\circ} \Rightarrow e_\circ \simeq 0/32$$

**۹۲- (۳)**

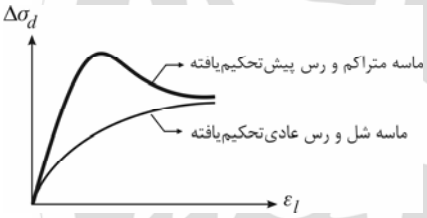
سقف زیرزمین که به دیوار متصل است مانع از حرکت جانبی آن می‌شود، بنابراین شرایط فشار سکون حاکم است. در این حالت نیروی جانبی کل وارد بر دیوار برابر خواهد بود با:




$$F_h = \frac{1}{2}\gamma' H^2 k_\circ + \frac{1}{2}\gamma_w H^2 \quad , \quad k_\circ = 1 - \sin\phi \quad (c=0 \text{ خاک دانه‌ای})$$

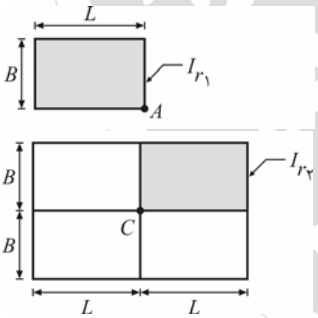
$$\Rightarrow \quad F_n = \frac{1}{2}\times 1 \times 4^2 \times (1 - \sin 30) + \frac{1}{2}\times 1 \times 4^2 = 12\ ton$$

**۹۳- (۴)**




نمودارهای نشان داده شده در شکل مربوط به دو نمونه متراکم ( با نسبت تخلخل کمتر $e = 0/4$) و سست (با نسبت تخلخل بیشتر $e = 0/8$) از یک خاک ماسه‌ای است. باتوجه به اینکه در حین گسیختگی نسبت تخلخل دو نمونه متراکم و سست تقریباً با هم برابر است ($e_{cr}$) و نیز ملاحظه شکل مقابل، می‌توان نتیجه گرفت که گزینه (۴) پاسخ صحیح این تست است.

**۹۴- (۱ و ۲)**




پی اول:

$$I_{r_1} = f\left(\frac{L}{z}, \frac{B}{z}\right)$$

پی دوم:

$$I_{r_2} = f\left(\frac{L}{z}, \frac{B}{z}\right)$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید $I_{r_1} = I_{r_2} = I$ است، بنابراین می‌نویسیم:

**الف:** اگر منظور از بار یکسان، نیروهای یکسان ($P$) باشد:

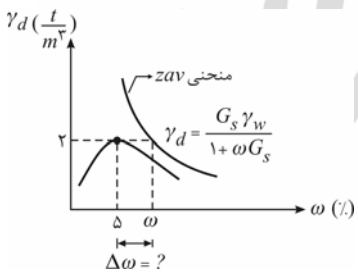
$$\frac{\Delta\sigma_{z_A}}{\Delta\sigma_{z_C}} = \frac{q_A \times I_A}{q_C \times I_C} = \frac{\left(\frac{P}{BL}\right)(I)}{\left(\frac{P}{2B \times 2L}\right)(4I)} = 1$$

**ب:** اگر منظور از بار یکسان، شدت بار یکسان ($q$) باشد:

$$\frac{\Delta\sigma_{z_A}}{\Delta\sigma_{z_C}} = \frac{q_A \times I_A}{q_C \times I_C} = \frac{(q)(I)}{(q)(4I)} = 0/25$$

لازم به ذکر است در کلید آزمون که توسط سازمان سنجش ارائه شد، هر دو گزینه (۱) و (۲) به‌عنوان پاسخ صحیح پذیرفته گردید.

**۹۵- (۲)**




$$\gamma_{d\,max} = \frac{G_s \gamma_w}{1+\omega G_s} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{2/5 \times 1}{1 + 2/5 \times \omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = 10\%$$

رطوبت لازم برای اشباع کردن نمونه خاک خشک، ٪۱۰ است اما نمونه موردنظر خشک نیست و دارای رطوبت بهینه ٪۵ می‌باشد، بنابراین بایستی ٪۵ دیگر به رطوبت موجود اضافه کرد تا خاک اشباع شود.

**۹۶- (۱)**

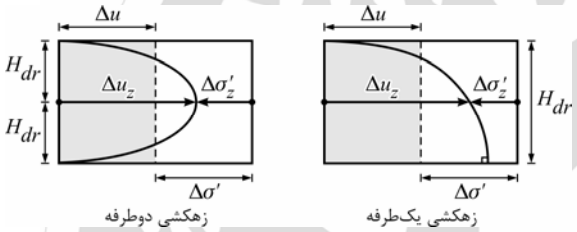
بزرگ بودن سطح ویژه کانی‌های رسی سبب می‌شود تا نیروهای ناشی از بار الکتریکی نقش مهمی را در نوع رفتار خاک چسبنده (رس) به هنگام حضور آب ایفا کننده از طرفی قطبی بودن مولکول‌های آب نیز باعث جذب آب توسط رس می‌شود، به‌طوری‌که اگر خاک رس را در یک محلول غیر قطبی حل کنیم آن محلول جذب رس نشده و خاصیت خمیری به رس نمی‌دهد.

**۹۷- (۱)**

$$U = \frac{\Delta\sigma'}{\Delta\sigma'_\infty} \quad , \quad \Delta\sigma'_\infty = \Delta\sigma = ۵۰\,kN/m^۲ \;\Rightarrow\; ۰/۵ = \frac{\Delta\sigma'}{۵۰} \;\Rightarrow\; \Delta\sigma' = ۲۵\,kN/m^۲$$

$$\Delta\sigma'_m < \Delta\sigma' = ۲۵\,kN/m^۲$$

**تذکر:** مقادیر اضافه فشار آب حفره‌ای و اضافه تنش مؤثر در وسط لایه رس در طول عمل تحکیم به‌ترتیب بیشتر و کمتر از مقادیر متوسط خود می‌باشند:



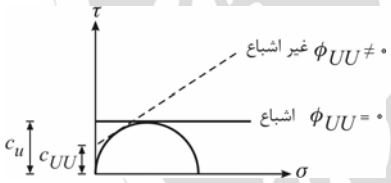

**۹۸- (۴)**

برای به‌دست آوردن ضریب اطمینان در برابر لغزش در شیب‌هایی از جنس ماسه در حالت اشباع از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$FS = \left(\frac{\gamma'}{\gamma_{sat}}\right)\left(\frac{\tan\phi'}{\tan\beta}\right) \quad , \quad \frac{\gamma'}{\gamma_{sat}} \simeq ۰/۵ \text{ (در اکثر خاکها)} \;\Rightarrow\; FS \simeq ۰/۵\left(\frac{\tan\phi'}{\tan\beta}\right)$$

**۹۹- (۳)**

اگر آزمایش تک‌محوری را به‌جای یک نمونه رس غیراشباع، برروی نمونه‌ای اشباع از این خاک انجام دهیم، زاویه اصطکاک داخلی خاک $(\phi)$ صفر خواهد شد و چسبندگی خاک $(c)$ نیز افزایش می‌یابد، پس گزینه (۳) صحیح است.




**۱۰۰- (۱)**

$$\sigma'_c = ۲۰۰\,kN/m^۲ > \sigma'_۰ = ۱۰۰\,kN/m^۲ \;\Rightarrow\; OCR = \frac{۲۰۰}{۱۰۰} = ۲ > ۱ \;\Rightarrow\; \text{خاک رس پیش‌تحکیم‌یافته است}$$

$$\sigma'_f = ۱۵۰\,kN/m^۲ < \sigma'_c = ۲۰۰\,kN/m^۲$$

نتیجه آنکه برای محاسبه نشست تحکیم از رابطه $\Delta H = \frac{H_۰}{۱+e_۰} C_r \log \frac{\sigma'_f}{\sigma'_۰}$ استفاده می‌شود که همان گزینه (۱) است.

**توجه:** منظور از $\sigma'_۱$ در این سؤال همان $\sigma'_f$ است.

## مکانیک سیالات

**۱۰۱- (۴)**

با کنترل دیمانسیون کمیت‌های ارائه شده در گزینه‌ها، خواهیم داشت:

$$\frac{Q}{\sqrt{gH}} \equiv \frac{L^۳T^{-۱}}{\sqrt{LT^{-۲}\times L}} = L^۲$$

$$\frac{V_۰^۲}{g^۲Q} \equiv \frac{(LT^{-۱})^۲}{(LT^{-۲})^۲(L^۳T^{-۱})} = L^{-۳}T^۳$$

$$\frac{Q^۲}{gH^۴} \equiv \frac{(L^۳T^{-۱})^۲}{(LT^{-۲})(L)^۴} = L$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود هیچکدام از کمیت‌ها، یک پارامتر بی‌بعد نمی‌باشند.

**۱۰۲- (۳)**

کمیت‌های ناشی از تلاطم، کمیت‌های گردابی (ادی = *eddy*) نامیده می‌شوند. یکی از این کمیت‌ها، لزجت گردابی ($\eta$) است که برخلاف لزجت ($\mu$) که خاصیتی از سیال است، بستگی به آشفتگی جریان و جرم مخصوص سیال دارد.

**۱۰۳- (۲)**

$$\sum M_o = F_A \times L_A - F_B \times L_B$$

$$F_A = F_B = \rho QV = \rho V^{۲} A = (۱۰^{۳})(۱۰^{۲})\left(\frac{\pi \times ۰/۰۱^{۲}}{۴}\right) = ۲/۵\pi \ N$$

$$\sum M_o = (۲/۵\pi)(۲a) - (۲/۵\pi)(a) = ۲/۵\pi a \ N.m$$

**۱۰۴- (۱)**

با کنترل دیمانسیون کمیت‌های موجود، ملاحظه می‌شود که کمیت‌های گزینهٔ (۱) بدون بعد می‌باشند: $\frac{\tau}{\rho V^{۲}} \equiv \frac{K_s}{D} \equiv \frac{\rho VD}{\mu} \equiv ۱$

توجه کنید که $\frac{\tau}{\rho V^{۲}}$ یک گروه بدون بعد است که به‌صورت تابعی از دیگر کمیت‌های بدون بعد نوشته شده و شکل عمومی معادله نیروی اصطکاک در واحد سطح را در گزینهٔ اول تشکیل داده است.

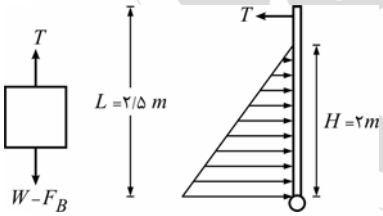
**توجه:** در حل این تست می‌توانستیم با استفاده از تئوری $\pi$ باکینگهام نیز به جواب برسیم. اما با توجه به وقت‌گیر بودن این روش برای حل تست، از آن صرف‌نظر نموده و با کنترل دیمانسیون کمیت‌های موجود، گروه‌های بدون بعد را شناسایی کردیم.

**۱۰۵- (۴)**

$$R = \rho Q_j V_j = \rho V_j^{۲} A_j = \rho V^{۲}\left(\frac{\pi d^{۲}}{۴}\right)$$

**۱۰۶- (۲)**

نمودار آزاد دریچه و بلوک مکعبی را ترسیم کرده و رابطه تعادل لنگرها حول لولا و رابطه تعادل نیروها در امتداد قائم را به ترتیب برای دریچه و بلوک مکعبی می‌نویسیم:




$$\begin{cases} \sum M_o = ۰ \Rightarrow T \times L = F_H \times \frac{H}{۳} \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow T = W - F_B \end{cases} \Rightarrow (W - F_B) \times L = F_H \times \frac{H}{۳}$$

در رابطه فوق داریم:

$$W = ۲۳/۳ \times V \quad , \quad F_B = ۱۰ \times V \quad , \quad L = ۲/۵ \ m$$

$$F_H = \gamma \bar{h} A = (۱۰)(۱)(۲ \times ۱) = ۲۰ \ kN \quad , \quad H = ۲ \ m$$

حال با جایگذاری مقادیر مذکور در رابطه به‌دست آمده خواهیم داشت:

$$(۲۳/۳V - ۱۰V)(۲/۵) = (۲۰)\left(\frac{۲}{۳}\right) \Rightarrow V = ۰/۴ \ m^{۳}$$

**۱۰۷- (۴)**

با فرض $\theta = ۰$، خواهیم داشت:

$$h = \frac{۲\sigma \cos\theta}{\gamma d} = \frac{۲ \times ۰/۰۷۳}{۱۰^{۴} \times ۰/۰۰۱} = ۰/۰۱۴۶ m = ۱۴/۶ mm$$

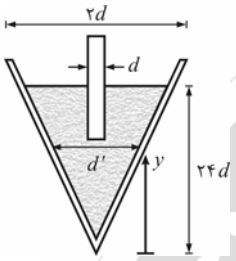
**۱۰۸- (۱)**

با استفاده از رابطه مانومتری محاسبه فشار می‌نویسیم:

$$P_A + (\gamma_w)(۰/۰۶) + (۲\gamma_w)(۰/۱۲) - (\gamma_w)(۰/۳) = P_{atm} = ۰ \Rightarrow P_A = ۰$$

**۱۰۹- (۳)**

در حل این مسئله می‌توان چنین فرض کرد که از درون لوله‌ای به قطر $d$ مایع با سرعت ثابت $V_1$ به درون ظرف وارد می‌شود و از طرف دیگر با سرعت ثابت $V_2$ از مخزن تخلیه شده و از مساحتی با مقطع باقی‌مانده (مقطع ظرف منهای مقطع لوله) به بیرون سرریز می‌شود. در این حالت خواهیم داشت:




$$\frac{y}{۲۴d}=\frac{d'}{۲d} \Rightarrow d'=\frac{y}{۱۲}$$

با نوشتن معادلهٔ پیوستگی جریان بین دو مقطع مورد اشاره، خواهیم داشت:

$$Q_1=Q_2 \Rightarrow V_1A_1=V_2A_2 \xrightarrow[V_1=V_2]{\text{طبق صورت مسأله}} A_1=A_2 \ , \ A_2=\frac{\pi}{۴}(d'^۲-d^۲)$$

$$\frac{\pi}{۴}(d)^۲=\frac{\pi}{۴}\left(\frac{y}{۱۲}\right)^۲-\frac{\pi}{۴}(d)^۲ \Rightarrow y=۱۲\sqrt{۲}d$$

**۱۱۰- (۲)**

در حالتی که لولهٔ جریان افقی باشد، $\Delta P=\Delta H\gamma$ است و رابطه هاگن - پوازی به صورت زیر برحسب دبی نوشته می‌شود:

$$\Delta H=\frac{۳۲\mu V\Delta L}{\gamma D^۲} \ , \ \Delta H=\frac{\Delta P}{\gamma} \ , \ V=\frac{Q}{\left(\frac{\pi D^۲}{۴}\right)} \Rightarrow Q=\frac{\pi\Delta PD^۴}{۱۲۸\mu\Delta L}$$

با توجه به ثابت بودن دبی در این لوله (با قطر ثابت $D$)، خواهیم داشت:

$$\frac{\left(\frac{\Delta P}{\Delta L}\right)_۲}{\left(\frac{\Delta P}{\Delta L}\right)_۱}=\frac{\mu_۲}{\mu_۱} \Rightarrow \left(\frac{\Delta P}{\Delta L}\right)_۲=(-k)(۳/۸)=-۳/۸k$$

**۱۱۱- (۱)**

در ناحیه کاملاً متلاطم (کاملاً آشفته) در نمودار مودی، $f$ تنها تابعی از زبری نسبی می‌باشد.

**۱۱۲- (۳)**

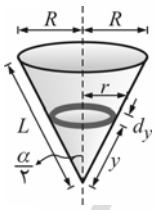
$$V=\frac{Q}{A}=\frac{۰/۱۲\times۱۰^{-۳}}{\left(\frac{\pi\times۰/۱^۲}{۴}\right)}=۰/۰۱۶\,m/s$$

$$Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{(۰/۰۱۶)(۰/۱)}{۱۰^{-۶}}=۱۶۰۰<۲۰۰۰ \Rightarrow$$ جریان آرام است و می‌توان از رابطه هاگن - پوازی استفاده کرد.

$$\tau_۰=\frac{\Delta H\gamma D}{۴L} \ , \ \Delta H=\frac{۳۲\mu VL}{\gamma D^۲} \Rightarrow \tau_۰=۸\mu\left(\frac{V}{D}\right)=(۸)(۱۰^{-۶}\times۱۰۰۰)\left(\frac{۰/۰۱۶}{۰/۱}\right)=۰/۰۰۱۲۸\,N/m^۲$$

**۱۱۳- (۲)**

المانی مطابق شکل روی بدنه مخروط در نظر می‌گیریم. گشتاور لازم جهت دوران این المان به صورت زیر به‌دست می‌آید:




$$\begin{cases} dF=\dfrac{\mu V dA}{t} \\ V=r\omega \ , \ dA=۲\pi r\,dy \\ r=\dfrac{R}{L}y \end{cases} \Rightarrow dF=\frac{\mu\times\frac{\omega R}{L}y\times۲\pi\frac{R}{L}y\,dy}{t}=\frac{۲\pi\mu\omega R^۲y^۲dy}{tL^۲}$$

$$dT=r\times dF=\frac{R}{L}y\times\frac{۲\pi\mu\omega R^۲y^۲dy}{tL^۲}=\frac{۲\pi\mu\omega R^۳}{tL^۳}y^۳dy$$

$$T=\int_۰^L dT=\frac{۲\pi\mu\omega R^۳}{tL^۳}\int_۰^L y^۳dy=\frac{۲\pi\mu\omega R^۳}{tL^۳}\times\frac{L^۴}{۴}=\frac{\pi\mu\omega R^۴}{۲t\left(\frac{R}{L}\right)} \xrightarrow{\frac{R}{L}=\sin\left(\frac{\alpha}{۲}\right)} T=\frac{\pi\mu\omega R^۴}{۲t\sin\left(\frac{\alpha}{۲}\right)}$$

**۱۱۴- (۲)**

با توجه به موازی بودن دو لوله و صرف‌نظر از افت‌های موضعی می‌نویسیم:

$$\Delta H_1 = \Delta H_2 \Rightarrow \frac{fL_1Q_1^2}{12.1D^5} = \frac{fL_2Q_2^2}{12.1D^5} \xrightarrow{L_1=4L_2} 4Q_1^2 = Q_2^2 \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow Q_2 = 2Q_1$$

$$\frac{Q_{\text{جدید}}}{Q_{\text{قبلی}}} = \frac{Q_1+Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1+2Q_1}{Q_1} = 3$$

**۱۱۵- (۴)**

با توجه به اصل بقای جرم می‌توان گفت افزایش جرم آب درون ظرف ($\Delta m$) برابر است با مجموع جرم آب ورودی به ظرف ($m_{in}$) منهای مجموع جرم آب خروجی از ظرف ($m_{out}$)، بنابراین می‌نویسیم:

$$\Delta m = m_{in} - m_{out}$$

$$\Delta m = \rho \Delta \forall = \rho A \Delta h = 1000 \times 0.1 \times \Delta h = 100 \Delta h$$

$$m_{in} = \dot{m}_{in} \times \Delta t = 4 \times 10 = 40\ kg$$

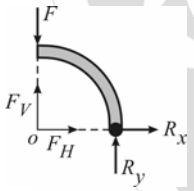
$$m_{out} = \dot{m}_{out} \times \Delta t = (\rho Q)_{out} \times \Delta t = (1000 \times 3 \times 10^{-3}) \times 10 = 30\ kg$$

$$100 \Delta h = 40 - 30 \Rightarrow \Delta h = 0.1\ m = 10\ cm \Rightarrow h_{\text{جدید}} = \Delta h + h_{\text{اولیه}} = 10 + 20 = 30\ cm$$

**۱۱۶- (۱)**

چون جزء نیروهای عمودی فشار، عمود بر سطح منحنی هستند، بنابراین از مرکز دایره خواهند گذشت. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که برآیند آنها در امتداد افقی و قائم نیز از مرکز دایره خواهد گذشت.

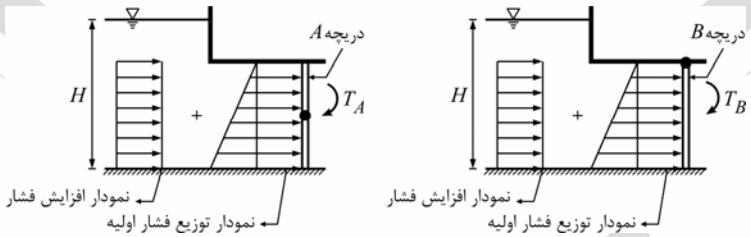
با ترسیم دیاگرام آزاد دریچه و انتقال نیروهای هیدرواستاتیک به نقطه $o$ خواهیم داشت:




$$\sum M_o = 0 \Rightarrow R_y = 0$$

**۱۱۷- (۳)**

با ترسیم نمودار توزیع فشار برای دریچه‌ها خواهیم داشت:




همان‌طور که در شکل مشخص است، با افزایش ارتفاع $H$، فقط عرض قسمت مستطیلی نمودار فشار افزایش می‌یابد. در این حالت در دریچه $B$ حول لولا، لنگر اضافی ایجاد می‌شود. ولی در دریچه $A$ حول لولا افزایش لنگر نخواهیم داشت. بنابراین برای بسته نگه داشتن دریچه‌ها، $T_A$ با افزایش $H$ تغییری نمی‌کند، ولی $T_B$، با افزایش $H$، افزایش می‌یابد.

**۱۱۸- (۳)**

$$h_p = \frac{r_0^2\omega^2}{2g} = \frac{1^2 \times 10^2}{2 \times 10} = 5\ m$$

$$\frac{1}{2} h_p = 2.5\ m > 2\ m \Rightarrow$$ آب از مخزن بیرون می‌ریزد

(حجم خالی اولیه) $V_1 = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi$

(حجم خالی ثانویه) $V_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 \times 5 = 2.5\pi$

$$\Delta V_{\text{حجم آب بیرون ریخته}} = V_2 - V_1 = 2.5\pi - 2\pi = 0.5\pi = 1.57\ m^3$$

**۱۱۹- (۱)**

$$\Psi = x^{۲} + ۲xy + ۴t^{۲}y$$

$$Q_{AB} = \Psi_B - \Psi_A = (۰ + ۲\times۰\times۴ + ۴\times۲^{۲}\times۴) - (۰) = ۶۴\, m^{۳}/s$$

$$Q_{AC} = \Psi_C - \Psi_A = (۱۰^{۲} + ۲\times۱۰\times۰ + ۴\times۲^{۲}\times۰) - (۰) = ۱۰۰\, m^{۳}/s$$

**۱۲۰- (۴)**

پارامترهای بدون بعد مهم در تونل باد، عدد ماخ و عدد رینولدز می‌باشند. چون در این مسئله درجه حرارت و فشار یکسان فرض شده و دیگر بحث تراکم‌پذیری مطرح نیست، بنابراین عدد ماخ بی‌تأثیر بوده و تنها پارامتر بدون بعد مؤثر، عدد رینولدز است.

$$(Re)_m = (Re)_p \Rightarrow \left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)_m = \left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)_p$$

$$\xrightarrow[\text{مدل و نمونه اصلی}]{\text{یکسان بودن سیال}} \frac{V_m}{V_p} = \frac{D_p}{D_m} \Rightarrow \frac{V_m}{۴۰۰} = ۲۵ \Rightarrow V_m = ۱۰۰۰۰\, mph$$

اگر دانشگاه اصلاح شود، مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

## مجموعه پاسخ‌های تشریحی

# آزمون سراسری سال ۱۳۸۶

## کارشناسی ارشد

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سوالات | از شماره | تا شماره |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | زبان تخصصی | ۲۰ | ۱ | ۲۰ |
| ۲ | ریاضیات | ۲۰ | ۲۱ | ۴۰ |
| ۳ | مکانیک جامدات (مقاومت مصالح ـ تحلیل سازه‌ها) | ۴۰ | ۴۱ | ۸۰ |
| ۴ | مکانیک خاک | ۲۰ | ۸۱ | ۱۰۰ |
| ۵ | مکانیک سیالات | ۲۰ | ۱۰۱ | ۱۲۰ |

"استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد."

## زبان تخصصی

***(دستورالعمل: دو متن زیر را بخوانید و ۶ سؤال زیر را برای هر کدام جواب دهید.)***

### متن ۱

***روبات، شیب‌های تند را تثبیت خواهد کرد:***

یک روبات بزرگ کنترل از راه دور به زودی قادر خواهد بود که شیب‌هایی را تثبیت کند که مستعد رانش هستند. به این ترتیب نیاز برای اینکه کارکنان ساختمانی، خود را در معرض خطر روی شیب‌های تند یا زمین های ناپایدار قرار دهند را از بین خواهد برد.

تکنولوژی‌های روباتیک که در ابتدا برای حرکت ماهواره‌ها به داخل مدار صحیحشان توسعه داده شدند، اکنون توسط مهندسانی که علاقمند به جلوگیری کردن از رانش‌های حتی کوچک زمین هستند در حال انطباق هستند، (زمین لغزش‌هایی ) که هزاران خانه و انسان را هر ساله تهدید می‌کند. این روبات ۲ متری می‌تواند یک عملیات تثبیت شیب متعارف را با مته کردن میله‌هایی به داخل خاک انجام دهد.

این روبات دارای ویژگی‌هایی است از جمله یک ابزار قابل تنظیم و چرخنده که می‌تواند سوراخ‌هایی به عمق ۲۰ متر و با هر زاویه‌ای را در زمین حفر نماید و دارای یک بازوی مجزایی است باقابلیت قرار دادن یک سری از میله‌های فولادی به طول ۱۵۰۰ میلی‌متر و قطر ۷۳ میلی‌متر به داخل سوراخ‌ها. چهارپایهٔ این اختراع عجیب می‌توانند تا ۱۱۰ درجه بچرخند، (که) روبات را قادر به راه رفتن می‌نماید و روی شیب‌های خیلی تند پایدار باقی می‌ماند.

هر پایه دارای یک معماری کارتزین است. بنابراین یک بازو می‌تواند موازی سطح گسترش یابد، در حالی که بازوی دوم می‌تواند روی سطح به عقب و جلو حرکت نماید. پایه‌های موتور هیدرولیکی می‌توانند در برابر نیروهای عمودی و جانبی تا ۲۰ کیلونیوتن مقاومت کنند که آن‌ها را قادر می‌سازد تا وزن ۳۰۰۰ کیلوگرمی این اختراع عجیب را در تقریباً هر زاویه‌ای تحمل نمایند.

طرح‌های موجود نیاز به نرم‌افزارهای تحلیل پایداری دارند که بنابراین این روبات بتواند موقعیت‌های پاهایش و تعادل کلی‌اش را نظارت نماید و اگر لازم باشد، عملکرد اصلاحی انجام دهد. این روبات نیاز افراد برای پایین رفتن از شیب‌های تند یا کار روی داربست‌ها در ارتفاع‌های زیاد را از بین خواهد برد. با از بین بردن یا حداقل، کاهش نیاز افراد برای کار تحت چنین شرایطی، این روبات در افزایش ایمنی کارگران مشارکت خواهد نمود.

طراحان انتظار دارند که قابلیت‌های حفر سوراخ این روبات را همین بهار آزمایش نمایند، همچنین یک آزمایش قابلیتش برای حرکت در طول شیب‌های ناپایدار به سرعت پس از آن انجام خواهد گرفت.

**۱- از این مقاله می‌توان فهمید:**

۱) که این روبات هنوز در مرحله توسعه است.
۲) که این روبات در حال حاضر در برخی جاها در حال استفاده است.
۳) که این روبات به تعداد قابل توجهی در حال تولید است.
۴) که این روبات برای چندین سال آینده آماده آزمایش نخواهد بود.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

A large remote controlled robot may soon be able to stabilize slopes that are prone to landslides …

**۲- هدف اصلی تولید چنین روباتی:**

۱) کاهش زمان ساخت و ساز جاده‌ها در مناطق ناپایدار است.
۲) صرفه‌جویی پول در ساخت و ساز جاده‌ها در مناطق ناپایدار است.
۳) کاهش نیاز به کارگران برای کار در جاهای خطرناک است.
۴) افزایش درک نقش ماهواره‌ها در تثبیت جاده‌ها است.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

… thereby sparing construction employees the need to expose themselves to danger on steep or unstable terrain

**۳- پایه‌ها طراحی شده‌اند به منظور:**

۱) قرار دادن میله‌های ۱۵۰۰ میلی‌متری به داخل خاک.
۲) قرار دادن روبات موازی سطح.
۳) حفظ و متعادل کردن روبات در حالی که در داخل خاک حفاری می‌کند.
۴) حمل حداکثر ۳۰۰۰ کیلوگرم وزن علاوه بر وزن روبات.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

The contraption’s four legs can rotate up to 110 degrees, enabling the robot to "walk" and remain stable on every steep slopes.

**۴- تثبیت خاک با قراردادن میله‌هایی داخل آن:**

۱) کمک به جلوگیری کردن از رانش‌های زمین می‌نماید.
۲) خاک را برای نگهداری یک جاده آماده می‌کند.
۳) نیاز به کارگران ساختمانی را از بین می‌برد.
۴) یک تکنیکی است که عمدتاً برای دیواره‌های بسترهای آبراهه استفاده می‌شود.
با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

A large remote controlled robot may be able to stabilize slopes that are prone to landslides ……. . Robotic technologies …… are being adapted by engineers interested in preventing even small landslides.

**۵- در این مقاله، "contraption" چیست؟**

۱) خود روبات ۲) پاهای روبات ۳) ابزار حفاری روبات ۴) معماری کارتزینی روبات
گزینه ۱ صحیح است.

**۶- می‌تواند از این مقاله استنباط شود که:**

۱) این روبات برای تکیه‌گاه نیاز به داربست زدن دارد.
۲) این روبات باید برای پایدار بودن سنگین باشد.
۳) این روبات به وسیله ماهواره کنترل خواهد شد.
۴) این روبات با کامپیوتر عمل می‌کند.
با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

Current plans call for the use of stability analysis software so that the robot can monitor …

## متن ۲

***مواد لایروبی ترمیمی استفاده شده برای تولید سیمان:***

هر ساله میلیون‌ها متر مکعب مواد آلوده از خلیج‌ها و بنادر برای حفظ عمق آب لایروبی می‌شوند. معمولاً این مواد خطرناک به محل دفن زباله منتقل می‌شوند. در تلاشی برای آلودگی زدایی و باز استفاده این مواد و حفظ فضای محل دفن زباله، کارشناسان در حال آزمایش برای تبدیل ماده لایروبی شده به یک جزء سازنده از سیمان پرتلند هستند.

این آزمایش از فرایندی به نام آب‌بندی سیمان استفاده می‌نماید، که به دو روش ، آلودگی را تصفیه می‌کند. ابتدا ماده لایروبی شده داخل یک کوره چرخان قرار می‌گیرد که به دمای ۱۳۱۵ تا ۱۴۲۶ درجه سانتی‌گراد می‌رسد. این گرما آلودگی‌هایی از قبیل پلی کلرین بی‌فنیل‌ها را (PCBs) به اجزاء تشکیل‌دهنده بی‌خطرشان تجزیه می‌کند. سپس ماده حاصل برای حذف سمومی از قبیل جیوه، از داخل یک فیلتر کربنی عبور داده می‌شود و فرصت خنک شدن می‌یابد. این فرایند یک محصول شیشه‌ای شکل به نام اکوملت ایجاد می‌کند که سپس به صورت پودر ریزی آسیاب شده و برای وزن و حجم دادن به سیمان به آن افزوده می‌شود.

زمانی که این ماده در داخل سیمان مخلوط می‌شود، در عمل‌آوری بتن مشارکت می‌نماید. این ماده شبیه سرباره کوره شیشه دانه‌ای است و بسیار یکنواخت و سازگار است.

در نوامبر و دسامبر سال گذشته، حدود ۳۰۵ متر مکعب از موادی که از یک بندرگاه لایروبی شده بود به این روش تصفیه شد و ۱۳۶ میلی‌گرم اکوملت حاصله برای جایگزینی سنگ رسی در یک جاده بتنی تخصیص داده شد. سنگ رسی باید استخراج شود که این مشکلات زیست‌محیطی خودش را ایجاد می‌کند. استفاده از اکوملت نه تنها باعث صرفه‌جویی در فضای محل دفن زباله می‌شود بلکه همچنین جلوی ایجاد مواد زائد بیشتر را به خاطر استفاده از ماده موجودی که هم‌اکنون به عنوان جزء تشکیل‌دهنده سیمان به کار می‌رود را نیز می‌گیرد.

کوره که به عنوان آزمایش راهنما استفاده شد، به جای اینکه آلودگی‌های ناشی از فرایند تصفیه را به داخل هوا رها کند (آن‌ها را) می‌گیرد. جنبه‌های کنترل خروجی‌ها و دستورات نظارتی، همگی منجر به یک نتیجه زیست‌محیطی خوب شدند.

اکوملت همچنین با استانداردهای بین‌المللی ASTM برای مقاومت فشاری با نتیجه مطلوبی مورد آزمایش قرار گرفته است و اگرچه هیچ آزمایش طولانی مدتی روی چرخه حیاتش اجرا نشده است، انتظار می‌رود که این ماده به همان دوام و قابلیت اعتماد یک جزءترکیبی سرباره کوره باشد. یک کوره چرخان با مقیاس تجاری که می‌تواند تا ۳۸۲۴۰۰ متر مکعب مواد لایروبی شده را در هر سال تصفیه کند در حال توسعه است. سایر روش‌های تصفیه و باز استفاده از مواد لایروبی شده آلوده نیز در حال بررسی هستند. هدف ، ایجاد یک صنعت خودایستای جدید است که به طور منظم مواد لایروبی شده را به عنوان مصالح ساختمانی استفاده نماید.

**۷- دلیل اصلی که مواد از راه‌های آبی لایروبی می‌شوند ..... است.**

۱) برای اینکه در محل دفن زباله مورد استفاده قرار می‌گیرند.
۲) برای اینکه آلودگی را کاهش دهند.
۳) برای اینکه به عنوان یک جزء سازنده از سیمان پرتلند مورد استفاده قرار گیرند.
۴) برای اینکه جلوی کم عمق شدن بیش از حد آب را بگیرند.
با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

Every year millions of cubic meters of contaminated materials are dredged from bays and ports to maintain the water's depth.

**۸- در فرایند آب‌بندی سیمان:**

۱) PCB ها تولید می‌شوند.
۲) مواد آلوده ابتدا حرارت داده می‌شوند سپس تصفیه می‌شوند.
۳) مواد لایروبی شده به داخل بتنی که در حال خشک شدن است «آب‌بندی» می‌شوند.
۴) مواد آلوده آسیاب می‌شوند تا پودر گردند سپس تصفیه می‌شوند.
با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

First the dredged material is inserted into a rotary kiln …… . The resulting material is then passed through a carbon filter …

**۹- اکوملت:**

۱) نام سرباره کوره نیز است.
۲) برای دوام طولانی مدت آزمایش شده است.
۳) یک مورد علمی است که برای محصول حاصل شده از آب‌بندی سیمان به کار می‌رود.
۴) نام تجاری برای محصول فرایند آب‌بندی سیمان است.
با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

The process creates a glass like product called Ecomelt …… .

معمولاً نام‌های علمی مواد، ترکیبی از نام‌های مواد تشکیل‌دهنده آن‌ها هستند که این در رابطه با ecomelt صادق نیست.

**۱۰- اکوملت بهتر از سنگ رسی است زیرا:**

۱) نیازی به استخراج آن نیست.
۲) می‌تواند در جاده‌های بتنی مورد استفاده قرار گیرد.
۳) نیاز به استفاده از سرباره کوره ندارد.
۴) آلودگی‌های سنگ رسی به داخل هوا رها می‌شوند.
با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

Shales has to be mined and that creates its own environmental problems.

**۱۱- از مقاله واضح است که کوره چرخان که ایجاد می‌شود:**

۱) همچنین مواد را فیلتر نیز خواهد کرد.
۲) نیازهای اکوملت صنعتی را برآورده نخواهد کرد.
۳) استانداردهای زیست محیطی شبیه کوره آزمایشی را تأمین خواهد کرد.
۴) برای سایر روش‌های دفع مواد آلوده نیز استفاده خواهد شد.
با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

The kiln used in the pilot test captured the contaminants from the treatment process rather than releasing them into the air.

**۱۲- هدف کلی طراحانی که اکوملت را توسعه می‌دهند ..... است.**

۱) کاهش آلودگی زیست محیطی ایجاد شده در تولید سیمان پرتلند
۲) دفع مواد لایروبی شده به یک روش با منفعت و دوستدار محیط زیست
۳) یافتن یک روش ارزان‌تر برای تولید سیمان پرتلند
۴) یافتن یک جایگزین بهتر برای سربار کروه و شیل
از کل پاراگراف ۴ و ۵ و ۶ به این نتیجه می‌رسیم که گزینه ۲ صحیح است.

***در ۸ سؤال زیر، جوابی را انتخاب نمایید که به بهترین شکلی از نظر فنی، هر جمله را کامل می‌نماید:***

**۱۳- زلزله‌ها برای معماران و مهندسان، تعدادی از ..... طراحی مهم خارج از فرایند طراحی نرمال را فراهم می‌آورند.**

۱) نقشه (چارت) ۲) معیارهای ۳) عامل (فاکتور) ۴) قاطع

گزینه ۲ صحیح است.

در صورت سؤال "a number of" آمده است و باید کلمه بعدی به صورت جمع باشد که فقط گزینه ۲ چنین است.

**۱۴- در برخی کشورها، اهمیت زیاد به گروهی از انواع سازه توسط آیین‌نامه‌های ..... شناسایی می‌شوند، از قبیل ایران که تمام ساختمان‌های عمومی برای نیروهای زلزله بزرگ‌تری نسبت به سایر ساختمان‌ها طراحی می‌شوند.**

۱) بیمارستان ۲) سازه ۳) زمین‌لرزه ۴) قانونی

گزینه ۴ صحیح است.

**۱۵- از آنجایی که برخی از مراجع برای داده‌های لرزه‌شناسی ممکن است مورد نیاز باشند، برخی تعاریف پایه پیش از بحث کردن در مورد خود مطالعات ..... ارائه می‌شوند.**

۱) دستی ۲) لرزه‌ای ۳) لرزه‌خیزی ۴) به طور ناکافی

گزینه ۳صحیح است.

**۱۶- با شناسایی نوع متعارف حرکت گسل در یک گسل مشخص، برخی از ویژگی‌های حرکت‌های زمین در ..... گسل قابل پیش‌بینی هستند.**

۱) به‌آرامی ۲) اطراف ۳) فاصله ۴) فعالیت

گزینه ۲ صحیح است.

**۱۷- فرضیات پایه‌ای که در مدل‌های تحلیلی مورد استفاده قرار می‌گیرند، خودشان مدل‌های رفتاری هستند و نباید بدون درک خوبی از آن‌ها مبادرت به ..... آن‌ها نمود.**

۱) نمایش خوب ۲) تحلیل سازه‌ای ۳) نیازهای طراحی ۴) قابلیت ریاضی

گزینه ۲صحیح است.

**۱۸- مدل وینکلر می‌تواند برای خاک‌های غیر چسبنده مناسب‌تر باشد ولی ارائه ضعیفی از ..... برای خاک‌های چسبنده می‌دهد.**

۱) پایهٔ صلب ۲) نیروی برشی ۳) لبه‌های پی ۴) توزیع فشار

گزینه ۴ صحیح است.

**۱۹- روش سنتی محاسبه بار گسیختگی خمیری یک سازه فولادی یک روش تحلیلی حدی است که در آن حالات گسیختگی ممکن، به منظور یافتن حالتی که ..... بار گسیختی را می‌دهد، مورد جستجو قرار می‌گیرند.**

۱) حداقل ۲) حداکثر ۳) عمودی ۴) افقی

گزینه ۱ صحیح است.

**۲۰- خرپای با یال موازی دارای عملکرد سازه‌ای است شبیه به عملکرد سازه‌ای یک تیر و یال‌های بالایی و پایینی معادل ..... بوده در حالی که پایه‌ها و قطری‌ها معادل جان تیر هستند.**

۱) عمق ۲) بال‌های تیر ۳) مرکز سطح ۴) محور (تار) خنثی

گزینه ۲ صحیح است.

## ریاضیات

**۲۱- (۲)**

معادله را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم: $y' - \frac{2}{x} y = 1$

این معادله از نوع مرتبه اول خطی بوده و دارای حل زیر است:

$$y = e^{-\int \frac{-2}{x} dx} \left\{ \int 1 e^{\int \frac{-2}{x} dx} dx + c \right\} = e^{\ln x^2} \left\{ \int e^{\ln x^{-2}} dx + c \right\}$$

$$= x^2 \left\{ \int x^{-2} dx + c \right\} = x^2 (-x^{-1} + c) = -x + cx^2 \Rightarrow \lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} -x + cx^2 = 0$$

**۲۲- (۱)**

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=3\tan x+x^3-2=0$$

با توجه به قضیه مقدار میانی و از آنجا که:

$$f(0)=3\tan 0+0-2<0$$

$$f(\frac{\pi}{4})=3\tan(\frac{\pi}{4})+\frac{\pi^3}{64}-2>0 \quad \Rightarrow \quad f(0)f(\frac{\pi}{4})<0$$

از طرفی $f(x)$ در بازه $(0\ ,\ \frac{\pi}{4})$ پیوسته بوده و در نتیجه معادله $f(x)=0$ در بازه مذکور لااقل یک ریشه دارد. از طرف دیگر:

$$f'(x)=3(1+\tan^2 x)+3x^2$$

چون $f'(x)$ به‌ازای هر $x$ همواره مثبت است، لذا $f'(x)=0$ در بازه $(0\ ,\ \frac{\pi}{4})$ دارای هیچ ریشه‌ای نبوده و طبق نتایج قضیه رول $f(x)=0$ حداکثر یک ریشه خواهد داشت. بنابراین، معادله مورد نظر حداقل و حداکثر یک ریشه (یعنی دقیقاً یک ریشه) در بازه فوق دارد.

**۲۳- (۴)**

اگر از مختصات قطبی کمک بگیریم، داریم:

$$\text{حد}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

به دلیل وابستگی نتیجه به $\theta$ ، حد فوق مقداری یکتا نداشته و درنتیجه موجود نیست.

**۲۴- (۳)**

با اعمال قاعده هوپیتال داریم (البته قبلاً احراز شده است که حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است.)

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln 3)3^x-(\ln 2)2^x}{1}=\ln 3-\ln 2$$

**۲۵- (۳)**

**روش اول:**

$$\int\frac{dx}{1+e^x}\xrightarrow{\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}}}\int\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}$$

حال با تغییر متغیر $u=e^{-x}+1$ و $du=-e^{-x}dx$ داریم:

$$\text{انتگرال}=-\int\frac{du}{u}=-\ln u+c=-\ln(e^{-x}+1)+c=-\ln\frac{1+e^x}{e^x}+c=x-\ln(1+e^x)+c$$

**روش دوم:** از تغییر متغیر $u=1+e^x$ و در نتیجه $du=e^x dx$ $(\frac{du}{u-1}=dx)$، داریم:

$$I=\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{du}{u(u-1)}=\int(\frac{-1}{u}+\frac{1}{u-1})du=\ln(u-1)-\ln u+c$$

با قرار دادن $u=1+e^x$ خواهیم داشت:

$$=\ln(e^x+1-1)-\ln(e^x+1)+c=x-\ln(e^x+1)+c$$

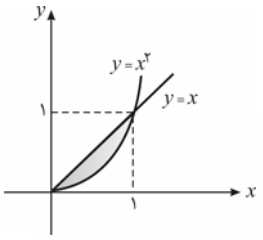
**۲۶- (۴)**

از آنجایی که تابع $f(x,y,z)=x$ نسبت به $x$ تابعی فرد بوده و ناحیه انتگرال‌گیری نیز نسبت به $x$ متقارن است (یعنی هر نقطه‌ای به‌طول $x$ که در ناحیه باشد، نقطه قرینه آن به طول $-x$ نیز در ناحیه موجود است.) لذا انتگرال این تابع در ناحیه مزبور صفر است: یعنی؛ $\iiint_V x\,dv=0$

به همین ترتیب چون $\sin z$ تابعی فرد نسبت به $z$ بوده و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به $z$ متقارن است، انتگرال این تابع نیز در ناحیه مزبور صفر است، یعنی؛ $\iiint_V \sin z\,dv=0$ در نتیجه، داریم:

$$\text{انتگرال}=\iiint_V 2dx\,dy\,dz=2\iiint_V dx\,dy\,dz=2\,(\text{حجم کره})=2\times\frac{4}{3}\pi a^3=\frac{8}{3}\pi a^3$$

**۲۷- (۳)**




$$y = x \xrightarrow{\text{قطبی}} r\sin\theta = r\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

$$y = x^{۲} \xrightarrow{\text{قطبی}} r\sin\theta = r^{۲}\cos^{۲}\theta \Rightarrow r = \frac{\sin\theta}{\cos^{۲}\theta}$$

این انتگرال را در مختصات قطبی محاسبه می‌کنیم:

$$I = \int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۴}} \int_{r=۰}^{\frac{\sin\theta}{\cos^{۲}\theta}} \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^{۲}}} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \int_{۰}^{\frac{\sin\theta}{\cos^{۲}\theta}} dr\,d\theta = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin\theta}{\cos^{۲}\theta}\,d\theta = \frac{۱}{\cos\theta}\Bigg|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} = \sqrt{۲}-۱$$

**۲۸- (؟)**

**روش اول:** $curl\,\vec{F} = \vec{۰}$ بنابراین میدان مذکور پایستار بوده و داریم:

$$\begin{cases} u_x = x \\ u_y = y \\ u_z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{x^{۲}}{۲} + f(y\,,z) \\ u = \frac{y^{۲}}{۲} + g(x\,,z) \\ u = \frac{z^{۲}}{۲} + h(x\,,y) \end{cases} \Rightarrow u = \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{y^{۲}}{۲} + \frac{z^{۲}}{۲} + c \quad \text{(تابع پتانسیل)}$$

و با توجه به مختصات نقاط ابتدایی و انتهایی $A(۱\,,۰\,,۰)$ و $B(۰\,,۱\,,\frac{\pi}{۲})$ نتیجه می‌شود:

$$\text{کار نیروی } F = u(B) - u(A) = (۰ + \frac{۱}{۲} + \frac{\pi^{۲}}{۸} + c) - (\frac{۱}{۲} + ۰ + ۰ + c) = \frac{\pi^{۲}}{۸}$$

**روش دوم:**

$$dR = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k} \;\; ; \;\; \vec{F} = (\cos t\,, \sin t\,, t)$$

$$W = \oint_{C} F.dr = \int_{t=۰}^{\frac{\pi}{۲}} (-\cos t\sin t + \sin t\cos t + t)\,dt = \frac{t^{۲}}{۲}\Bigg|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\pi^{۲}}{۸}$$

**۲۹- (۴)**

**روش اول:** از نتیجه قضیه استوکس داریم:

$$F = (F_{۱}\,, F_{۲}\,, F_{۳})$$

$$\iint_{S_{۱}} CurlF.ndS = \iint_{S_{۲}} CurlF.ndS$$

با انتخاب $S_{۲}$ در داخل دایره $x^{۲} + y^{۲} = ۴$ در صفحه $z = ۰$ داریم:

$$n = \vec{k} \;\; ; \;\; ds = dA$$

$$\Rightarrow CurlF.\vec{n} = Curl\,\vec{F}.\vec{k} \Rightarrow \frac{\partial F_{۲}}{\partial x} - \frac{\partial F_{۱}}{\partial y} = ۳x^{۲}e^{yz} - ۲y\cos(xz)$$

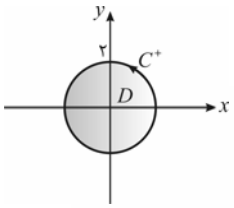
که با قرار دادن $z = ۰$ داریم:

$$CurlF.\vec{k} \Rightarrow ۳x^{۲} - ۲y \Rightarrow$$

$$\iint_{S_{۲}} (۳x^{۲} - ۲y)\,dA = \iint_{S_{۲}} ۳x^{۲}dA - \underbrace{\iint_{S_{۲}} ۲y\,dA}_{\text{تابع تحت انتگرال فرد ناحیه متقارن}} \nearrow ۰$$

$$= \iint_{S_{۲}} ۳x^{۲}dA = \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۲} (۳r^{۲}\cos^{۲}\theta)(r\,dr\,d\theta) = (\int_{۰}^{۲\pi} \cos^{۲}\theta\,d\theta)(\int_{۰}^{۲} ۳r^{۳}dr) = \pi \times ۱۲ = ۱۲\pi$$

**روش دوم:** سطح $S$ یک سطح باز با منحنی مرزی $C$ به معادله زیر است:




$$C:\begin{cases} x^۲+y^۲+(z-۲)^۲=۸ \\ z=۰ \end{cases} \Rightarrow x^۲+y^۲=۴$$

طبق قضیه استوکس داریم ( $C$ در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود):

$$I=\iint_S \overrightarrow{curl\,F}\cdot\vec{n}\,ds=\oint_C \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}$$

باتوجه به معادله منحنی مرزی $C$ (در صفحه $z=۰$ ، $x^۲+y^۲=۴$) داریم:

$$\overrightarrow{dr}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+۰$$

و با استفاه از بردار $\vec{F}$ می‌نویسیم:

$$\Rightarrow I=\oint_C y^۲\cos xz\,dx+x^۳e^{yz}\,dy \overset{z=۰}{=\!=} \oint_C y^۲dx+x^۳\,dy$$

انتگرال اخیر را نیز می‌توان از قضیه گرین به‌دست آورد:

$$I=\iint_D (Q_x-P_y)\,dx\,dy=\iint_D \frac{\partial}{\partial x}(x^۳)-\frac{\partial}{\partial y}(y^۲)\,dx\,dy$$

$$=\iint_D (۳x^۲-\underbrace{۲y}_{\substack{\text{تابع فرد}\\ \text{در بازه متقارن}}})\,dx\,dy=\iint_D ۳x^۲\,dx\,dy$$

با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$I=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۲(۳r^۲\cos^۲\theta)\,r\,dr\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}\int^۲(۳r^۳\cos^۲\theta)\,dr\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}\left(\frac{۳r^۴}{۴}\cos^۲\theta\right)\Big|_{r=۰}^{۲}d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}(۱۲\cos^۲\theta)\,d\theta=۶\int_۰^{۲\pi}(۱+\cos ۲\theta)\,d\theta=(۶\theta+۳\sin ۲\theta)\Big|_{\theta=۰}^{۲\pi}=۱۲\pi$$

**۳۰- (۱)**

پاسخ تست ۳۸ سال ۸۴ را ملاحظه نمایید.

**۳۱- (۱)**

طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint y^۲dx+x\,dy=\iint_D \frac{\partial}{\partial x}(x)-\frac{\partial}{\partial y}(y^۲)\,dx\,dy$$

$$=\iint_D (۱-۲y)\,dx\,dy \overset{\text{مختصات}}{\underset{\text{قطبی}}{=\!=}} \int_{\theta=۰}^{۲\pi}\int_{r=۰}^{۲}(۱-۲r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\frac{r^۲}{۲}-\frac{۲r^۳}{۳}\sin\theta\Big|_{r=۰}^{۲}d\theta=\int_۰^{۲\pi}\left(۲-\frac{۱۶}{۳}\sin\theta\right)d\theta=۲\theta+\frac{۱۶}{۳}\cos\theta\Big|_۰^{۲\pi}=۴\pi+\frac{۱۶}{۳}-\frac{۱۶}{۳}=۴\pi$$

**۳۲- (۴)**

این سری از نوع تلسکوپی می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲n+۱}{n^۲(n+۱)^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}\left[\frac{۱}{n^۲}-\frac{۱}{(n+۱)^۲}\right]=۱-\frac{۱}{\infty}=۱$$

**۳۳- (۲)**

**روش اول:**

برای همگرایی سری مذکور باید:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n}\right) x^n} < 1$$

می‌دانیم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ، بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{n} x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}\,|x|}{\sqrt[n]{n}} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}\,|x|}{1} < 1 \Rightarrow a|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{-1}{a} < x < \frac{1}{a}$$

بنابراین شعاع همگرایی $\frac{1}{a}$ خواهد بود.

**روش دوم:**

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} a\sqrt[n]{\frac{1}{n}+\frac{b^n}{na^n}} = \lim_{n\to\infty} a\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} \overset{b<a}{=\!=} a \Rightarrow R = \frac{1}{a}$$

**۳۴- (۲)**

در انتگرال $\int_0^1 \frac{x-c}{\ln x}\,dx$ ، فقط نقطه $x=1$ باعث ناسرگی انتگرال می‌شود. پس در $x=1$ تابع تحت انتگرال را بررسی می‌کنیم:

$$(1-c)\frac{1}{\ln x}$$

اگر $c \neq 1$ باشد داریم: $\ln x \sim x-1 \;:\; x \to 1$ ، بنابراین:

$$(1-c)\frac{1}{\ln(x)} \sim (1-c)\frac{1}{x-1}$$

که در نقطه $x=1$ واگراست. پس شرط همگرایی $c=1$ است.

**۳۵- (۱)**

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \int_0^\infty e^{-kx}\cos\lambda x\,dx = L\{\cos\lambda x\}_{s=k} = \left.\frac{s}{s^2+\lambda^2}\right|_{s=k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{k}{k^2+\lambda^2} \xrightarrow{(\int d\lambda)} I = \int \frac{k}{k^2+\lambda^2}\,d\lambda = Arctan\frac{\lambda}{k}$$

**۳۶- (۳)**

$x=0$ نقطه غیرعادی معادله است، با تقسیم طرفین معادله به ضریب $y''$ نتیجه می‌شود:

$$y'' + \frac{3}{4x}y' + \frac{3}{4x}y = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{3}{4x} \;;\; Q(x) = \frac{3}{4x}$$

برای بررسی منظم بودن این نقطه داریم:

$$\alpha = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{3}{4x} = \frac{3}{4} \qquad \beta \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{3}{4x} = 0$$

لذا، معادله مشخصه آن برابر است با:

$$r^2 + \left(\frac{3}{4}-1\right)r = 0 \Rightarrow r = 0\,,\,\frac{1}{4}$$

بنابراین، جواب‌های پایه مطابق گزینه (۳) خواهد بود.

**۳۷- (۳)**

به‌دلیل اینکه اختلاف گزینه‌ها در جواب خصوصی آنها می‌باشد، تنها همین جواب را از روش عملگر معکوس پیدا می‌کنیم:

$$y_p = \frac{1}{D^2-4D+3}\{20\cos x\} = 20\frac{1}{-1-4D+3}\{\cos x\} = 10\frac{1}{1-2D}\{\cos x\}$$

$$= 10(1+2D)\cdot\frac{1}{1-4D^2}\{\cos x\} = \frac{10}{5}(1+2D)\cos x = 2\cos x - 4\sin x$$

که تنها در گزینه سوم موجود است.

**۳۸- (۲)**

معادله مسیرهای اصلی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$C = \frac{y^2}{x^3} \xrightarrow{\text{مشتق}} 0 = \frac{2yy'x^3 - 3x^2y^2}{x^6} \Rightarrow 3x^2y^2 = 2yy'x^3$$

$$\Rightarrow \text{معادله دیفرانسیل حاکم بر مسیرهای اصلی}: y' = \frac{3}{2}\frac{y}{x}$$

حال تبدیل $y' \to \frac{-1}{y'}$ را اعمال می‌کنیم:

$$\frac{-1}{y'} = \frac{3}{2}\frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{-2}{3}\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = \frac{-2}{3}x\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \frac{y^2}{2} = \frac{-1}{3}x^2 + c \Rightarrow 2x^2 + 3y^2 = k^2$$

**۳۹- (۱)**

با توجه به تعریف انتگرال تلفیقی (کانوولوشن) معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y(t) = 4t - 3y * \sin t$$

( * علامت انتگرال تلفیقی است)

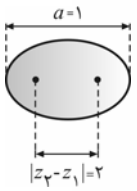
از طرفین این معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم ($L(y) = Y$):

$$Y = \frac{4}{s^2} - 3Y\cdot\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow Y\left(1+\frac{3}{s^2+1}\right) = \frac{4}{s^2} \Rightarrow Y = \frac{4(s^2+1)}{s^2(s^2+4)} = \frac{3s^2+s^2+4}{s^2(s^2+4)} = \frac{3}{s^2+4} + \frac{1}{s^2}$$

$$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{لاپلاس معکوس}} y(t) = \frac{3}{2}\sin 2t + t$$

**۴۰- (۲)**

با توجه به پاسخ سؤال ۴۰ از سال ۸۴، چون $|1-(-1)| = 2 > 1$ پس مجموعه تهی جواب است.




## مقاومت مصالح و تحلیل سازه‌ها

**۴۱- (۴)**

باتوجه به تقارن شکل، عضو صلب بدون دوران پایین آمده و لذا اعضای قائم تغییرطول برابر دارند. بنابراین مانند فنرهای موازی، نیروی $P$ به نسبت سختی این اعضا، بین آنها توزیع می‌شود.

$$\begin{cases} K_{Al} = \left(\frac{EA}{L}\right)_{Al} = \frac{E\times 2A}{L} = \frac{2EA}{L} \\ K_{St} = \left(\frac{EA}{L}\right)_{St} = \frac{3E\times A}{L} = \frac{3EA}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{Al} = P\times\frac{K_{Al}}{\sum K} = P\times\frac{\frac{2EA}{L}}{2\times\frac{2EA}{L}+\frac{3EA}{L}} = \frac{2}{7}P \\ F_{St} = P\times\frac{K_{St}}{\sum K} = P\times\frac{\frac{3EA}{L}}{2\times\frac{2EA}{L}+\frac{3EA}{L}} = \frac{3}{7}P \end{cases}$$

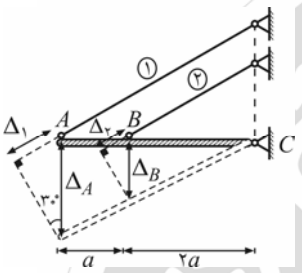
**۴۲- (۱)**

خرپای داده شده معین است و لذا تغییردرجه حرارت مجموعه، هیچ نیرویی در اعضای آن ایجاد نمی‌کند. بنابراین تغییرمکان افقی $B$ ، برابر مجموع تغییرطول حرارتی میله‌های افقی از $A$ تا $B$ می‌باشد و داریم:

$$\Delta_B = \sum \alpha \Delta T L = (۴\times۱۱\times۱۰^{-۶}\times۲۰\times۲)\times۱۰^{۳} = ۱/۷۶\ mm$$

**۴۳- (۳)**

تغییرشکل سازه به‌صورت زیر می‌باشد. با استفاده از روابط هندسی تغییرشکل رسم شده، داریم:




$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_A \times \sin ۳۰^\circ \ \Rightarrow\ \Delta_A = ۲\Delta_1 \\ \Delta_2 = \Delta_B \times \sin ۳۰^\circ \ \Rightarrow\ \Delta_B = ۲\Delta_2 \\ \dfrac{\Delta_A}{\Delta_B} = \dfrac{۳a}{۲a} = \dfrac{۳}{۲} \end{cases}$$

با فرض $EA$ یکسان برای میله‌ها داریم:

$$\Rightarrow \frac{۲\Delta_1}{۲\Delta_2} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{\dfrac{F_1 L_1}{EA}}{\dfrac{F_2 L_2}{EA}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{۳}{۲}\times\frac{L_2}{L_1}$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{۲a}{۳a} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{۳}{۲}\times\frac{۲}{۳} = ۱$$

**۴۴- (۴)**

باتوجه به تقارن شکل، تغییرطول اعضای قائم باهم مساوی می‌باشد. لذا این اعضا مانند فنرهای موازی عمل کرده و نیروی $P$ به نسبت سختی اعضا بین آنها توزیع می‌شود.

$$\begin{cases} K_1 = K_3 = \dfrac{۲EA}{۳L} \\ K_2 = \dfrac{EA}{۲L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = F_3 = P\times\dfrac{K_1}{\sum K} = P\times\dfrac{\dfrac{۲EA}{۳L}}{۲\times\dfrac{۲EA}{۳L}+\dfrac{EA}{۲L}} = \dfrac{۴P}{۱۱} \\ F_2 = P\times\dfrac{K_2}{\sum K} = P\times\dfrac{\dfrac{EA}{۲L}}{۲\times\dfrac{۲EA}{۳L}+\dfrac{EA}{۲L}} = \dfrac{۳P}{۱۱} \end{cases}$$

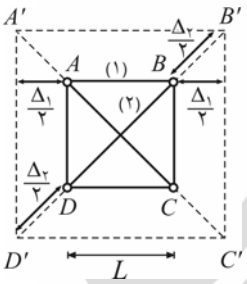
**۴۵- (۱)**

بار $P$ باید به مرکز سختی مجموعه اعمال شود. سختی محوری تمامی میله‌ها باهم برابر بوده و $\dfrac{EA}{L}$ می‌باشد. بنابراین مرکز سختی مجموعه وسط تیر صلب است.

$$x = x_S = L$$

**۴۶- (۱)**

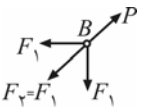
باتوجه به تقارن سازه، تغییرشکل آن نیز بصورت زیر و متقارن خواهد بود.




$$\frac{\Delta_1}{۲} = \left(\frac{\Delta_2}{۲}\right)\times\cos ۴۵^\circ \Rightarrow \Delta_1 = \Delta_2\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{F_1 L}{EA} = \frac{F_2\times L\sqrt{۲}}{EA}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow F_1 = F_2$$

همچنین با استفاده از تعادل نیروها در گره $B$، داریم:




$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow P\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = F_1 + F_1\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow F_1 = F_2 = P(\sqrt{۲}-۱)$$

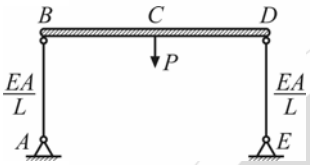
**۴۷- (۲)**

تغییرمکان نقطه $O$ ناشی از دو عامل زیر است:

$$\Delta_O = \Delta_{OC} + \Delta_C$$

$$\Delta_{OC} = (\frac{FL}{EA})_{OC} = \frac{PL}{EA}$$

تغییرمکان قائم $C$ باتوجه به تقارن شکل، با تغییرمکان قائم عضو صلب برابر است.




$$\Delta_C = \frac{P}{\sum K} = \frac{P}{۲\times\frac{EA}{L}} = \frac{PL}{۲EA}$$

بنابراین $\Delta_O$ برابر است با:

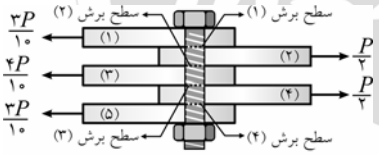
$$\Delta_O = \frac{PL}{EA} + \frac{PL}{۲EA} = \frac{۳PL}{۲EA}$$

**۴۸- (۱)**

سازه متقارن است. بنابراین تغییرطول میله‌ها باهم برابر بوده و این اعضا مثل فنرهای موازی عمل می‌کنند. بنابراین نیروی محوری عضو $BE$ برابر است با:

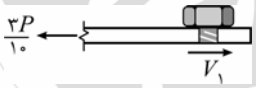
$$\begin{cases} F_{BE} = ۲P \times \frac{K_{BE}}{\sum K} \\ K_{BE} = \frac{EA}{L} \ , \ K_{AD} = K_{CF} = \frac{EA}{۲L} \end{cases} \Rightarrow F_{BE} = ۲P \times \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{EA}{L} + ۲\times\frac{EA}{۲L}} = P$$

**۴۹- (۲)**



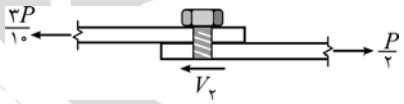

با توجه به شکل مقابل، این پیچ دارای ۴ سطح برش است و برای محاسبهٔ تنش برشی ایجاد شده در هر یک از این سطوح، ابتدا باید نیروی برشی در مقطع پیچ را محاسبه کرد:

تعادل ورق (۱) :




$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow V_۱ = \frac{۳P}{۱۰} \Rightarrow \tau_۱ = \frac{V_۱}{A} = \frac{۳P}{۱۰A}$$

تعادل ورق‌های (۱) و (۲) :




$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow \frac{۳P}{۱۰} + V_۲ = \frac{P}{۲} \Rightarrow V_۲ = \frac{۲P}{۱۰} = \frac{P}{۵} \Rightarrow \tau_۲ = \frac{V_۲}{A} = \frac{P}{۵A}$$

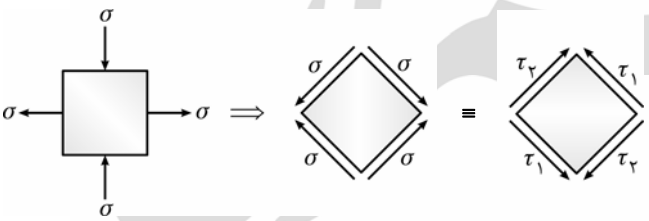
از طرفی با توجه به تقارن مجموعه حول ورق (۳)، مقدار $\tau_۱ = \tau_۴$ و $\tau_۲ = \tau_۳$ می‌باشد.

$$\tau_۳ = \tau_۲ = \frac{P}{۵A} \ , \ \tau_۱ = \tau_۴ = \frac{۳P}{۱۰A}$$

در نتیجه بیشترین تنش برشی در سطوح برش (۱) و (۴) ایجاد شده و مقدار آن $\frac{۳P}{۱۰A}$ است.

**۵۰- (۴)**

المان معادل المان (۱)، مشابه المان وسط است.




$\tau_۲$ و $\tau_۱$ در المان قراردادی صورت سؤال، در خلاف جهت تنش‌های برشی $\sigma$ رسم شده در المان وسط است و علامت $\tau_۱$ و $\tau_۲$ با توجه به مختلف‌الجهت بودن با تنش‌های برشی $\sigma$، هر دو منفی است اما مقدار هر دو با $\sigma$ برابر است. $\tau_۱ = \tau_۲ = -\sigma$

**۵۱- (۳)**

باتوجه به مفهوم کرنش، تغییر طول استوانه برابر است با:

$$\Delta L = \varepsilon_L \times L = \varepsilon_z \times D$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \quad , \quad \sigma_z = \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4P}{\pi D^2}$$

برای یافتن $\sigma_x$ و $\sigma_y$، از سازگاری تغییرشکل‌ها در امتداد محورهای $x$ و $y$ استفاده می‌کنیم. چون از تغییرشکل استوانه در این دو امتداد جلوگیری شده است، داریم:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 0 \Rightarrow \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu\sigma_z}{E} = 0 \\ \varepsilon_y = 0 \Rightarrow \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu\sigma_z}{E} = 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_x + \sigma_y = \frac{2\nu\sigma_z}{1-\nu}$$

با جایگذاری $\sigma_x + \sigma_y$ در رابطه $\varepsilon_z$، داریم:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}\left(\frac{2\nu\sigma_z}{1-\nu}\right) = \frac{\sigma_z}{E}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right) = \frac{4P}{\pi D^2 E}\,\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}$$

بنابراین $\Delta L$ برابر است با:

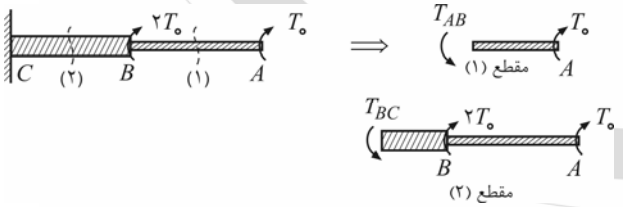
$$\Delta L = \varepsilon_z \times D = \frac{4P}{\pi DE}\,\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}$$

**۵۲- (۳)**

$$\frac{\tau_{AB_{max}}}{\tau_{BC_{max}}} = \frac{\left(\frac{TR}{J}\right)_{AB}}{\left(\frac{TR}{J}\right)_{BC}} = \frac{T_{AB}}{T_{BC}} \times \frac{R_{AB}}{R_{BC}} \times \frac{\frac{\pi R_{BC}^4}{2}}{\frac{\pi R_{AB}^4}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_{AB_{max}}}{\tau_{BC_{max}}} = \frac{T_{AB}}{T_{BC}} \times \left(\frac{R_{BC}}{R_{AB}}\right)^3$$

برای یافتن $T_{AB}$ و $T_{BC}$، کافیست مطابق شکل زیر، مقاطعی را در این اعضا درنظر بگیریم:




$$T_{AB} = T_0$$

$$T_{BC} = 3T_0$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\tau_{AB_{max}}}{\tau_{BC_{max}}} = \frac{T_0}{3T_0} \times (2)^3 = \frac{8}{3}$$

**۵۳- (۲)**

برای آنکه ظرفیت پیچشی دو مقطع با مصالح یکسان باهم برابر باشد، باید تنش برشی ماکزیمم تحت لنگر پیچشی یکسان در دو مقطع باهم برابر باشد.

$$\underbrace{\tau_{max_1}}_{\text{مقطع قوطی}} = \underbrace{\tau_{max_2}}_{\text{مقطع لوله}} \Rightarrow \frac{Tt}{J_1} = \frac{Tt}{J_2} \Rightarrow J_1 = J_2$$

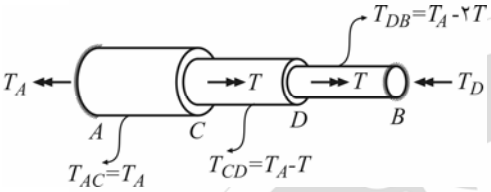
$$\begin{cases} J_1 = \dfrac{1}{3} a_{m_1} t^3 = \dfrac{4}{3} a t^3 \\ J_2 = \dfrac{1}{3} a_{m_2} t^3 = \dfrac{2\pi}{3} R t^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} a t^3 = \frac{2\pi}{3} R t^3 \Rightarrow \frac{a}{R} = \frac{\pi}{2}$$

**۵۴- (۴)**

باتوجه به گیردار بودن دو انتهای $A$ و $B$، رابطه سازگاری این مسئله به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\varphi_{B/A}=0 \Rightarrow \varphi_{C/A}+\varphi_{D/C}+\varphi_{B/D}=0 \Rightarrow (\frac{TL}{GJ})_{AC}+(\frac{TL}{GJ})_{CD}+(\frac{TL}{GJ})_{DB}=0$$

اگر لنگر تکیه‌گاه $A$ را $T_A$ بنامیم، لنگر پیچشی ایجاد شده در قسمت‌های $AC$، $CD$ و $DB$ مطابق شکل مقابل می‌باشد:




با جایگذاری مقادیر لنگر پیچشی در رابطه سازگاری، داریم:

$$\frac{T_A\times L}{3GJ}+\frac{(T_A-T)\times L}{2GJ}+\frac{(T_A-2T)\times L}{GJ}=0 \Rightarrow T_A=\frac{15}{11}T \ , \ T_B=2T-T_A=\frac{7}{11}T$$

**۵۵- (۳)**

اگر تنش برشی $\tau_0$ در چسب ایجاد شود، با استفاده از روابط تعادل لنگر پیچشی برای قسمت دارای چسب داریم:

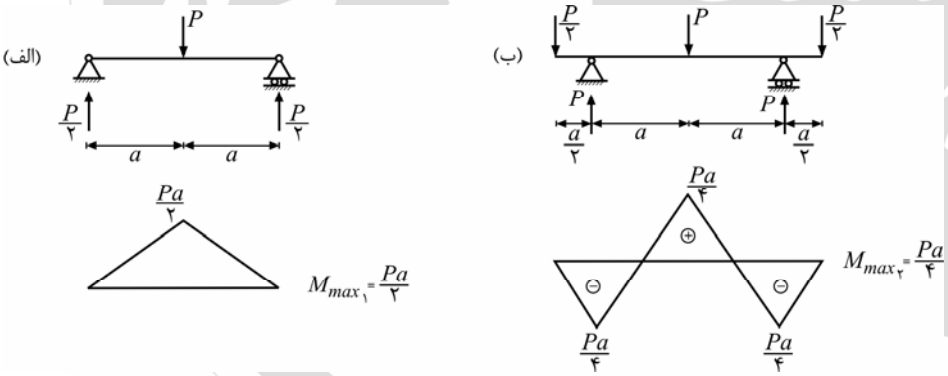
$$F=\tau\times PL \ , \ P_{(\text{محیط})}=2\pi R \Rightarrow F=2\pi RL\tau$$

$$T=FR \Rightarrow T=2\pi R^2L\tau \Rightarrow L=\frac{T}{2\pi R^2\tau}$$

**۵۶- (۴)**

تنش خمشی ماکزیمم در هر تیر برابر است با: $\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{S}$

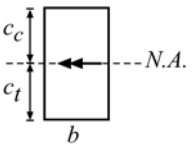
چون مقطع تیرها مشابه است، نسبت خواسته شده برابر نسبت لنگر ماکزیمم در تیرها می‌باشد. با توجه به نمودار لنگر خمشی در هر تیر، داریم:



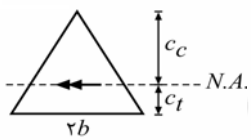

$$M_{max_1}=\frac{Pa}{2} \ , \ M_{max_2}=\frac{Pa}{4} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\sigma_{max_1}}{\sigma_{max_2}}=\frac{M_{max_1}}{M_{max_2}}=\frac{\frac{Pa}{2}}{\frac{Pa}{4}}=2$$

**۵۷- (۳)**

اگر تنش مجاز کششی را $\sigma_t=\sigma_0$ بنامیم، تنش مجاز فشاری $\sigma_c=2\sigma_0$ خواهد بود.




$$\begin{cases} c_c=c_t=\frac{h}{2} \\ \sigma_t=\frac{1}{2}\sigma_c=\sigma_0 \end{cases} \Rightarrow M_{a_1}=\frac{\sigma_t I_1}{c_t}=\frac{\sigma_0\times\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}}=\frac{bh^2}{6}\sigma_0$$




$$\begin{cases} c_c=2c_t=\frac{2h}{3} \\ \sigma_c=2\sigma_t=2\sigma_0 \end{cases} \Rightarrow M_{a_2}=\frac{\sigma_c I_2}{c_c}=\frac{2\sigma_0\times\frac{2bh^3}{36}}{\frac{2h}{3}}=\frac{bh^2}{6}\sigma_0$$

توجه شود که در مقطع (۲) اگر $M_{a_2}$ را برحسب پارامترهای کششی نیز حساب می‌کردیم، به همین جواب می‌رسیدیم. نسبت خواسته شده برابر است با:

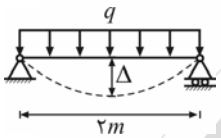
$$\frac{M_{a_1}}{M_{a_2}}=\frac{\frac{bh^2}{6}\sigma_0}{\frac{bh^2}{6}\sigma_0}=1$$

**۵۸- (۲)**

جریان برش در گزینه «۲» به درستی رسم شده است.

**۵۹- (۲)**

تیر موردنظر به‌صورت زیر بوده و تحت اثر وزنش قرار دارد.



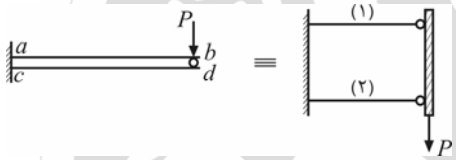

$$q=\gamma A=(۶\times۱۰^{-۳})\times(۱۰\times۱)=۶\times۱۰^{-۲}\ kgf/cm$$

$$\Delta=\frac{۵qL^{۴}}{۳۸۴EI}\ ,\ I=\frac{bh^{۳}}{۱۲}=\frac{۱۰\times۱^{۳}}{۱۲}=\frac{۱۰}{۱۲}$$

$$\Rightarrow\ ۳=\frac{۵\times۶\times۱۰^{-۲}\times(۲۰۰)^{۴}}{۳۸۴\times E\times\frac{۱۰}{۱۲}}\ \Rightarrow\ E=۰/۵\times۱۰^{۶}\ kgf/cm^{۲}$$

**۶۰- (۱)**

با کمی دقت در می‌یابیم شکل داده شده مشابه شکل سوال ۵۷ از آزمون سال ۱۳۸۴ می‌باشد.

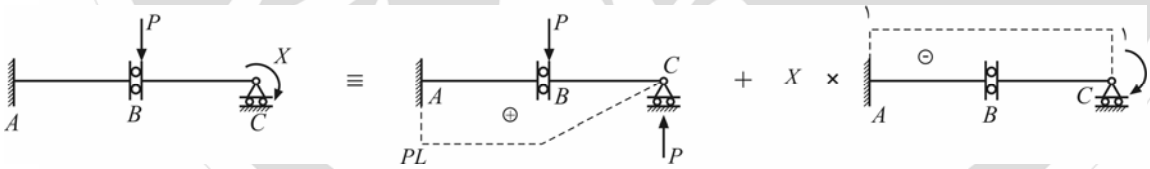



بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{(\sigma_{ab})_{max}}{(\sigma_{cd})_{max}}=\frac{c_{ab}}{c_{cd}}=\frac{\frac{h_{ab}}{۲}}{\frac{h_{cd}}{۲}}\ \overset{h_{cd}=۲h_{ab}}{=\!=\!=}\ \frac{۱}{۲}$$

**۶۱- (۴)**

برای حل از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. لنگر خمشی ایجاد شده در فنر پیچشی $C$ را به عنوان مجهول $X$ درنظر گرفته، داریم:




$$\begin{cases}\Delta_{۱۱}+X\delta_{۱۱}=-\theta_C=-\dfrac{X}{K_C}\\[2ex] \Delta_{۱۱}=\dfrac{-\frac{۱}{۲}\times PL\times L\times۱}{EI}+\dfrac{-PL\times L\times۱}{EI}=-\dfrac{۳PL^{۲}}{۲EI}\ ,\ \delta_{۱۱}=\dfrac{۱\times۲L\times۱}{EI}=\dfrac{۲L}{EI}\end{cases}$$

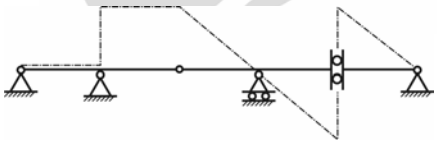
$$\Rightarrow\ -\frac{۳PL^{۲}}{۲EI}+\frac{۲LX}{EI}=-\frac{X}{(\frac{EI}{L})}=-\frac{XL}{EI}\ \Rightarrow\ X=\frac{PL}{۲}$$

**۶۲- (۳)**

با توجه به آنکه تغییرمکان گره داده شده، برابر $\Delta=fF$ است، باید لنگر خمشی در این نقطه از تیر مزدوج، $M=fF$ باشد. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

**۶۳- (۲)**

کافیست سمت راست تکیه‌گاه را به اندازه ۱ واحد بالا برده و مکانیزم تیر را در این حالت رسم نماییم.



**۶۴- (۱)**

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم.

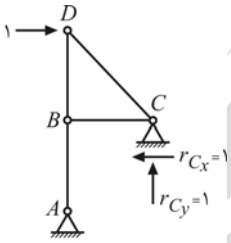
$$n = m + r - ۲j = ۴ + ۴ - ۲ \times ۴ = ۰$$

بنابراین سازه معین است و نیروی داخلی اعضای سازه تحت نشست‌های تکیه‌گاهی اتفاق افتاده، صفر می‌باشد.

پس در رابطه بار واحد، نیروهای $F_i$ صفر خواهند بود:

$$۱ \times \Delta_D + \underbrace{\sum \delta \times r}_{\text{ناشی از نشست‌های تکیه‌گاهی}} = \sum (\frac{FfL}{EA})_i$$

خرپای واحد به‌صورت مقابل تحلیل می‌شود:



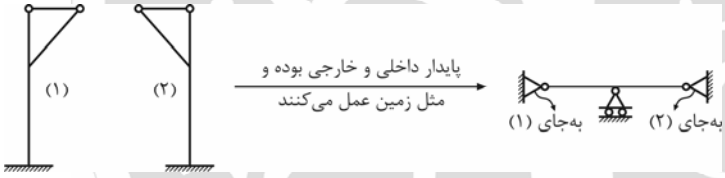

**سازه تحت اثر بار واحد مجازی**

بنابراین جابجایی افقی $D$ برابر است با:

$$۱ \times \Delta_D + ۱ \times ۱ + ۱ \times (-۱/۵) = ۰ \Rightarrow \Delta_D = ۰/۵\, cm$$

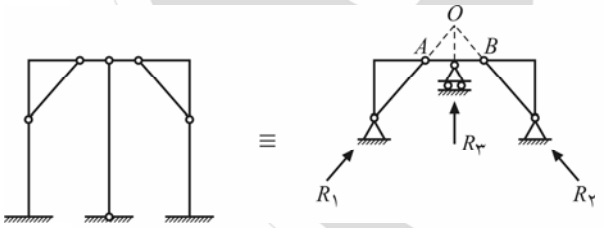
**۶۵- (۱)**

ابتدا سازهٔ گزینهٔ (۱) را بررسی می‌کنیم:




سازه بدست آمده، پایدار داخلی و خارجی می‌باشد. علت ناپایداری گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

گزینه (۲)

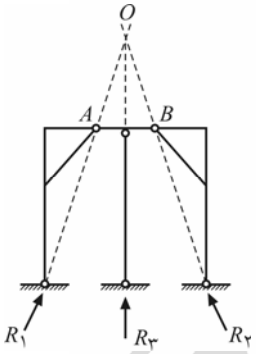



$(۱): \sum M_A = ۰ \Rightarrow$ امتداد $R_۱$، $AO$ می‌باشد

$(۲): \sum M_B = ۰ \Rightarrow$ امتداد $R_۲$، $BO$ می‌باشد

$\Rightarrow$ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی متقاربند

گزینه (۳)



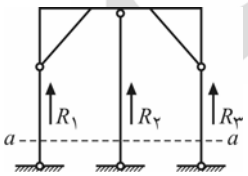

$(۱): \sum M_A = ۰ \Rightarrow$ امتداد $R_۱$، $AO$ می‌باشد

$(۲): \sum M_B = ۰ \Rightarrow$ امتداد $R_۲$، $BO$ می‌باشد

$\Rightarrow$ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی متقاربند

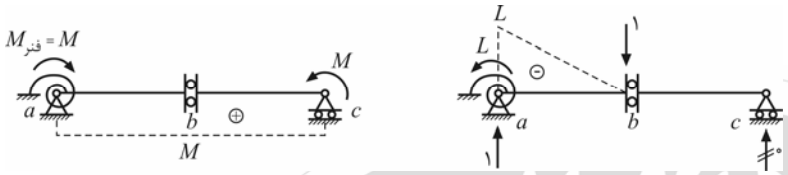
گزینه (۴)

همان‌طور که ملاحظه می‌شود اگر مقطع $a-a$ را در نظر بگیریم، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی موازی‌اند. (همگی در راستای قائم‌اند)



**۶۶- (۲)**

از روش بارواحد استفاده می‌کنیم.



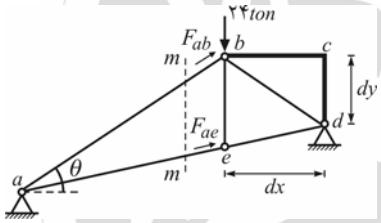

سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی — سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

$$1\times\Delta_{b_L} = \frac{A_M\,\bar{m}}{EI} + \frac{Mm}{K} = \frac{ML\times(-\frac{L}{2})}{EI} + \frac{M\,(-L)}{\frac{2EI}{L}} = -\frac{ML^2}{EI}$$

علامت منفی در رابطه فوق نشان می‌دهد که سمت چپ مفصل برشی به میزان $\frac{ML^2}{EI}$ به سمت بالا جابجا می‌شود.

**۶۷- (۴)**

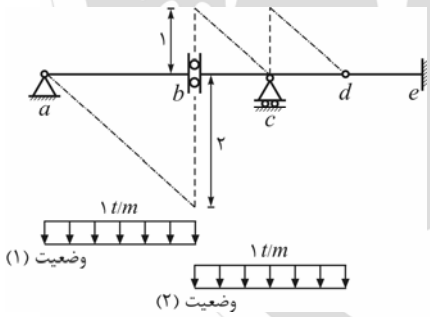
سمت راست مقطع $m-m$ را مطابق شکل مقابل درنظر گرفته، داریم:




$$\sum M_d = 0 \;\Rightarrow\; F_{ab}\times d = 24\times 2$$
$$\Rightarrow\; F_{ab}\cos\theta\times d_y + F_{ab}\sin\theta\times d_x = 48$$
$$\Rightarrow\; F_{ab}\left(\frac{4}{5}\times 1.5 + \frac{3}{5}\times 2\right) = 48$$
$$\Rightarrow\; F_{ab}\left(\frac{12}{5}\right) = 48 \;\Rightarrow\; F_{ab} = 20\,ton$$

**۶۸- (۳)**

خط تأثیر برش در سمت راست $c$ به‌صورت شکل مقابل است:

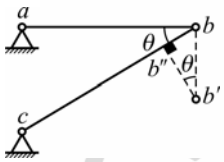



حداکثر برش سمت راست $c$ در یکی از ۲ وضعیت مشخص شده برای بار گسترده متحرک با طول متغیر اتفاق می‌افتد:

$$\begin{cases} V_{c_1} = wA = 1\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 4\right) = 4\,ton \\ V_{c_2} = wA = 1\times\left(2\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\right) = 2\,ton \end{cases} \Rightarrow\; V_{c_{max}} = max\,\{V_{c_1}, V_{c_2}\} = 4\,ton$$

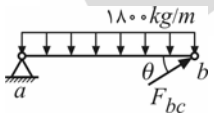
**۶۹- (۳)**

گره $b$ فقط در راستای قائم جابه‌جا می‌شود (عمود بر امتداد $ab$) بنابراین تغییر مکان این گره به صورت زیر خواهد بود:




$$\Delta_b = bb' = \frac{bb''}{\sin\theta}$$
$$\sin\theta = \frac{1.5}{2.5} = \frac{3}{5}$$
$$bb'' = \Delta_{bc} = \left(\frac{FL}{EA}\right)_{bc}$$

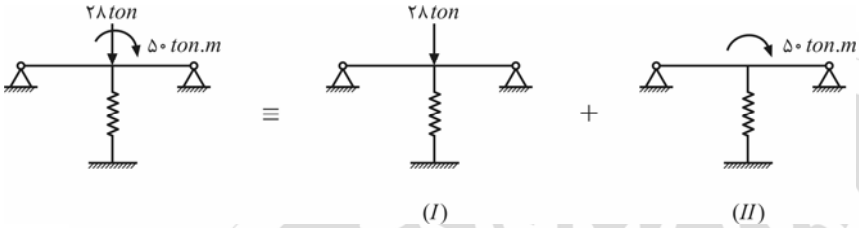
حال کافیست $F_{bc}$ را از تعادل نیروها به صورت زیر بیابیم:




$$\sum M_a = 0 \;\Rightarrow\; 1800\times\frac{2^2}{2} = F_{bc}\sin\theta\times 2 \xrightarrow{\sin\theta = \frac{3}{5}} F_{bc} = 3000\,kg$$
$$\Rightarrow\; bb'' = \Delta_{bc} = \frac{3000\times 2.5}{2500\times 10^3}\times 10^3 = 3\,mm \;\Rightarrow\; \Delta_b = \frac{3}{\frac{3}{5}} = 5\,mm$$

**۷۰- (۱)**

با استفاده از اصل جمع آثار، سازه را به‌صورت زیر تفکیک می‌کنیم:




$(I)$: تغییرمکان تیر در محل اثر نیرو، با تغییر طول فنر برابر است. لذا این دو عضو (تیر و فنر) مثل فنرهای موازی عمل می‌کنند:

$$F_{(I)\,\text{فنر}} = ۲۸ \times \frac{K_s}{K_s + K_{beam}} = ۲۸ \times \frac{۲۰۰}{۲۰۰ + \frac{۴۸EI}{L^۳}} = ۲۸ \times \frac{۲۰۰}{۲۰۰ + \frac{۴۸ \times ۵۴۰۰}{۶^۳}} \Rightarrow F_{(I)\,\text{فنر}} = ۴\,ton$$

$(II)$: سازه متقارن و بارگذاری روی آن پادمتقارن است. لذا $\Delta$ در وسط تیر صفر است.

$$\Delta_{\text{فنر}} = ۰ \Rightarrow F_{(II)\,\text{فنر}} = ۰$$

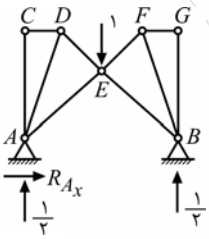
$$F_{\text{فنر}} = F_{(I)} + F_{(II)} = ۴ + ۰ = ۴\,ton$$

**۷۱- (۲)**

تغییر دما در حالت کلی در یک سازه نامعین موجب تنش و نیروی داخلی می‌شود ولی چنانچه تغییر دما به صورتی باشد که تغییر شکل‌ها در سازه نامعین سازگار باشند، هیچ نیروی داخلی در سازه ایجاد نشده و فقط سازه تغییر شکل را تجربه می‌کند. بارگذاری غیر مستقیم (تغییر دما، خطای ساخت، نشست تکیه‌گاهی و چرخش تکیه‌گاهی) نمی‌تواند در سازه معین تنش و نیرویی ایجاد کند و تحت اثر این عوامل، سازه معین دچار تغییر شکل می‌شود. در روش نیروها، از معادلات سازگاری به همراه معادلات تعادل استفاده می‌شود و نهایتاً متقارن بودن ماتریس نرمی نتیجه‌ای از قضیه دوجانبه بتی - ماکسول است که برای اعضای غیر منشوری نیز صادق است. با توجه به توضیحات فوق گزینه دوم صحیح است.

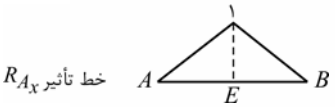
**۷۲- (۱)**

اگر بار روی $A$ و $B$ قرار گیرد، $R_{A_x} = ۰$ به‌دست می‌آید. بنابراین کافیست عکس‌العمل افقی $A$ $(R_{A_x})$ را در وضعیت قرارگیری بار روی $E$ بیابیم:



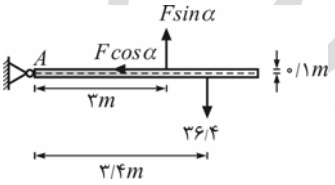

تقارن: $R_{A_y} = R_{B_y} = \frac{۱}{۲}$

$$AEDC: \sum M_E = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۲ = R_{A_x} \times ۱ \Rightarrow R_{A_x} = ۱$$




**۷۳- (۲)**

با توجه به خط تأثیر نیرو در کابل $CD$، هرچه فاصلهٔ بار از نقطهٔ $A$ بیشتر شود، نیرو در این کابل بیشتر می‌شود. بنابراین حداکثر نیرو زمانی در کابل رخ می‌دهد که $x = ۳/۴\,m$ باشد. $(۰/۱ < x < ۳/۴)$




$$\sum M_A = ۰$$

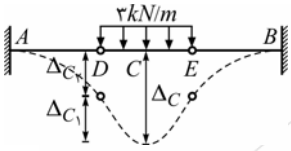
$$F \sin\alpha \times ۳ + F \cos\alpha \times ۰/۱ = ۳۶/۴ \times ۳/۴$$

$$F \times ۰/۲۱۲ \times ۳ + F \times ۰/۹۷۷ \times ۰/۱ = ۳۶/۴ \times ۳/۴$$

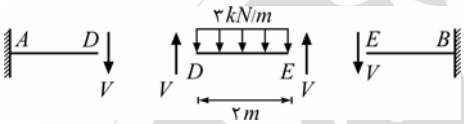
$$F = ۱۶۹\,kN$$

**۷۴- (۳)**

تغییرشکل سازه به‌صورت خط‌چین زیر است. ملاحظه می‌شود $\Delta_C$ ناشی از تغییر شکل خمشی عضوهای $DE$، $(\Delta_{C_1})$ و نیز $AD$ و $EB$ $(\Delta_{C_2})$ می‌باشد.




$$\Delta_C = \Delta_{C_1} + \Delta_{C_2}$$




$$DE : \sum M_E = ۰ \Rightarrow V \times ۲ = \frac{۳ \times ۲^۲}{۲} \Rightarrow V = ۳\ kN$$

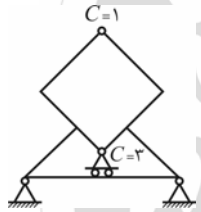
$$AD : \Delta_D = \frac{VL_{AD}^۳}{۳EI} = \frac{۳ \times ۱^۳}{۳EI} = \frac{۱}{EI} \Rightarrow \Delta_{C_2} = \frac{۱}{EI}$$

$$DE : \Delta_{C_1} = \frac{۵\,qL^۴}{۳۸۴EI} = \frac{۵ \times ۳ \times ۲^۴}{۳۸۴EI} = \frac{۵}{۸EI}$$

$$\Delta_{C\ \text{کل}} = \Delta_{C_1} + \Delta_{C_2} = \frac{۵}{۸EI} + \frac{۱}{EI} = \frac{۱/۶۲۵}{EI}$$

**۷۵- (۳)**

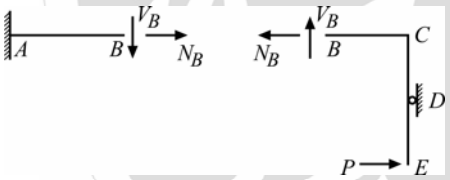
از روش حلقه برای تعیین درجه نامعینی استفاده می‌کنیم:




$$n = ۳k + r - (C + ۳) = ۳ \times ۳ + ۴ - (۴ + ۳) = ۶$$

**۷۶- (۱)**

قطعات $BCDE$ و $AB$ را جداگانه بررسی می‌کنیم.




$$BCDE : \sum F_y = ۰ \Rightarrow V_B = ۰$$

$$AB : \Delta_B = \frac{V_B L^۳}{۳EI} = ۰$$

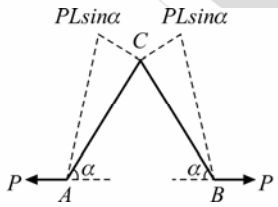
**۷۷- (۱)**

سازه متقارن و بارگذاری آن پاد متقارن است. لذا گره میانی $B$ جابجا نمی‌شود و فنر تغییر طول نخواهد داشت و نیروی آن صفر خواهد بود.

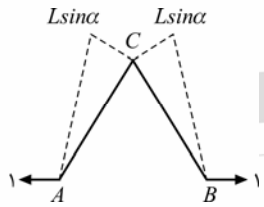
**۷۸- (۲)**

تغییرمکان نسبی $A$ و $B$ را در هر حالت از روش بار واحد می‌یابیم:

سازه (۱):




سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی

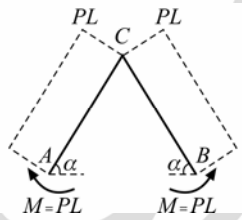



سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

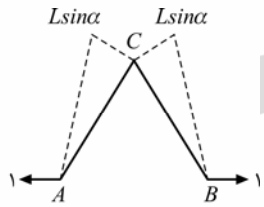
$$\Delta_{AB_1} = ۲ \times \frac{A_M\,\bar{m}}{EI} = ۲ \times \frac{\frac{۱}{۲}(PL\sin\alpha \times L) \times \frac{۲}{۳}L\sin\alpha}{EI}$$

$$\Rightarrow \Delta_{AB_1} = \frac{۲}{۳}\frac{PL^۳\sin^۲\alpha}{EI}$$

سازه (۲):




سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی




سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

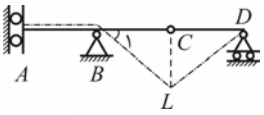
$$\Delta_{AB_2} = ۲ \times \frac{A_M\,\bar{m}}{EI} = ۲ \times \frac{PL \times L \times \frac{۱}{۲}L\sin\alpha}{EI}$$

$$\Rightarrow \Delta_{AB_2} = \frac{PL^۳\sin\alpha}{EI}$$

$$\frac{\Delta_{AB_1}}{\Delta_{AB_2}} = \frac{\frac{۲}{۳}\frac{PL^۳\sin^۲\alpha}{EI}}{\frac{PL^۳\sin\alpha}{EI}} = \frac{۲}{۳}\sin\alpha$$

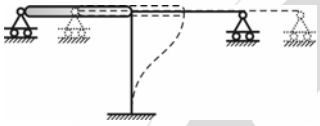
**۷۹- (۴)**

یک مفصل خمشی فرضی در $B$ قرار داده و دوران واحد در این نقطه ایجاد می‌کنیم. مکانیسم تیر حاصل که به صورت زیر رسم می‌شود، خط تأثیر ممان در نقطهٔ $B$ خواهد بود.



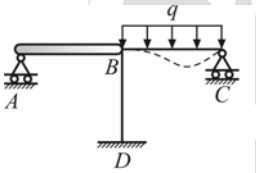

**۸۰- (۴)**

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{D_x} = ۰$$

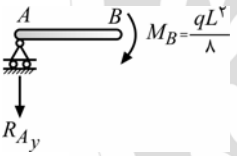


گره $B$ نمی‌تواند جابجایی قائم داشته باشد. همچنین عضو $BD$ باید به‌صورت عمود بر $AB$ و عضو $BC$ باید به‌صورت هم‌راستا با $AB$ به گره $B$ برسند. بنابراین تغییرشکل سازه باید به صورت مقابل باشد:

اگر $BD$ بخواهد به این صورت تغییرشکل بدهد، باید نمودار لنگر خمشی در این عضو تغییرعلامت بدهد. چراکه تقعر عضو تغییرکرده است. اما لازمه این امر وجود نیروی برشی در عضو $BD$ است و چون $R_{D_x} = ۰$، لذا $V_{BD} = ۰$ می‌باشد. پس هیچ‌گونه تغییرشکلی نمی‌تواند برای $BD$ ایجاد شود.




بنابراین $B$ مانند تکیه‌گاه گیردار برای تیر $BC$ عمل می‌کند و $M_{BC} = \frac{qL^۲}{۸}$ می‌باشد. تمامی این لنگر به $AB$ می‌رسد، زیرا $BD$ تغییرشکل ندارد. لذا می‌توان نوشت:




$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow R_A \times L = \frac{qL^۲}{۸} \Rightarrow R_A = \frac{qL}{۸}$$

## مکانیک خاک

**۸۱- (۳)**

نسبت نشانهٔ خمیری یک خاک چسبنده به درصد وزنی ذرات رسی کوچکتر از ۲ میکرون، عدد فعالیت $(A)$ نامیده می‌شود. بر همین اساس می‌توان نوشت:

$$A = \frac{PI}{\text{درصد ذرات رسی}} \Rightarrow A = \frac{۲۸}{۱۶} = ۱/۷۵ > ۱/۲۵ \Rightarrow \text{مونت‌موریلونیت}$$

**۸۲- (۱)**

طبق سیستم طبقه‌بندی متحد، مقدار حداقل $C_u$ در خاک خوب دانه‌بندی شده برای ماسه ۶ و برای شن ۴ می‌باشد. در این حالت محدودهٔ قابل قبول $C_c$ نیز بین ۱ و ۳ است.

$$\begin{cases} \text{ماسه خوب‌دانه‌بندی شده}: C_u \geq ۶ \quad , \quad ۱ \leq C_c \leq ۳ \\ \text{شن خوب‌دانه‌بندی شده}: C_u \geq ۴ \quad , \quad ۱ \leq C_c \leq ۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_c = \dfrac{D_{۳۰}^۲}{D_{۱۰} \times D_{۶۰}} \\ ۱ \leq C_c \leq ۳ \end{cases} \Rightarrow ۱ \leq \frac{D_{۳۰}^۲}{۵ \times ۰/۶} \leq ۳ \Rightarrow \sqrt{۳} \leq D_{۳۰} \leq ۳ \Rightarrow ۱/۷\,mm \leq D_{۳۰} \leq ۳\,mm$$

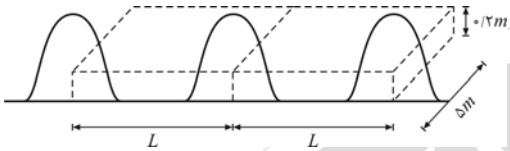
**۸۳- (۴)**

برای تعیین نوع خاک ریزدانه، داریم:

$$\begin{cases} PI = LL - PL = ۶۰ - ۵۰ = ۱۰ > ۷ \\ PI_A = ۰/۷۳\,(LL - ۲۰) = ۰/۷۳\,(۶۰ - ۲۰) = ۲۹/۲ \end{cases} \Rightarrow PI < PI_A \Rightarrow$$ خاک موردنظر زیر خط $A$ قرار دارد و لای $(M)$ است.

باتوجه به اینکه $LL = ۶۰ > ۵۰$ است، نتیجه می‌گیریم که حرف دوم نامگذاری $H$ بوده و نام خاک $MH$ است.

**۸۴- (۳)**




$$\begin{cases} \rho_{d\,\text{اجرایی}} = RC \times \rho_{d_{max}} = ۰/۹ \times ۲ = ۱/۸\ gr/cm^۳ \\ \rho_{d\,\text{قرضه}} = \dfrac{\rho_{\text{قرضه}}}{۱+\omega} = \dfrac{\left(\dfrac{۱۹/۸}{V_{\text{قرضه}}}\right)}{۱+۰/۱} = \dfrac{۱۸}{V_{\text{قرضه}}} \\ V_{\text{اجرایی}} = ۵ \times ۰/۲ \times L = L \end{cases}$$

$L$ طول هر قطعه از خاکریز است که برابر فواصل تخلیه کامیون‌ها می‌باشد:

$$\frac{V_{\text{اجرایی}}}{V_{\text{قرضه}}} = \frac{\rho_{d\,\text{قرضه}}}{\rho_{d\,\text{اجرایی}}} \Rightarrow \frac{L}{V_{\text{قرضه}}} = \frac{\left(\dfrac{۱۸}{V_{\text{قرضه}}}\right)}{۱/۸} \Rightarrow L = ۱۰m$$

**۸۵- (۴)**

با استفاده از رابطه دامنه خمیری ($PI$) داریم:

$$\begin{cases} SL = ۲PI \\ PI = LL - PL \end{cases} \Rightarrow SL = ۲ \times (۴۰ - ۳۰) = ۲۰\%$$

یعنی میزان رطوبت خاک در حد انقباض برابر ٪۲۰ است. از طرفی می‌دانیم خاک در رطوبت حد انقباض، اشباع است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\omega G_s = S_r e \Rightarrow \omega_{SL} G_s = e \Rightarrow e = ۰/۲ \times ۲/۷ = ۰/۵۴$$

$$\gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{۱+e}\gamma_w \Rightarrow \gamma_{sat} = \frac{۲/۷ + ۰/۵۴}{۱+۰/۵۴} \times ۱۰ = ۲۱/۰۴\ kN/m^۳$$

**۸۶- (۲)**

ماسه زنده هنگامی قابل مشاهده است که در خاک ماسه‌ای جوشش رخ دهد. در این حالت ضریب اطمینان خاک ماسه‌ای در برابر جوشش مساوی یک بوده و گرادیان هیدرولیکی آن با گرادیان هیدرولیکی بحرانی‌اش برابر می‌شود. گرادیان هیدرولیکی بحرانی نیز برای اکثر خاکها بین ۰/۹ تا ۱/۱ بوده و می‌توان گفت به‌طور متوسط در حدود یک است.

**۸۷- (۴)**

لایه بالایی را با اندیس (۱) و لایه ضخیم پایینی را با اندیس (۲) نشان داده و با فرض عمود بودن امتداد جریان بر سطح لایه‌ها، می‌نویسیم:

$$Q_۱ = Q_۲ \Rightarrow k_۱ A_۱ \left(\frac{\Delta h_۱}{L_۱}\right) = k_۲ A_۲ \left(\frac{\Delta h_۲}{L_۲}\right) \xrightarrow{A_۱ = A_۲} (۲k)\left(\frac{\Delta h_۱}{H}\right) = (k)\left(\frac{\Delta h_۲}{۲H}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta h_۲ = ۴\Delta h_۱ \quad (I) \text{ رابطه} \quad \text{و} \quad \Delta h_۱ + \Delta h_۲ = \Delta H \quad (II) \text{ رابطه}$$

از روابط ($I$) و ($II$) نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta h_۱ = ۰/۲\Delta H \quad , \quad \Delta h_۲ = ۰/۸\Delta H \Rightarrow \frac{\Delta h_۲}{\Delta H} = ۰/۸ = ۸۰\%$$

**۸۸- (۳)**

با استفاده از رابطه $\Delta\sigma_z = q\left[\dfrac{BL}{(B+z)(L+z)}\right]$، می‌نویسیم:

$$\frac{\Delta\sigma_{z_C}}{\Delta\sigma_{z_D}} = \frac{\left[\dfrac{P}{(B+z_C)(L+z_C)}\right]}{\left[\dfrac{P}{(B+z_D)(L+z_D)}\right]} = \frac{(B+z_D)(L+z_D)}{(B+z_C)(L+z_C)} = \frac{(B+۳B)(۲B+۳B)}{(B+B)(۲B+B)} = \frac{۴B \times ۵B}{۲B \times ۳B} = \frac{۱۰}{۳}$$

**۸۹- (۱)**

رابطه ارائه شده در صورت سؤال، همان رابطه $\Delta H = \dfrac{H_۰}{۱+e_۰} C_c \log\left(\dfrac{\sigma'_f}{\sigma'_۰}\right)$ است. در این رابطه $H$ ضخامت کل لایه بدون توجه به الگوی زهکشی می‌باشد. الگوی زهکشی مربوط به مبحث سرعت تحکیم است و در محاسبات نشست کل ناشی از تحکیم خاک رسی، هیچ نقشی ندارد.

**۹۰- (۲)**

باتوجه به یکسان بودن نسبت $\frac{L}{B}$ برای پی‌ها و صلب بودن هردوی آنها، ضریب تأثیر پی‌ها ( $I_p$) باهم برابر خواهد بود. از طرفی خاک زیر پی‌ها هم از یک جنس است، بنابراین $\mu$ و $E_s$ خاکها نیز باهم برابر است. از این‌رو می‌نویسیم:

$$\frac{S_{e_۲}}{S_{e_۱}}=(\frac{q_۲}{q_۱})(\frac{B_۲}{B_۱})=\frac{(\frac{P}{۲B\times ۲L})}{(\frac{P}{B\times L})}\times\frac{۲B}{B}=\frac{۱}{۴}\times ۲=\frac{۱}{۲}$$

**۹۱- (۱)**

ابتدا مقدار $m_v$ را به‌دست می‌آوریم:

$$m_v=\frac{(\frac{\Delta V}{V_\circ})}{\Delta\sigma'}\,,\ \frac{\Delta V}{V_\circ}=\frac{\Delta e}{۱+e_\circ}\ \Rightarrow\ m_v=(\frac{\Delta e}{۱+e_\circ})\times\frac{۱}{\Delta\sigma'}=(\frac{۰/۸-۰/۷}{۱+۰/۸})\times\frac{۱}{(۳۶۰-۱۶۰)}=\frac{۱}{۳۶۰۰}m^۲/kN$$

و سپس با استفاده از رابطه $C_v=\frac{k_z}{m_v\gamma_w}$ می‌نویسیم:

$$C_v=\frac{k}{m_v\gamma_w}\ \Rightarrow\ k=C_v\,m_v\,\gamma_w=(۰/۱۸\times ۱۰^{-۶})(\frac{۱}{۳۶۰۰})(۱۰)=۰/۵\times ۱۰^{-۹}\,m/s$$

**۹۲- (۴)**

در این‌جا دو لایهٔ خاک با مشخصات یکسان در اختیار داریم که درجه تحکیم و حداکثر مسافت زهکشی آنها متفاوت است، بنابراین براساس رابطه بین زمان، مسافت زهکشی و درجه تحکیم خواهیم داشت:

$$\frac{t_۲}{t_۱}=(\frac{U_۲}{U_۱})^۲(\frac{H_{dr_۲}}{H_{dr_۱}})^۲\ \Rightarrow\ \frac{t_۲}{۱}=(\frac{۲۰}{۴۰})^۲(\frac{۲۰}{۱۰\times\frac{۱}{۲}})^۲\ \Rightarrow\ t_۲=۴\ \text{سال}$$

**۹۳- (۲)**

لایه رسی در حالت (۲) توسط ماسه زهکش به دو قسمت تقسیم شده است که حداکثر مسافت زهکشی $(H_{dr})$ در قسمت بالایی برابر $\frac{۳H}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳H}{۸}$ و در لایه پایینی $\frac{H}{۴}$ می‌باشد. در این حالت بیشترین زمان لازم برای وقوع ۵۰ درصد نشست تحکیم در حالت (۲) به ازای مسافت زهکشی بیشتر یعنی $\frac{۳H}{۸}$ رخ می‌دهد. حال با مقایسه حالت (۱) و (۲) و توجه به این مطلب که درجه تحکیم هردو یکسان است، از رابطه زمان و مسافت زهکشی استفاده کرده و می‌نویسیم:

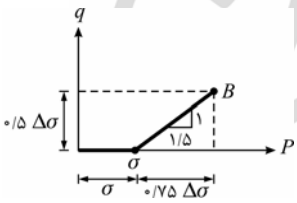
$$\frac{t_۲}{t_۱}=(\frac{H_{dr_۲}}{H_{dr_۱}})^۲=(\frac{\frac{۳H}{۸}}{H})^۲=\frac{۹}{۶۴}$$

**۹۴- (۱)**

باتوجه به بارگذاری انجام شده، $P$ و $q$ درحالت $B$ برابرند با:

$$\begin{cases}P_B=\frac{\sigma_h+\sigma_v}{۲}=\frac{(\sigma+\frac{\Delta\sigma}{۲})+(\sigma+\Delta\sigma)}{۲}=\sigma+۰/۷۵\,\Delta\sigma\\ q_B=\sigma_v-\sigma_h=(\sigma+\Delta\sigma)-(\sigma+\frac{\Delta\sigma}{۲})=۰/۵\,\Delta\sigma\end{cases}$$

حال با ترسیم نمودار مربوط به مسیر تنش خواهیم داشت:



**۹۵- (۲)**

$$q_u = ۲c_{UU}\, tan\,(۴۵+\frac{\phi_{UU}}{۲}) \;\Rightarrow\; ۲\sqrt{۳} = ۲\times۱\times tan\,(۴۵+\frac{\phi_{UU}}{۲}) \;\Rightarrow\; \phi_{UU} = ۳۰^\circ$$

$$\sigma_۱ = \sigma_۳ tan^۲(۴۵+\frac{\phi}{۲}) + ۲c\,tan\,(۴۵+\frac{\phi}{۲}) \;\Rightarrow$$

$$(۱+\Delta\sigma_d) = (۱)\,tan^۲(۴۵+\frac{۳۰}{۲}) + ۲\times۱\times tan\,(۴۵+\frac{۳۰}{۲}) \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_d = ۲(۱+\sqrt{۳})\,kg/cm^۲$$

**۹۶- (۴)**

لایهٔ ماسه‌ای در نقطه‌ای که تنش مؤثر آن خواسته شده، یک لایه آرتزین می‌باشد ولی در سمتِ راست پروفیل نشان داده شده در شکل، آزاد و غیر محبوس است.

به هنگام بارندگی زیاد در منطقه این لایه کاملاً اشباع می‌شود و سطح آب در آن تا سطح خاک بالا می‌آید. از آنجائیکه تراز پیزومتری نقاطِ لایه آرتزین، سطح آزاد آب در ناحیه‌ای دورتر و غیرمحبوس است، بنابراین می‌توان گفت که این سطحِ بالاآمدهٔ آب، تراز پیزومتری نقاط لایهٔ آرتزین از جمله نقطهٔ مرزی $A$ است. در شرایط اشباع کامل لایهٔ ماسه‌ای فشار آب حفره‌ای در نقطهٔ $A$ حداکثر بوده و تنش مؤثر حداقل به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$(\sigma'_{min})_A = \sigma_A - (u_{max})_A = (۱۵\times۱۰+۲۰\times۱۲)-(۱۰\times۲۲) = ۱۷۰\,kN/m^۲$$

**۹۷- (۱)**

صعود مویینگی همواره باعث افزایش تنش مؤثر در ناحیه صعود مویینگی و نواحی زیرِ آن می‌گردد. بنابراین تنها گزینهٔ (۱) صحیح می‌باشد.

**۹۸- (۱)**

به علت عدم حرکت خاک در نقطه $A$ شرایط فشار سکون برقرار است، در این حالت با لحاظ کردن قسمت‌های شیب‌دار خاک (بالاتر از سطح خاک در نقطه $A$ و در دو طرف نقطه $A$) به عنوان سربار (با شدت فرضی $q_\circ$) می‌توان نوشت:

$$\sigma_h = \sigma_v\, k_\circ \;,\; k_\circ = ۱-sin\,\phi \quad \text{خاک ماسه‌ای}$$

$$\sigma_h = (۱۰\times۱۵+q_\circ)\times(۱-sin\,۳۰) = ۷۵+۰/۵\,q_\circ > ۷۵\,kN/m^۲$$

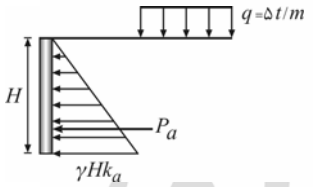
**۹۹- (۲)**

چنین به نظر می‌رسد که در این سؤال پایداری کوتاه‌مدت شیروانی مدنظر است (باتوجه به اطلاعات داده شده درصورت سؤال)، بنابراین با استفاده از رابطه ضریب اطمینان در این حالت، خواهیم داشت:

$$FS = \frac{\tau_f R^۲\theta}{Wd} \;,\; \tau_f = c_u \;\Rightarrow\; FS = \frac{(۲)(۳^۲)(\frac{\pi}{۲})}{(\frac{\pi}{۴}\times۳^۲\times۲)(\frac{۴\times۳}{۳\times\pi})} = \frac{\pi}{۲}$$

**۱۰۰- (۳)**

مقدار نیروی محرک وارد بر دیوار، با توجه به صفر بودن چسبندگی خاک پشت دیوار، برابر است با:

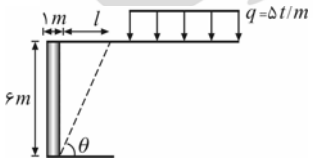



$$F_a = \frac{۱}{۲}\gamma H^۲ k_a = \frac{۱}{۲}\times۲\times(۶)^۲\times tan^۲(۴۵-\frac{۳۰}{۲}) = ۱۲\,t/m$$

و از آنجا لنگر ناشی از نیروی مذکور، حول پای دیوار، به‌دست می‌آید:

$$M_a = F_a(\frac{H}{۳}) = ۱۲\times(\frac{۶}{۳}) = ۲۴\,t.m/m$$

**تذکر**: بار $q = ۵\,t/m$ تأثیری بر نیروی محرک و لنگر ناشی از آن در پای دیوار را ندارد زیرا در این حالت بار وارده خارج از گوه محرک قرار دارد.




$$\theta = ۴۵+\frac{\phi}{۲} = ۴۵+\frac{۳۰}{۲} = ۶۰^\circ \quad \text{(زاویه سطح لغزش با امتداد افق)}$$

$$l = ۶\times cot\,۶۰ = ۳/۴۶\,m < ۵\,m$$

## مکانیک سیالات

**۱۰۱- (۲)**

نقاط $A$ و $B$ که به‌ترتیب در سطح آزاد شاخه‌های راست و چپ قرار دارند، هم‌فشارند (فشار نسبی آنها صفر است)، بنابراین می‌نویسیم:

$$\Delta y_{AB} = \frac{(r_A^۲ - r_B^۲)\omega^۲}{۲g} \Rightarrow L = \frac{(۹L^۲ - L^۲)\omega^۲}{۲g} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{۴L}}$$

**۱۰۲- (۳)**

افت انرژی ناشی از قرارگیری شیر در لوله برابر است با:

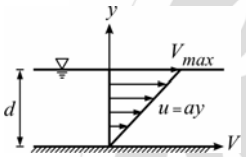
$$\Delta H = \frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{۲\times۱۰^۳}{۱۰۰۰۰} = ۰/۲\ m$$

و از آنجا به‌دست می‌آید:

$$\text{توان تلف شده} = \gamma Q \Delta H = (۱۰۰۰۰)(۲۰\times۱۰^{-۳})(۰/۲) = ۴۰W$$

**۱۰۳- (۲)**

ابتدا با استفاده از شرایط مرزی، پروفیل توزیع سرعت یعنی $u = f(y)$ را به‌دست می‌آوریم:




$$\begin{cases} y = d \\ u = V_{max} \end{cases} \Rightarrow V_{max} = ad \Rightarrow a = \frac{V_{max}}{d} \Rightarrow u = V_{max}(\frac{y}{d})$$

با توجه به خطی بودن پروفیل توزیع سرعت می‌توان نتیجه گرفت که سرعت متوسط مقطع برابر است با:

$$V = \frac{V_{max} + ۰}{۲} = \frac{۱}{۲}V_{max}$$

و در نهایت مقدار ضریب تصحیح انرژی جنبشی را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{۱}{A}\int (\frac{u}{V})^۳ dA = \frac{۱}{b\times d}\int \left[\frac{V_{max}(\frac{y}{d})}{\frac{۱}{۲}V_{max}}\right]^۳ (bdy) = (\frac{۸}{d^۴})\left[\frac{y^۴}{۴}\right]_۰^d = ۲$$

**توجه:** $b$ بعد عمود بر صفحه (عرض کانال) می‌باشد و فرض بر آن است که کانال مستطیلی است.

**۱۰۴- (۳)**

$$F = \rho Q U = \rho A_j U^۲,\ U = V_j - V_۰ \Rightarrow F = \rho A_j (V_j - V_۰)^۲$$

**توجه:** $U$ سرعت نسبی جت و اتومبیل است.

**۱۰۵- (۴)**

با نوشتن رابطهٔ پیوستگی در میدان دوبعدی (با شرط تراکم‌ناپذیر بودن جریان)، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = ۰ \Rightarrow ۲Ax + Bx = ۰ \Rightarrow B = -۲A$$

**۱۰۶- (۱)**

معادله خطوط جریان برای حالت دوبعدی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dx}{Ax^۲} = \frac{dy}{Bxy} \Rightarrow \frac{dx}{Ax} = \frac{dy}{By} \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} \ln x^B = \ln y^A + \ln k \Rightarrow x^B = ky^A$$

**۱۰۷- (۱)**

$$\text{نیروی شناوری}\ F_B = \gamma V = \rho g V \xrightarrow{g, V\ \text{ثابت‌اند}} F_B \propto \gamma \ \text{یا}\ F_B \propto \rho$$

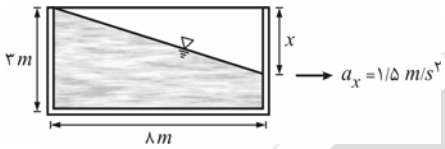
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش وزن مخصوص هوا، نیروی شناوری نیز کاهش می‌یابد.

**۱۰۸- (۴)**

می‌دانیم مرکز فشار همواره پایین‌تر از مرکز سطح قرار دارد، بنابراین در این سؤال بایستی پایین‌تر از محور $a-b$ باشد. از طرفی محور $a-b$ که از مرکز سطح مثلث می‌گذرد، محور تقارن مثلث است پس $\bar{I}_{xy} = ۰$ بوده و $x_p = \bar{x}$ خواهد شد. از مجموع بحث فوق چنین نتیجه می‌شود که مرکز فشار بر روی محور $c-d$ و در نقطه‌ای پایین‌تر از مرکز سطح $(c)$ قرار دارد.

**۱۰۹- (۱)**

وضعیت سطح آزاد آب در مخزن به هنگام حرکت شتابدار به‌صورت زیر است:

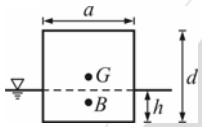



$$\tan\theta = \frac{a_x}{a_y + g} \Rightarrow \frac{x}{۸} = \frac{۱/۵}{۰+۱۰} \Rightarrow x = ۱/۲\ m$$

$$\text{حجم قسمت خالی مخزن} = \text{حجم آب بیرون ریخته} = \left(\frac{۱/۲\times ۸}{۲}\right)(۲) = ۹/۶\ m^۳$$

**۱۱۰- (۱)**

ابتدا با نوشتن رابطه تعادل نیروها در امتداد قائم، ارتباط بین $h$ و $d$ را می‌یابیم:




$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow W = F_B \Rightarrow \gamma_s V = \gamma_w V_d \Rightarrow (s\gamma_w)(a^۲ d) = (\gamma_w)(a^۲ h) \Rightarrow h = sd$$

شرط برقراری تعادل پایدار در یک جسم شناور آن است که ارتفاع متاسنتریک مثبت باشد، بنابراین می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \overline{MG} = \overline{MB} - \overline{GB} > ۰ \\ \overline{MB} = \dfrac{\gamma I_n}{W} = \dfrac{I_n}{V_d} = \dfrac{\frac{۱}{۱۲}a^۴}{a^۲ h} = \dfrac{۱}{۱۲}\left(\dfrac{a^۲}{h}\right) = \dfrac{a^۲}{۱۲sd} \Rightarrow \dfrac{a^۲}{۱۲sd} - \dfrac{d}{۲}(۱-s) > ۰ \Rightarrow \dfrac{a^۲}{d^۲} > ۶s(۱-s) \Rightarrow \dfrac{a}{d} > \sqrt{۶s(۱-s)} \\ \overline{GB} = \dfrac{d}{۲} - \dfrac{h}{۲} = \dfrac{d}{۲} - \dfrac{sd}{۲} = \dfrac{d}{۲}(۱-s) \end{cases}$$

**۱۱۱- (۲)**

جرم گاز در داخل حجم کنترل برابر است با:

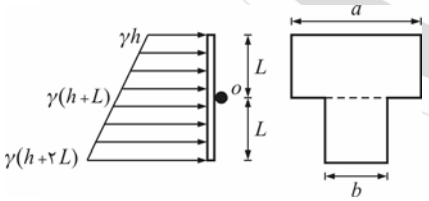
$$m = \int_{cv} \rho\, d\forall$$

با تغییر در حجم کنترل، جرم موجود در داخل آن تغییری نمی‌کند یعنی $\frac{dm}{dt} = ۰$ است. بنابراین می‌نویسیم:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{cv} \rho\, d\forall = ۰$$

**۱۱۲- (۳)**

برای باز شدن دریچه بایستی یک لنگر ساعتگرد حول لولا ایجاد شود. به‌عبارت دیگر چنانچه لولا را با $O$ نشان دهیم در آن صورت باید $M_O \geq ۰$ شود. با ترسیم نمودار توزیع فشار وارد بر دریچه (منشور فشار) خواهیم داشت:




$$\sum M_O \geq ۰ \Rightarrow (\gamma h)(L\times a)\left(\frac{L}{۲}\right) + \left(\frac{\gamma L + ۰}{۲}\right)(L\times a)\left(\frac{L}{۳}\right) - [\gamma(h+L)](L\times b)\left(\frac{L}{۲}\right) - \left(\frac{\gamma L + ۰}{۲}\right)(L\times b)\left(\frac{۲L}{۳}\right) \geq ۰$$

$$\frac{hLa}{۲} + \frac{L^۲ a}{۶} - \frac{(h+L)Lb}{۲} - \frac{L^۲ b}{۳} \geq ۰ \xrightarrow[\text{لحظه باز شدن دریچه}]{h=L} L^۲\left(\frac{a}{۲} + \frac{a}{۶} - \frac{۲b}{۲} - \frac{b}{۳}\right) \geq ۰ \Rightarrow \frac{a}{b} \geq ۲$$

**۱۱۳- (۴)**

ابتدا دبی عبوری جریان را محاسبه می‌کنیم:

$$Q = \int_A v\, dA = \int_۰^{n_۰} \frac{۴V_{max}}{n_۰}\left(n - \frac{n^۲}{n_۰}\right)(b\times dn) = \frac{۲}{۳}V_{max} n_۰ b = \frac{۲}{۳}(۱)(۰/۰۵)(۰/۵) = \frac{۵۰}{۳}\times ۱۰^{-۳}\ m^۳/s$$

سرعت متوسط در مقطعی با ارتفاع $n_۰ = ۵۰\ mm$ برابر است با:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\left(\frac{۵۰}{۳}\times ۱۰^{-۳}\right)}{(۰/۰۵\times ۰/۵)} = \frac{۲}{۳}\ m/s$$

**۱۱۴- (۴)**

مایع داخل مخزن ساکن بوده و تحت فشار $P$ می‌باشد. در اثر خروج مایع توسط لوله و تخلیه آن به اتمسفر، بار فشار به بار سرعت و تلفات تبدیل می‌شود:

$$\frac{P}{\gamma}=\frac{V^{۲}}{۲g}+\Delta H \quad \text{(معادله برنولی)}$$

با توجه به آرام (ورقه‌ای) بودن جریان مایع در داخل لوله می‌توان افت انرژی را با استفاده از رابطه هاگن ـ پوازی به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\Delta H=\frac{۳۲\mu VL}{\gamma D^{۲}}=\frac{(۳۲)(۰/۰۰۲)(۸)(۰/۰۲)}{(۱۰^{۴})(۰/۰۰۰۲)^{۲}}=۲۵/۶\ m$$

حال با جایگذاری مقدار به‌دست آمده برای تلفات، در معادله برنولی خواهیم داشت:

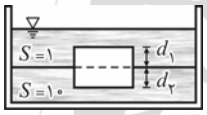
$$\frac{P}{۱۰}=\frac{۸^{۲}}{۲\times ۱۰}+۲۵/۶ \Rightarrow P=۲۸۸\ kPa$$

**۱۱۵- (۲)**

ابتدا وضعیت قرارگیری مکعب در آب را کنترل می‌کنیم:

$$\gamma_S=\frac{W_S}{V_S}=\frac{۳۵۱}{۰/۳^{۳}}=۱۳۰۰۰>۱۰۰۰۰ \Rightarrow \gamma_S>\gamma_W$$

یعنی مکعب در داخل آب ته‌نشین شده ولی به علت بزرگ بودن وزن مخصوص مایع زیرین، کمی در آن فرو می‌رود. در این حالت و با توجه به قرارگیری مکعب در آب و مایع زیرین، خواهیم داشت:




$$\sum F_y=۰ \Rightarrow W=F_B \ ,\ F_B=\gamma_۱V_۱+\gamma_۲V_۲$$
$$\Rightarrow ۳۵۱=(۱۰۰۰۰)(۰/۳^{۲}\times d_۱)+(۱۰\times ۱۰۰۰۰)(۰/۳^{۲}\times d_۲)$$
$$\Rightarrow ۳۵۱=۹۰۰(d_۱+۱۰d_۲) \Rightarrow d_۱+۱۰d_۲=۰/۳۹\ m$$

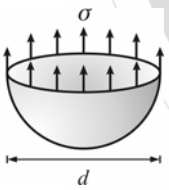
از طرفی می‌دانیم $d_۱+d_۲=۰/۳\ m$ است، بنابراین به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} d_۱+۱۰d_۲=۰/۳۹ \\ d_۱+d_۲=۰/۳ \end{cases} \Rightarrow d_۱=۰/۲۹\ m \ ,\ d_۲=۰/۰۱\ m=۱۰\ mm$$

یعنی کف مکعب ۱۰ میلی‌متر پایین‌تر از سطح آزاد مایع زیرین قرار دارد.

**۱۱۶- (۴)**

با نوشتن معادلهٔ تعادل در راستای قائم برای نیمکرهٔ تحتانی خواهیم داشت:




$$\sum F_y=۰ \Rightarrow \sigma\times(\pi d)=P\times(\frac{\pi d^{۲}}{۴}) \Rightarrow P=\frac{۴\sigma}{d}$$

مساحت تصویر سطح نیم‌کره در امتداد قائم = مساحت تصویر سطح نیم‌کره بر روی صفحه‌ای که بردار نرمال آن، راستای قائم است.

**۱۱۷- (۴)**

$$z_۱+\frac{P_۱}{\gamma}+\frac{V_۱^{۲}}{۲g}=z_۲+\frac{P_۲}{\gamma}+\frac{V_۲^{۲}}{۲g}+\Delta H+H_T \quad \text{و} \quad \Delta H=۰$$

$$۱+\frac{۱۵۴}{۱۰}+\frac{۶^{۲}}{۲\times ۱۰}=۰+\frac{-۲۰}{۱۰}+\frac{۲^{۲}}{۲\times ۱۰}+۰+H_T \Rightarrow H_T=۲۰\ m$$

$$N_u=\gamma QH_T=(۱۰)(۲۰۰\times ۱۰^{-۳})(۲۰)=۴۰\ kW$$

**۱۱۸- (۴)**

در یک لولهٔ جریان با مقطع ثابت، چون سرعت ثابت است جهت جریان با استفاده از انرژی هیدرولیکی $(\frac{P}{\gamma}+z)$ مشخص می‌شود. به این ترتیب که جریان همواره از نقطه‌ای که دارای انرژی هیدرولیکی بیشتر است به‌سمت نقطه‌ای که انرژی هیدرولیکی کمتری دارد، حرکت می‌کند (توجه شود که درمسیر جریان، پمپ نداریم). بنابراین باید انرژی هیدرولیکی در نقاط $A$ و $B$ را بیابیم:

$$\begin{cases} (\frac{P}{\gamma}+z)_A=\frac{۱۰}{\gamma}+۱۰=۱۰(\frac{۱}{\gamma}+۱) \\ (\frac{P}{\gamma}+z)_B=\frac{۱۱/۵}{\gamma}+۰=\frac{۱۱/۵}{\gamma} \end{cases}$$

برای مقایسه دو عبارت فوق حتماً بایستی مقدار $\gamma$ مشخص باشد، بنابراین اطلاعات مسئله برای تعیین جهت جریان کافی نمی‌باشد.

**۱۱۹- (۳)**

طبق رابطهٔ توریچلی سرعت خروج آب از روزنه برابر است با:

$$V_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times10\times5} = 10\ m/s$$

حال روزنه را نقطهٔ (۱) ومحل برخورد جریان با مکعب را نقطهٔ (۲) می‌نامیم. با نوشتن معادله برنولی بین این دو نقطه خواهیم داشت:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \xrightarrow{P_1 = P_2 = 0} 1/05 + \frac{10^2}{2\times10} + 0 = 0 + \frac{V_2^2}{2\times10} + 0 \Rightarrow V_2 = 11\ m/s$$

اگر نیرویی که از طرف آب به مکعب وارد می‌شود را $F$ بنامیم، با فرض برخورد قائم جت آب به مکعب، رابطه تعادل نیروها در راستای قائم را می‌نویسیم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W + F = F_B \quad , \quad F = \rho Q V_2 \quad , \quad Q = V_1 A_1 \text{ (برحسب جت خروجی از روزنه)}$$

$$\Rightarrow \gamma_S \forall + \rho Q V_2 = \gamma_w \forall \Rightarrow (\gamma_S)(1) + (1000)(0/011\times10)(11) = (10000)(1) \Rightarrow \gamma_S = 8790\ N/m^3$$

$$\Rightarrow S = \frac{\gamma_S}{\gamma_w} = \frac{8790}{10000} = 0/879$$

**۱۲۰- (۱)**

چون لوله‌ها با هم موازی‌اند، بنابراین افت انرژی در طول سه لوله با هم برابر است:

$$\Delta H_1 = \Delta H_2 = \Delta H_3 \ , \ \Delta H = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \xrightarrow{D,\ f \text{ ثابت}} L_1 V_1^2 = L_2 V_2^2 = L_3 V_3^2 \Rightarrow L_1 V_1^2 = 2L_1 V_2^2 = 4L_1 V_3^2$$

$$\Rightarrow V_1 = \sqrt{2}\, V_2 = 2V_3$$

## زبان عمومی و تخصصی

***قسمت A : لغت***

***دستورالعمل: شماره پاسخ (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) را که به بهترین شکل جمله را کامل می‌کند انتخاب نمایید.***

**۱- حتی به عنوان یک مرد جوان او به عنوان مدیر اجرایی آینده ..... .**

۱) تجهیز شده بود ۲) تلقی شده بود ۳) عرضه شده بود ۴) نگه داشته شده بود

گزینه ۲ صحیح است.

**۲- در ..... استثنایی، دانشجویان ممکن است ترتیب دهند تا در زمان‌های دیگری امتحان بدهند.**

۱) جایگزین‌ها ۲) اشارات ۳) موقعیت‌ها ۴) توزیع‌ها

گزینه ۳ صحیح است.

**۳- تابلو اعلاناتی وجود داشت که شغل‌های خالی و اطلاعاتی راجع به چگونگی تقاضا برای آنها را ..... .**

۱) تحمیل می‌کرد ۲) کنترل می‌کرد ۳) به نمایش می‌گذاشت ۴) منتقل می‌کرد

گزینه ۳ صحیح است.

**۴- بعد از یک ..... کامل که بیش از ۲ سال طول کشید، مدارک جدید کمی روشن شد.**

۱) روش ۲) بهره برداری ۳) سرمایه‌گذاری ۴) بررسی

گزینه ۴ صحیح است.

**۵- اندازه‌گیری‌های انجام شده باید به طور قابل توجهی کیفیت زندگی ساکنین را ..... .**

۱) وارد کند ۲) باعث شود ۳) حمایت کند ۴) بهتر کند

گزینه ۴ صحیح است.

**۶- پیشرفت‌های فناوری ..... می‌تواند حتی به از دست رفتن شغل‌های بیشتری منتهی شود.**

۱) به طور اتفاقی ۲) ذاتی ۳) در نهایت ۴) به روش تجربی

گزینه ۳ صحیح است.

**۷- با تکمیل کردن یک تکلیف طبق برنامه، شما ممکن است یک حس غرور و افتخار را در کارتان ..... .**

۱) اختصاص دهید ۲) کسب کنید ۳) تجربه کنید ۴) نگاه اجمالی بیندازید

گزینه ۳ صحیح است.

**۸- سکه‌های رومی که او به من نشان داد، ..... همان سکه‌هایی بودند که در باغ پیدا کرده بودم.**

۱) مهم ۲) مشخص ۳) نزدیک ۴) مانند

گزینه ۴ صحیح است.

**۹- درک عمیق ریاضیات برای تفسیر انواع گوناگون ..... طبیعی کافی است.**

۱) معیارها ۲) اصول ۳) پدیده‌ها ۴) عناصر

گزینه ۳ صحیح است.

**۱۰- قرن‌هاست کارهای خانه و خرید به عنوان ..... خانم‌ها شناخته شده است.**

۱) هدف‌های ۲) حوزه‌های فعالیت ۳) بخش‌های ۴) موقعیت‌های

گزینه ۲ صحیح است.

***قسمت B : گرامر***

***دستورالعمل: متن زیر را بخوانید و تصمیم بگیرید که کدام گزینه (۱) و (۲) و (۳) و (۴) به بهترین شکل جای خالی را پر می‌کند.***

روش‌های زیادی برای استخراج معادن وجود دارد، .....(۱۱)..... بر این اساس است که یک لایهٔ معدنی در کجای زمین .....(۱۲)..... . با وجود اینکه بعضی از لایه‌های معدنی بسیار .....(۱۳)..... هستند، دیگر (لایه‌ها) در روی یا .....(۱۴)..... سطح زمین قرار دارند. تعداد متفاوتی از روش‌های استخراج معدن .....(۱۵)..... که لایه‌ها نزدیک به سطح زمین واقع می‌شوند.

**۱۱-** ۱) که ۲) هر یک از آنها ۳) هر روش ۴) در حالی‌که هر یک از آنها

گزینه ۲ صحیح است.

**۱۲-** ۱) پیدا می‌شود ۲) پیدا کرد ۳) در حال پیدا کردن ۴) در حال پیدا شدن

گزینه ۱ صحیح است.

**۱۳-** ۱) دور ۲) عمیق ۳) از ۴) زیرزمین

گزینه ۳ صحیح است.

**۱۴-** ۱) در ۲) نزدیک ۳) درون ۴) بالای

گزینه ۲ صحیح است.

**۱۵-** ۱) استفاده می‌شوند هنگامی‌که ۲) که استفاده کردند

۳) هنگامی که استفاده شوند ۴) استفاده شدند

گزینه ۱ صحیح است.

***قسمت C : درک‌مطلب***

***دستورالعمل: متن‌های زیر را بخوانید و گزینه مناسب (۱)، (۲)، (۳) و یا (۴) را انتخاب کنید.***

**متن ۱**

***روش حس‌گر لیزری بکار گرفته شده در ساختار پل:***

در ساخت پل‌های کابلی (پل‌هایی که با کابل نگه داشته می‌شوند)، معلق و پل‌های قوسی که از کابل‌های آویز استفاده می‌کنند، ثابت نگه داشتن نیروها در عنصرهای کششی، بسیار مهم است. با این همه، اندازه‌گیری و اثبات آن نیروها می‌تواند روندی پرهزینه و زمان‌بر باشد. برای ساده‌سازی این مسائل، روش لیزر توسعه پیدا کرده است که می‌تواند بارهای کششی را بدون نیاز به تماس با کابل محاسبه و تأیید کند.

این روش یک ارتعاش‌سنج لیزری را به‌کار می‌گیرد که یک پرتوی لیزر را ساطع می‌کند. بازتاب این پرتو برای اندازه‌گیری فرکانس ارتعاش کابل استفاده می‌شود. هنگامی که فرکانس به‌دست آمد، از آن برای محاسبهٔ کشش در فرمول استفاده می‌شود که شامل ویژگی‌های کابل و داده‌های دیگر است. سپس نتایج حاصل می‌توانند با بارهای کششی تعیین شده توسط طراح مقایسه شوند. این روش برای کنترل پل‌های موجود سال‌هاست که استفاده می‌شود. با این حال فقط اخیراً از این روش در تأیید نیروهای موجود در عنصرهای کششی، در طی ساخت (پل) استفاده شده است.

**۱۶- این قسمت اشاره می‌کند که کنترل پل‌های موجود:**

۱) هر چند سال باید انجام شود.

۲) فقط ارزیابی چشمی اجزای سازه‌ای انجام می‌شود.

۳) با تخمین نیروهای کششی از فرکانس اندازه‌گیری شده در کابل‌ها انجام می‌شود.

۴) با چک کردن نیروهای کششی در کابل‌ها و مقایسهٔ آنها با مقادیر طراحی، انجام می‌شود.

باتوجه به عبارات زیر گزینه ۴ صحیح است.

- The frequency is used in a formula …… <u>to calculate tension.</u>
" The results can <u>be compared</u> with the tension loads <u>specified by the designer.</u>

**۱۷- کشش با ..... تغییر می‌کند.**

۱) فردی که از ارتعاش‌سنج استفاده می‌کند. ۲) خصوصیات کابل استفاده شده

۳) فاصله‌ای که در آن از لیزر استفاده می‌شود. ۴) اینکه آیا پل با کابل‌های آویز طراحی شده است یا نه.

باتوجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

The frequency is used in a formula that <u>includes the</u> cable's <u>specifications</u> …

**۱۸- از این قسمت، واضح است که ارتعاش‌سنج:**

۱) قبلاً برای سنجش پل‌ها استفاده شده است.

۲) توسط طراح پل تعیین شده است.

۳) برای استفاده آسان‌تر است، ولی در پروژه‌های کوچک مقرون به صرفه نیست.

۴) به‌طور مخصوص برای استفاده در پل‌هایی با کابل‌های آویز طراحی شد.

باتوجه به عبارت گزینه ۱ صحیح است.

This technique <u>has been used to</u> inspect existing bridges for several years …

## متن ۲

برای اندازه‌گیری نیروهای کششی در اجزای کابلی می‌توان از چندین روش استفاده کرد. یکی از این روش‌ها، کشش را مستقیماً توسط یک چکش هیدرولیکی اندازه‌گیری می‌کند. این روش «پرتاب» نام دارد. اما چکش‌های هیدرولیکی می‌توانند بزرگ و غیر دقیق باشند و یا استفاده از آنها مشکل باشد. روش دیگر مستلزم قرار دادن یک قاب بر روی کابل و فشار دادن آن علیه کابل به صورت جانبی در وسط آن است. این روند شامل تقریب قابل توجهی است که می‌تواند مهاجم (مخرب) باشد و نمی‌تواند در کابل‌هایی با قطرهای بزرگتر اعمال شود.

با این حال روش‌های اندازه‌گیری نیرو بر اساس ارتعاش، فرکانس ارتعاش کابل را برای محاسبهٔ کشش آن به کار می‌برند. بسیاری از مهندسین از شتاب‌دهنده‌ها و یا حس‌گرهای دیگر استفاده می‌کنند که باید به کابل متصل شوند تا فرکانس ارتعاش آن را اندازه‌گیری کنند. آنها همچنین از فرمولی با قدمت یک قرن استفاده می‌کنند که ارتعاش طناب‌هایی که محکم کشیده شده‌اند را اندازه‌گیری می‌کند. این فرمول در مصارف زیادی کارآمد است. اما در مورد کابل‌های سازه‌ای، پارامترهایی وجود دارند که این فرمول نمی‌تواند به آنها بپردازد. در مقابل، فرمولی که با ارتعاش‌سنج استفاده می‌شود شامل ویژگی‌هایی است که مخصوص کابل‌های پل است، برای مثال سختی خمشی، شکم دادن کابل و شرایط انتهای کابل.

**۱۹- برای اندازه‌گیری نیروهای کششی در کابل:**

۱) اصول برهم نهی باید به‌کار روند.

۲) لازم است اندازه‌گیری نیروی کششی در محل انجام شود.

۳) یک فرمول شناخته شده با امکانات جدید لیزری ترکیب شده است.

۴) برای سنجش مقاومت کابل باید آن را توسط ماشین آزمایش تا رسیدن به گسیختگی آزمایش کرد.

باتوجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

- One measures the tension directly using a hydraulic ram …
- Another method involves placing a frame on the cable …
- Many engineers use accelerometers …… that must be attached to the cable …

**۲۰- فرمول موجود برای درجه‌بندی کردن ارتعاش کابل:**

۱) مناسب نیست زیرا صدسال قدمت دارد.

۲) فقط برای طناب‌هایی که محکم کشیده شده‌اند مناسبند. از این رو نمی‌تواند در کابل‌های سازه‌ای استفاده شود.

۳) به سختی استفاده می‌شود زیرا نیازمند استفاده از شتاب‌دهنده و چکش هیدرولیکی است.

۴) برای کابل‌های پل مناسب نیست، زیرا ویژگی‌های مرتبط با آنها را در نظر نمی‌گیرد.

باتوجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

… when it comes to structural cables, there are parameters that this formula cannot address.

**۲۱- روش آزمایشی که از یک قاب استفاده می‌کند که روی کابل قرار گرفته است:**

۱) در واقع اساس روش جدیدتر ارتعاش‌سنج است.

۲) مناسب است زیرا از آن می‌توان در کابل‌ها با هر اندازه‌ای استفاده کرد.

۳) شامل متغیرهای زیادی است که ممکن است باعث نتایج غیردقیق شوند.

۴) به جز روش ارتعاش‌سنج، دقیق‌ترین روش آزمایشی است.

باتوجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

- This process (placing a frame on the cable) involves a great deal of approximation.

## متن ۳

علاوه بر فرمول تخصصی و توانایی اعمال این روش از راه دور، روش لیزری امتیازات دیگری هم عرضه می‌کند. برای مثال یک پل ممکن است نیازمند به بررسی و تأیید کابل‌های نگهدارنده‌اش باشد، قبل از اینکه عرشهٔ پل بتواند ساخته شود. همان‌طور که انتظار می‌رود یک مهندس به روزها آموزش ایمنی نیاز خواهد داشت تا سپس بتواند برای قرار دادن حس‌گرها روی کابل‌ها از پل آویزان شود. اما این روش لیزری این فرصت را برای مهندس ایجاد می‌کند تا روی سطحی، مثلاً یک پل دیگر، مجاور سازهٔ جدید بایستد و به دقت ارتعاش کابل را از دور اندازه‌گیری کند.

پرتوی لیزر می‌تواند در هر نقطه‌ای در طول کابل و با هر زاویه‌ای به آن برخورد کند، ولی اگر پرتوی لیزر عمودی هدایت شود و بر نقطه‌ای بین یک سوم طول کابل و وسط آن هدف‌گیری شود، بهترین نتایج حاصل می‌شود. معمولاً نیازی نیست برای ایجاد ارتعاشی که وسیله بتواند اندازه‌گیری کند به کابل ضربه بزنیم. زیرا اختلالات محیط مثل باد و ترافیک معمولاً برای ایجاد ارتعاش کافی هستند. این روش فقط به فضای کمی برای اپراتور و تجهیزات روی پل یا بیرون آن نیازمند است و باعث کمی اختلال ، اگر که به وجود آید، برای عملیات ساخت یا رفت و آمد می‌شود.

**۲۲- روش لیزری می‌تواند زمان آزمایش را کاهش دهد زیرا:**

۱) تجهیزات استفاده شده کم حجم است.
۲) آزمایش می‌تواند زودتر در روند ساختمان پل انجام گیرد.
۳) قبل از استفاده نیازی به آموزش مخصوص ایمنی برای فرد آزمایش‌کننده وجود ندارد.
۴) فرمول مورد نیاز برای تفسیر نتایج لیزر در رایانهٔ استفاده شده از قبل نصب شده است.
با توجه به عبارات زیر گزینه ۳ صحیح است.

Typicallys an engineer would need to go through days of safty training … But The laser based technique makes it possible for the engineer to stand on the surface …

**۲۳- در پاراگراف دوم، کلمهٔ "impact" یعنی:**

۱) بریدن ۲) باعث حرکت شدن ۳) ضربه زدن به ۴) برخورد کردن با
گزینه ۴ صحیح است.

**۲۴- برای اندازه‌گیری ارتعاش با استفاده از ارتعاش‌سنج لیزری لازم است تا:**

۱) کابل‌های نگهدارنده بازرسی شوند.
۲) کابل‌ها را به ارتعاش در آوریم.
۳) برای قرار دادن حس‌گرها روی پل، از آن آویزان شد.
۴) لیزر را طوری هدف‌گیری کنیم که پرتو به کابل برخورد کند.
باتوجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

- The beam can impact the cable at any point along its length …

**۲۵- کدام‌یک از موارد زیر از منفعت‌های روش لیزری به حساب نمی‌آیند؟**

۱) می‌تواند از موقعیتی نزدیک انجام شود.
۲) می‌تواند ارتعاش را با حرکات طبیعی پل تشخیص دهد.
۳) می‌تواند کشش کابل را قبل از اینکه ساخت‌وساز شروع شود، پیش‌بینی کند.
۴) این روش در رفت و آمد یا ساخت و ساز روی پل مداخله نمی‌کند.
گزینه ۳ صحیح است.

***در ۵ سؤال زیر، جوابی را انتخاب کنید که به بهترین شکل هر مورد را به صورت تخصصی جواب می‌دهد:***

**۲۶- در مقابل با الگوی واکنش ارتجاعی خطی ساده، الگوی رفتار تنش - کرنش ثابت نیست و با اندازه و شکل ..... ، مواد استفاده شده و نوع بارگذاری تغییر می‌کند.**

۱) سختی ۲) عضو ۳) انرژی ۴) زمین‌لرزه
گزینه ۲ صحیح است.

**۲۷- ساختمان‌های چندطبقه، به عنوان سازه‌هایی با چند درجهٔ آزادی بهتر نشان داده می‌شوند که یک درجه آزادی در هر طبقه و یک مد طبیعی و زمان تناوبی ..... برای هر طبقه دارند.**

۱) ارتعاش ۲) ویژگی ۳) تراز ۴) دینامیک
گزینه ۱ صحیح است.

**۲۸- انتخاب سطح قابل قبول برای خطر زمین‌لرزه‌ای مسئله‌ای پیچیده است که شامل منظور کردن نتایج خسارات زمین‌لرزه به صورت اجتماعی و اقتصادی و همچنین درجهٔ احتمالی خطر فیزیکی به عبارت دیگر ..... کارگاه است.**

۱) لرزه‌خیزی ۲) حفاظت ۳) تخریب ۴) سازه‌های ضروری
گزینه ۱ صحیح است.

**۲۹- بزرگی، یک اندازه‌گیری کمّی از اندازهٔ یک زمین‌لرزه است که از محل مشاهده مستقل است، اما شدت یک اندازهٔ ..... از تأثیر یک زمین‌لرزه است.**

۱) لازم ۲) ابتدایی ۳) رسمی ۴) شخصی
گزینه ۴ صحیح است.

**۳۰- لرزه‌شناسی می‌تواند به عنوان علم و مطالعهٔ زمین‌لرزه و دلایل و تأثیرات و پدیده‌های مربوط به آنها معنی شود و ..... بـه طـور انحصاری به عنوان فرکانس بر واحد سطح زلزله در یک منطقهٔ معین تعریف شده است.**

۱) بزرگی ۲) لرزه‌خیزی ۳) به‌ندرت ۴) لرزه‌ای

گزینه ۲ صحیح است.

## ریاضیات

**۳۱- (۱)**

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=w_x\times 1+w_y\times(-1)=w_x-w_y$$

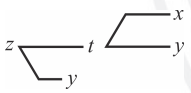
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}(w_x-w_y)$$

$$=\frac{\partial w_x}{\partial u}-\frac{\partial w_y}{\partial u}=\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$=(w_{xx}\times 1+w_{xy}\times 1)-(w_{yx}\times 1+w_{yy}\times 1)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

**۳۲- (۳)**

$$z=yf(x^2-y^2)\ \Rightarrow\ \begin{cases} z=yf(t)\\ t=x^2-y^2\end{cases}$$




$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=y.f_t'.2x\quad;\quad\frac{\partial z}{\partial y}=f(t)+y.f_t'.(-2y)$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه مذکور نتیجه می‌شود:

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=y^2(2xyf_t')+xy(f(t)-2y^2.f_t')$$

$$=2xy^3f_t'+xyf(t)-2xy^3.f_t'=xyf(t)=xy.\frac{z}{y}=xz$$

**۳۳- (۲)**

با توجه به بسط مکلوران سینوس داریم:

$$\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}+\cdots$$

$$\Rightarrow\ \sin(x-x^2)=x-x^2-\frac{(x-x^2)^3}{3!}+\frac{1}{5!}(x-x^2)^5+\cdots=x-x^2-\frac{1}{6}(x^3-3x^4+3x^5-x^6)+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

$$=x-x^2-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{2}+\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{5!}\right)x^5+\cdots=x-x^2-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{2}-\frac{59}{120}x^5+\cdots$$

**۳۴- (۳)**

ابتدا طرفین معادله را در $x$ ضرب می‌کنیم:

$$xf(x)=x^2e^x+\int_1^x f(t)\,dt$$

حال از طرفین این رابطه مشتق می‌گیریم:

$$f(x)+xf'(x)=2xe^x+x^2e^x+f(x)$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=2e^x+xe^x\ \xrightarrow{\int dx}\ f(x)=2e^x+xe^x-e^x+c=e^x+xe^x+c$$

اگر $x=1$ را در معادله اصلی قرار دهیم به دست می‌آوریم:

$$f(1)=e$$

بنابراین، با اعمال این شرط اولیه مقدار $c$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f(1)=e\ \Rightarrow\ e=e+e+c\ \Rightarrow\ c=-e$$

و نهایتاً خواهیم داشت:

$$f(x)=e^x+xe^x-e=(x+1)e^x-e$$

**۳۵- (۱)**

می‌دانیم که نقاط بحرانی تابع از حل دستگاه زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x^3-4x(1-x^2-y^2)=0\\ 4y^3-4y(1-x^2-y^2)=0\end{cases}$$

بنابراین، چون نقطه $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ در دستگاه فوق صدق می‌کند، از نقاط بحرانی تابع می‌باشد. حال $\Delta$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f_{xx}=12x^2-4+12x^2+4y^2=24x^2+4y^2-4$$
$$f_{yy}=12y^2-4+4x^2+12y^2=24y^2+4x^2-4$$
$$f_{xy}=8xy$$
$$\Rightarrow\ \Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(24x^2+4y^2-4)(24y^2+4x^2-4)-(8xy)^2$$

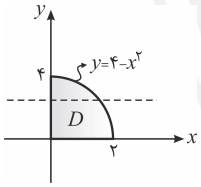
با قرار دادن نقطه $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ در عبارت $\Delta$ و $f_{xx}$ نتیجه می‌شود:

$$\Delta=\left(24\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}-4\right)^2-\left(\frac{8}{3}\right)^2>0\ ,\ f_{xx}>0$$

بنابراین، نقطه مورد نظر می‌نیمم نسبی است.

**۳۶- (۴)**

با توجه به آنکه شروع انتگرال‌گیری با متغیر $y$ ممکن نیست، ترتیب بازه‌های انتگرال را تغییر می‌دهیم:




$$\text{انتگرال}=\int_{y=0}^{4}\int_{x=0}^{\sqrt{4-y}}\frac{xe^{2y}}{4-y}\,dx\,dy$$
$$=\int_0^4\frac{e^{2y}}{4-y}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{4-y}}dy=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{e^{2y}}{4-y}\left(\sqrt{4-y}\right)^2dy$$
$$\frac{1}{2}\int_0^4 e^{2y}\,dy=\frac{1}{4}e^{2y}\Bigg|_0^4=\frac{1}{4}(e^8-1)$$

**۳۷- (۳)**

با تشکیل تابع لاگرانژ داریم:

$$L(x\ ,y\ ,z)=f(x\ ,y\ ,z)+\lambda g(x\ ,y\ ,z)\ \Rightarrow\ L(x\ ,y\ ,z)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

حال دستگاه زیر را تشکیل داده و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}L_x=0\\ L_y=0\\ L_z=0\\ g(x\ ,y\ ,z)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+2\lambda x=0\\ -2+2\lambda y=0\\ 2+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1}{2\lambda}\\ y=\dfrac{1}{\lambda}\\ z=\dfrac{-1}{\lambda}\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

معادلات اول تا سوم را در معادله چهارم قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=1\ \Rightarrow\ \frac{9}{4\lambda^2}=1\ \Rightarrow\ \lambda=\pm\frac{3}{2}$$

بنابراین، جواب‌های زیر حاصل می‌شود:

$$\lambda=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ (x\ ,y\ ,z)=\left(\frac{-1}{3}\ ,\frac{2}{3}\ ,\frac{-2}{3}\right)\ \Rightarrow\ f(x\ ,y\ ,z)=\frac{-1}{3}-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=\frac{-9}{3}=-3$$
$$\lambda=\frac{-3}{2}\ \Rightarrow\ (x\ ,y\ ,z)=\left(\frac{1}{3}\ ,\frac{-2}{3}\ ,\frac{2}{3}\right)\ \Rightarrow\ f(x\ ,y\ ,z)=\frac{9}{3}=3$$

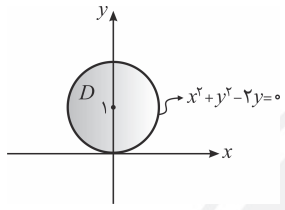
**۳۸- (۴)**

شرایط قضیه گرین برقرار است و در نتیجه:

$$P = e^x - yx^2 \ , \ Q = xy^2 - e^y$$

$$\text{انتگرال} = \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \iint_D (y^2 + x^2)\, dx\, dy$$

$$C : x^2 + y^2 = 2y \quad \text{یا} \quad r = 2\sin\theta$$




با استفاده از مختصات قطبی، داریم:

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{2\sin\theta} r^2 (r\, dr\, d\theta) = \int_0^{\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} 16 \sin^4\theta\, d\theta$$

$$= 4 \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \int_0^{\pi} (1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos(2\theta) + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta = \left(\frac{3}{2}\theta - \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\pi} = \left(\frac{3}{2}\pi - 0\right) = \frac{3\pi}{2}$$

**۳۹- (۲)**

با توجه به بسته بودن سطح $S$ ، از قضیه دیورژانس کمک می‌گیریم:

$$div\, \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z^2 + x^2 + y^2$$

لذا:

$$I = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iiint_V div\, F\, dv = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dv$$

که در آن $V$ حجم نیمکره بالایی به شعاع $a$ و مرکز مبدأ است. با استفاده از مختصات کروی می‌نویسیم:

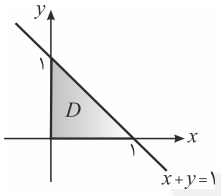
$$\Rightarrow I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{a} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a} \rho^4 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left(\frac{\rho^5}{5}\right)\Big|_{\rho=0}^{a} d\varphi = 2\pi \frac{a^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi a^5}{5} (-\cos\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi a^5}{5}$$

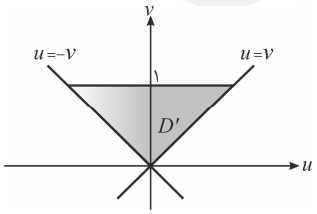
**۴۰- (۳)**

از تغییر متغیر $u = x - y$ و $v = x + y$ استفاده می‌کنیم:

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx\, dy = \frac{1}{2} du\, dv$$




$$\text{مرزهای قدیم} : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \longrightarrow \text{مرزهای جدید} : \begin{cases} \frac{u+v}{2} = 0 \Rightarrow u = -v \\ \frac{u-v}{2} = 0 \Rightarrow u = 1 \\ v = 1 \end{cases}$$




$$\Rightarrow \text{انتگرال} = \int_{v=0}^{1} \int_{u=-v}^{v} \cos\frac{u}{v} \left(\frac{1}{2}\right) du\, dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(v \sin\frac{u}{v}\right)\Big|_{u=-v}^{v} dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 v\, (\sin 1 + \sin 1)\, dv = \sin(1) \int_0^1 v\, dv = \sin(1) \left(\frac{v^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\sin(1)$$

**۴۱- (۲)**

ابتدا جواب عمومی معادله همگن را می‌یابیم:

معادله مشخصه : $m^3 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0 , \pm 2 \Rightarrow y_h = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$

و جواب خصوصی را از روش عملگر معکوس به‌دست می‌آوریم:

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 4D}\{e^{-2x}\} = x \cdot \frac{1}{3D^2 - 4}\{e^{-2x}\} = \frac{x}{8}e^{-2x}$$

بنابراین، جواب عمومی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + \frac{x}{8}e^{-2x}$$

**۴۲- (۴)**

معادله از نوع کشی اویلر بوده و دارای معادله مشخصه زیر است:

$$m(m-1) + 5m + 8 = 0 \Rightarrow (m+2)^2 = -4 \Rightarrow m = -2 \pm 2i$$

بنابراین، جواب عمومی آن برابر است با:

$$y = c_1 (x-2)^{-2} \cos\left(2 \ln|x-2|\right) + c_2 (x-2)^{-2} \sin\left(2 \ln|x-2|\right)$$

**۴۳- (۱)**

$x = 0$ یک نقطه غیرعادی معادله است، با تقسیم طرفین معادله بر ضریب $y''$ نتیجه می‌شود:

$$y'' - \frac{4}{3x(2+3x)}y' + \frac{4}{3x(2+3x)}y = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{-4}{3x(2+3x)} \ , \ Q(x) = \frac{4}{3x(2+3x)}$$

برای بررسی منظم بودن نقطه داریم:

$$\alpha = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{-4}{3x(2+3x)} = \frac{-2}{3} \ ; \ \beta = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \frac{4}{3x(2+3x)} = 0$$

بنابراین، معادله مشخصه آن برابر است با:

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{5}{3}r = 0 \Rightarrow r = 0 \ , \ \frac{5}{3}$$

چون تفاضل ریشه‌ها عددی صحیح نیست، لذا جواب‌های پایه‌ای مطابق گزینه (۱) هستند.

**۴۴- (۲)**

$$y' = \frac{2xy}{y^2 - x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2} \Rightarrow (y^2 - x^2)\,dy = 2xy\,dx \Rightarrow \underbrace{(2xy)}_{M}dx + \underbrace{(x^2 - y^2)}_{N}dy = 0 \Rightarrow M_y = N_x = 2x$$

بنابراین معادله کامل و جواب آن به‌صورت زیر است:

$$\int M\,dx + \int N^*\,dy = C \Rightarrow x^2 y + \frac{-y^3}{3} = C \xrightarrow[y=0]{x=4} 0 + 0 = C \Rightarrow C = 0$$

($N^*$، جملاتی از $N$ می‌باشند که شامل $x$ نیستند.)

$$\Rightarrow x^2 y - \frac{y^3}{3} = 0 \xrightarrow{y=1} x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**۴۵- (۱)**

کسر داده شده به صورت زیر تفکیک می‌شود:

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{\frac{1}{5}}{s-2} - \frac{\frac{1}{5}s + \frac{2}{5}}{s^2+1} = \frac{1}{5}\frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{5}\frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{5}\frac{1}{s^2+1}$$

با اعمال لاپلاس معکوس نتیجه می‌شود:

$$f(t) = \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t = \frac{1}{5}(e^{2t} - \cos t - 2\sin t)$$

**۴۶- (۴)**

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم $(L(y)=Y)$:

$$y''+4y=f(t) \Rightarrow s^2Y-sy(0)-y'(0)+4Y=F(s)$$

$$\Rightarrow (s^2+4)Y-3s+1=F(s) \Rightarrow Y(s)=\frac{3s}{s^2+4}-\frac{1}{s^2+4}+\frac{F(s)}{s^2+4}$$

با اعمال لاپلاس معکوس نتیجه می‌شود:

$$y(t)=3\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}(\sin 2t)*f(t)=3\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\int_0^t f(x)\cdot\sin 2(t-x)\,dx$$

**۴۷- (۲)**

این سؤال حالت خاصی از سؤال ۳۵ کنکور سال ۸۵ بوده که به‌ازای $a=1$ در جواب آن سؤال، گزینه دوم حاصل می‌شود.

**۴۸- (۴)**

**روش اول:**

با توجه به بسط مک لورن تابع $e^x$ داریم:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \xrightarrow{\times x} xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$e^x+xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}+1+2x$$

با جایگذاری $x=1$ به‌دست می‌آید:

$$e+e=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}+1+2 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=2e-3$$

**روش دوم:** با توجه به بسط مک لورن تابع $e^x$ داریم:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \xrightarrow{x=1} e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

با توجه به بسط فوق به حل سوال می‌پردازیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\ ,\ (N=n-1)=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-2=2e-3$$

**۴۹- (۳)**

با فرض $|x|<1$ داریم:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

با اعمال مشتق نسبت به $x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \overset{\times x}{\Rightarrow} \frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

با مشتق‌گیری مجدد از طرفین رابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1} \Rightarrow \frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\times x} \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n \Rightarrow \frac{x^2+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$$

**۵۰- (۱)**

این سری را به صورت زیر تفکیک می‌نماییم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}}{n-1}-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

چون اختلاف اندیس‌ها ۲ واحد است. دو جمله از اول و دو جمله از آخر را می‌نویسیم:

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{\infty}\right)=\frac{3}{4}$$

## مقاومت مصالح و تحلیل سازه‌ها

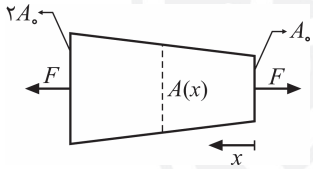
**۵۱- (۳)**

$$\sum M_A=0 \Rightarrow (F_{BC}\times\sin 30^\circ)\times 4a=10\times 3a \Rightarrow F_{BC}=15\ kN$$

$$\sigma_{BC}=\frac{F_{BC}}{A}=\frac{15\times 10^3}{10\times 10^{-4}}=15\times 10^6\ Pa=15\ MPa$$

**۵۲- (۲)**

باتوجه به متغیر بودن مساحت مقطع، تغییرطول میله از رابطه زیر بدست می‌آید:




$$A(x)=A_0\left(1+\frac{x}{L}\right)$$

$$\Delta=\int_0^L\frac{Fdx}{EA(x)}=\frac{F}{EA_0}\int_0^L\frac{dx}{1+\frac{x}{L}}=\frac{FL}{EA_0}Ln\left(1+\frac{x}{L}\right)\Big]_0^L=\frac{FL}{EA_0}Ln\,2$$

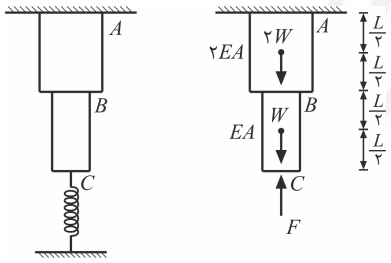
**۵۳- (۱)**

در مجموعه میله‌های متعامد، اگر سختی میله‌ها $(\frac{EA}{L})$ باهم برابر باشد، محل اثر نیرو فقط در راستای نیرو جابجا خواهد شد. بنابراین برای آنکه نقطه $O$ تغییرمکان افقی ندهد (و یا به عبارت دیگر در راستای قائم جابجا شود)، باید سختی محوری میله‌های $OA$ و $OB$ باهم برابر باشد. داریم:

$$\begin{cases}K_{OA}=K_{OB} \Rightarrow \left(\frac{EA}{L}\right)_{OA}=\left(\frac{EA}{L}\right)_{OB}\\ \tan\alpha=\frac{L_{OA}}{L_{OB}} \Rightarrow L_{OB}=L\cot\alpha\end{cases} \Rightarrow \frac{EA_0}{L}=\frac{E_0A}{L\cot\alpha}\Rightarrow A=A_0\frac{E}{E_0}\cot\alpha$$

**۵۴- (۲)**

فرض کنید نیروی فنر $F$ باشد. تغییرمکان انتهای قائم میله‌ها با تغییرطول فنر برابر است. بنابراین رابطه سازگاری سازه به صورت زیر می‌باشد:




رابطه سازگاری: $\Delta_C=\Delta_{\text{فنر}}$

$$\Delta_{\text{فنر}}=\frac{F}{K}=\frac{F}{\frac{2EA}{L}}=\frac{FL}{2EA}$$

$$\Delta_C=\Delta_{C/B}+\Delta_{B/A}=\left(\frac{WL}{2EA}-\frac{FL}{EA}\right)+\left(\frac{2WL}{2\times 2EA}+\frac{WL}{2EA}-\frac{FL}{2EA}\right)=\frac{3WL}{2EA}-\frac{3FL}{2EA}$$

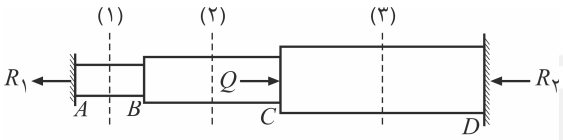
$$\Rightarrow\frac{3WL}{2EA}-\frac{3FL}{2EA}=\frac{FL}{2EA} \Rightarrow F=\frac{3W}{4}$$

**۵۵- (۲)**

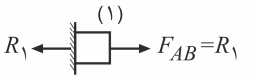
نقاط $A$ و $D$ نسبت به هم جابجا نمی‌شوند و داریم:

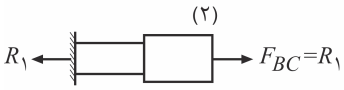
رابطه سازگاری: $\Delta_{AD}=0 \Rightarrow \Delta_{AB}+\Delta_{BC}+\Delta_{CD}=0 \Rightarrow \frac{F_{AB}\times L}{EA}+\frac{F_{BC}\times 2L}{2EA}+\frac{F_{CD}\times 3L}{3EA}=0 \Rightarrow F_{AB}+F_{BC}+F_{CD}=0$

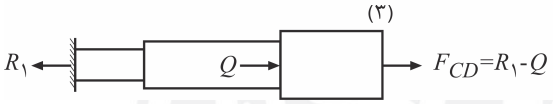
باتوجه به مقطع‌های مشخص شده در شکل زیر، نیروی هر قسمت بدست می‌آید:




$$\sum F_x=0 \Rightarrow R_1+R_2=Q$$



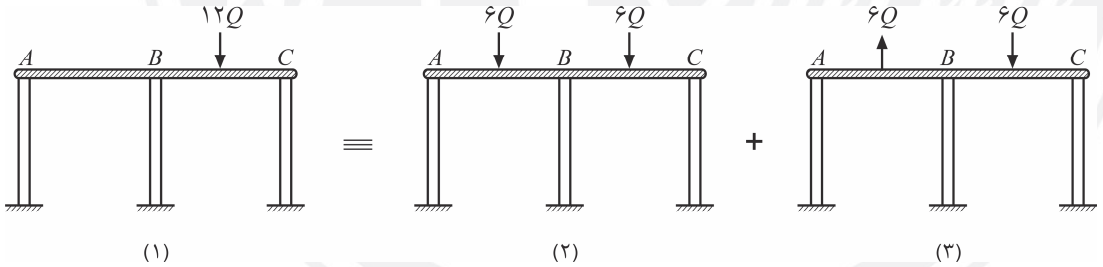




$$\Rightarrow R_1+R_1+(R_1-Q)=0 \Rightarrow R_1=\frac{Q}{3}\ ,\ R_2=Q-R_1=\frac{2Q}{3} \Rightarrow R_2=2R_1$$

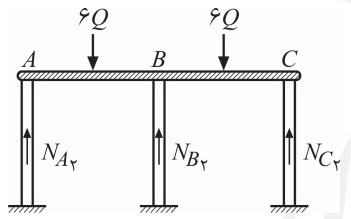
**۵۶- (۴)**

سازه داده شده متقارن است. بارگذاری آن را به‌صورت مجموع دو بارگذاری متقارن و پادمتقارن نوشته و هر سازه را با توجه به نکات سازه‌های متقارن و پادمتقارن، تحلیل می‌کنیم:



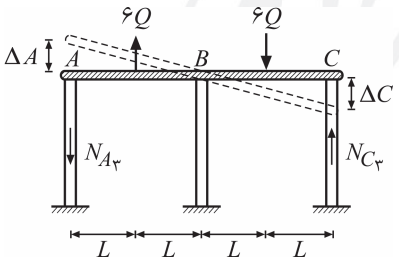

در شکل‌های بالا، بارگذاری سازه (۲) متقارن و بارگذاری سازه (۳) پادمتقارن است. حال تغییر شکل هر یک از سازه‌ها را بررسی می‌کنیم:

**سازه (۲):** این سازه و بارگذاری آن متقارن بوده و بنابراین تغییرشکل آن نیز باید متقارن باشد. در نتیجه عضو صلب به‌صورت افقی پایین آمده و تغییرطول ستون‌ها باهم برابر است. بنابراین بارهای قائم به نسبت سختی ستون‌ها، بین آنها توزیع می‌شود. با توجه به مشابه بودن ستون‌ها می‌توان نوشت:




$$N_{A_2}=N_{B_2}=N_{C_2}=\frac{2\times 6Q}{3}=4Q \quad \text{(فشاری)}$$

**سازه (۳):** در این سازه، نقطه $B$ هیچ‌گونه جابجایی قائمی نخواهد داشت. زیرا روی محور تقارن سازه قرار دارد. (بنابراین $N_{B_3}=0$ است) با استفاده از روابط تعادل استاتیکی داریم:




$$\sum M_A=0 \Rightarrow N_{C_3}\times 4L+6Q\times L=6Q\times 3L \Rightarrow N_{C_3}=3Q \quad \text{(فشاری)}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow N_{A_3}=3Q \quad \text{(کششی)}$$

و در نهایت نیروی محوری ستون‌ها برابر است با:

$N_A=4Q-3Q=Q$ (فشاری)

$N_B=4Q$ (فشاری)

$N_C=4Q+3Q=7Q$ (فشاری)

**۵۷- (۱)**

با توجه به توضیحات صورت تست، نقطهٔ مورد نظر بر روی یک سطح آزاد قرار دارد و یکی از تنش‌های اصلی در این نقطه صفر است ($\sigma_۳ = ۰$).
برای محاسبه تنش برشی ماکزیمم بایستی کرنش اصلی سوم محاسبه شود:

$$\varepsilon_۳ = -\frac{\nu}{۱-\nu}(\varepsilon_۱ + \varepsilon_۲) \Rightarrow \varepsilon_۳ = -\frac{۰/۲۵}{۱-۰/۲۵}(۳/۵\times۱۰^{-۴} + ۱\times۱۰^{-۴}) = -۱/۵\times۱۰^{-۴}$$

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_۱ = ۳/۵\times۱۰^{-۴} \ , \ \varepsilon_{min} = \varepsilon_۳ = -۱/۵\times۱۰^{-۴}$$

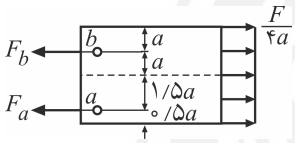
$$\frac{\gamma_{max}}{۲} = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{۲} \Rightarrow \gamma_{max} = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}$$

$$\Rightarrow \gamma_{max} = ۳/۵\times۱۰^{-۴} - (-۱/۵\times۱۰^{-۴}) = ۵\times۱۰^{-۴}$$

$$\tau_{max} = G\,\gamma_{max} = ۸\times۱۰^{۹}\times۵\times۱۰^{-۴} = ۴\times۱۰^{۶}\ Pa = ۴\ MPa$$

**۵۸- (۳)**

نیروی وارد بر پیچ‌ها را $F_a$ و $F_b$ درنظر گرفته و معادلات تعادل نیروها را به صورت زیر می‌نویسیم:




$$\sum M_a = ۰ \Rightarrow F_b \times ۲/۵a = \frac{F}{۴a}\times ۴a\times ۱/۵a \Rightarrow F_b = ۰/۶F$$

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_a = F - F_b = F - ۰/۶F = ۰/۴F$$

**۵۹- (۴)**

برای اعضای شکل‌پذیر، ضریب اطمینان به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F.S = \frac{\sigma_y}{\sigma_\omega}$$

در رابطه فوق $\sigma_y$، تنش تسلیم و $\sigma_\omega$، تنش مجاز می‌باشد. بنابراین در طراحی داده شده می‌توان نوشت:

$$F.S = \frac{\sigma_y}{\sigma_\omega} = \frac{۵}{۳}$$

از طرفی تحت اثر بار وارد شده، حداکثر تنش ایجاد شده در میله‌ها برابر است با:

$$P \text{ تحت بار}: \sigma_{max} = \sigma_۲ = ۰/۹\sigma_\omega \qquad (I)$$

اگر بار لازم برای تسلیم شدن یکی از میله‌ها را $P_y$ بنامیم، داریم، می‌توان گفت:

$$P_y \text{ تحت بار}: \sigma_۲ = \sigma_y \qquad (II)$$

حال از تقسیم روابط $(I)$ و $(II)$ برهم خواهیم داشت:

$$\frac{P}{P_y} = \frac{۰/۹\sigma_\omega}{\sigma_y} \Rightarrow P_y = \frac{P}{۰/۹}\times\frac{\sigma_y}{\sigma_\omega} = \frac{P}{۰/۹}\times\frac{۵}{۳} = \frac{۵}{۲/۷}P$$

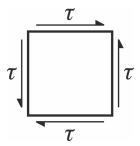
بنابراین با $\frac{۵}{۲/۷}$ برابر کردن $P$، یکی از میله‌ها (میله ۲) تسلیم می‌شود.

**۶۰- (۳)**

درحالت اول تنش فشاری ماکزیمم برابر است با:

$$\sigma_{max_۱} = \frac{Mc}{I} = \frac{MR}{I}$$

درحالت دوم مقطع تحت پیچش قرار می‌گیرد و المان‌های طولی آن، المان‌های برش خالص به‌صورت زیر می‌باشند. بنابراین تنش فشاری ماکزیمم در این المان باتوجه به خصوصیات المان برش خالص برابر است با:




$$\tau = \frac{TR}{J} \Rightarrow \sigma_{max_۲} = \tau = \frac{TR}{J}$$

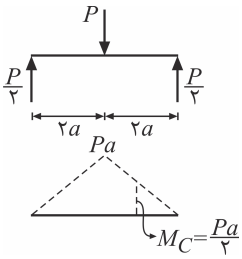
در مقطع لوله جدار نازک : $J = ۲I \Rightarrow \sigma_{max_۲} = \frac{TR}{۲I}$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sigma_{max_۱}}{\sigma_{max_۲}} = \frac{\frac{MR}{I}}{\frac{TR}{۲I}} \overset{T=M}{=\!=\!=} ۲$$

**۶۱- (۱)**

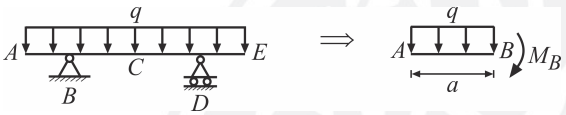
نمودار لنگر خمشی در عضو $AB$ به‌صورت زیر می‌باشد:




$$\sigma_{max_C} = \frac{M_C}{S} = \frac{\frac{Pa}{۲}}{\frac{b^۳}{۶}} = \frac{۳Pa}{b^۳}$$

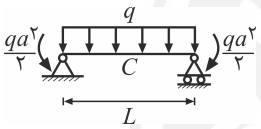
**۶۲- (۳)**

چون مقطع تیر ثابت است، برای برابر شدن تنش خمشی در نقاط ذکرشده، کافیست لنگرهای خمشی این نقاط باهم برابر باشند. اگر مقطعی در $B$ و $D$ از قسمت‌های $AB$ و $DE$ درنظر بگیریم، لنگر خمشی در این نقاط برابر است با:




$$M_B = M_D = \frac{qa^۲}{۲}$$

همچنین دهانه $BCD$ به‌صورت زیر بارگذاری می‌شود و لنگر خمشی در $C$ برابر است با:




$$M_C = \frac{qL^۲}{۸} - \frac{qa^۲}{۲}$$

از برابری لنگر در این نقاط، $a$ بدست می‌آید:

$$M_B = M_C = M_D \Rightarrow \frac{qa^۲}{۲} = \frac{qL^۲}{۸} - \frac{qa^۲}{۲} \Rightarrow \frac{a^۲}{L^۲} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \frac{a}{L} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

**۶۳- (۳)**

باید اساس مقطع هر دو تیر باهم برابر باشد. داریم:

مقطع دایره: $S_۱ = \frac{\pi R^۳}{۴}$

مقطع مستطیل: $S_۲ = \frac{b \times (۲b)^۲}{۶} = \frac{۲b^۳}{۳}$

$$S_۱ = S_۲ \Rightarrow \frac{\pi R^۳}{۴} = \frac{۲b^۳}{۳} \Rightarrow \frac{b}{R} = \frac{\sqrt[۳]{۳\pi}}{۲}$$

**۶۴- (۳)**

با استفاده از قاعده لغزاندن مقطع، ممان اینرسی آن را محاسبه می‌کنیم و تنش خمشی ماکزیمم را به دست می‌آوریم:

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I}$$

$$c = a$$

$$I = \pi a^۳ t + \left[\frac{(\frac{a}{۲})^۳ t}{۱۲} + \frac{a}{۲} \times t \times (a - \frac{a}{۴})^۲\right] + ۲ \times \left[\frac{(\frac{a}{۲} \times \sin ۳۰)^۳ \times (\frac{t}{\sin ۳۰})}{۱۲} + \frac{a}{۲} \times t \times (\frac{۳a}{۸})^۲\right] = \pi a^۳ t + \frac{۷}{۱۶} a^۳ t \simeq ۳/۶ a^۳ t$$

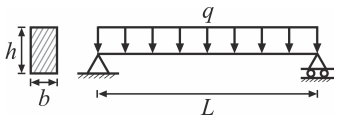
$$\Rightarrow \sigma_{max} = \frac{M \times a}{۳/۶ a^۳ t} \simeq \frac{۰/۲۷۸ M}{t a^۲}$$

گزینه‌های تست مناسب انتخاب نشده است. دیده می‌شود که جواب به‌دست آمده به گزینه‌های ۲ و ۳ نزدیک می‌باشد، اما گزینه «۳» صحیح‌تر به‌نظر می‌رسد!

**۶۵- (۴)**

نقطهٔ $A$ در سطح آزاد تنش قرار داشته و تنش برشی در آن صفر است. البته در این سؤال، مکعب مستطیل تعادل نداشته و نمی‌تواند بحثی در مورد مقدار تنش برشی در $A$ انجام شود.

**۶۶- (۲)**



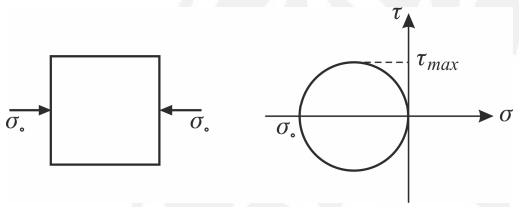

$$V_{max}=\frac{qL}{۲}\ ,\ M_{max}=\frac{qL^{۲}}{۸}$$

$$\begin{cases}\sigma_{max}=\dfrac{M_{max}}{S}=\dfrac{\frac{qL^{۲}}{۸}}{\frac{bh^{۲}}{۶}}=\dfrac{۳qL^{۲}}{۴bh^{۲}}\\[2ex] \tau_{max}=۱/۵\times\dfrac{V_{max}}{A}=۱/۵\times\dfrac{\frac{qL}{۲}}{bh}=\dfrac{۳qL}{۴\,bh}\end{cases}\ \overset{\div}{\Rightarrow}\ \frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}}=\frac{\frac{۳qL^{۲}}{۴\,bh^{۲}}}{\frac{۳qL}{۴\,bh}}=\frac{L}{h}$$

طبق خواستهٔ سؤال : $\dfrac{\sigma_{max}}{\tau_{max}}=۱۰\ \Rightarrow\ \dfrac{L}{h}=۱۰$

**۶۷- (۴)**

در المان روی لبه‌های بالایی و پایینی که به صورت مقابل می‌باشد، داریم:



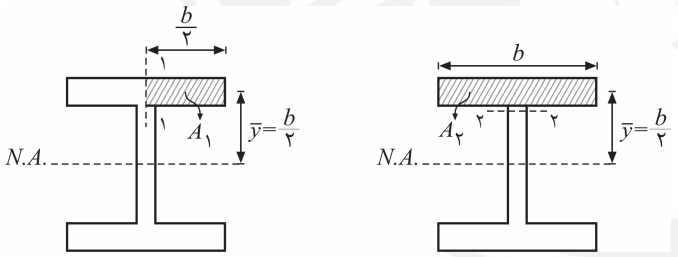

$$\tau_{max}=۰/۵\,\sigma_{۰}$$

همچنین در المان روی تار میانی، $\tau_{max}=\tau_{۰}=۰/۳\,\sigma_{۰}$ می‌باشد. بنابراین تنش برشی ماکزیمم روی المان‌های لبه‌های بالا و پایین مقطع اتفاق می‌افتد. می‌توان سایر المان‌های مقطع در ارتفاع‌های داده شده را نیز بررسی کرد. در این صورت $\tau_{max}$ این المان‌ها کمتر از $۰/۵\ \sigma_{۰}$ بدست می‌آید.

**۶۸- (۴)**

$$\frac{\tau_{۱}}{\tau_{۲}}=\frac{(\frac{VQ}{It})_{۱}}{(\frac{VQ}{It})_{۲}}=\frac{Q_{۱}}{Q_{۲}}\times\frac{t_{۲}}{t_{۱}}$$

برای محاسبه $Q_{۱}$ و $Q_{۲}$ باتوجه به شکل‌های زیر، داریم:



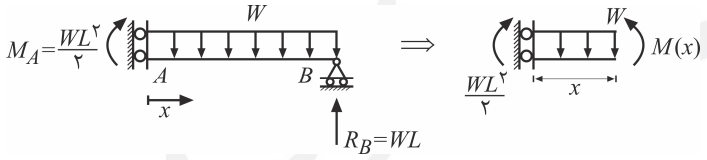

$$Q_{۱}=A_{۱}\,\bar{y}=\frac{b}{۲}\times۱/۵\,t\times\frac{b}{۲}=\frac{۳b^{۲}t}{۸}$$

$$Q_{۲}=A_{۲}\,\bar{y}=b\times۱/۵\,t\times\frac{b}{۲}=\frac{۳b^{۲}t}{۴}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\tau_{۱}}{\tau_{۲}}=\frac{\frac{۳b^{۲}t}{۸}}{\frac{۳b^{۲}t}{۴}}\times\frac{t}{۱/۵t}=\frac{۱}{۳}$$

**۶۹- (۳)**

پس از تحلیل استاتیکی تیر داده شده (تعیین عکس‌العمل‌ها)، معادله لنگر خمشی در طول تیر به‌صورت زیر بدست می‌آید:




$$M(x)=\frac{WL^{۲}}{۲}-\frac{Wx^{۲}}{۲}$$

با دو بار انتگرال‌گیری از $\dfrac{M(x)}{EI}$، تابع خیز تیر بدست می‌آید:

$$\theta(x)=\int\frac{M(x)}{EI}dx=\frac{۱}{EI}\int_{۰}^{x}(\frac{WL^{۲}}{۲}-\frac{Wx^{۲}}{۲})\,dx=\frac{۱}{EI}(\frac{WL^{۲}x}{۲}-\frac{Wx^{۳}}{۶}+C_{۱})$$

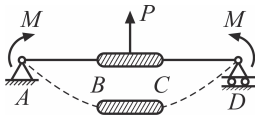
$$\theta(۰)=۰\ \Rightarrow\ C_{۱}=۰$$

$$y(x)=\int_{۰}^{x}\theta(x)\,dx=\frac{۱}{EI}\int_{۰}^{x}(\frac{WL^{۲}x}{۲}-\frac{Wx^{۳}}{۶})\,dx=\frac{۱}{EI}(\frac{WL^{۲}x^{۲}}{۴}-\frac{Wx^{۴}}{۲۴}+C_{۲})$$

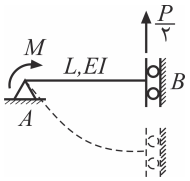
$$y(L)=۰\ \Rightarrow\ \frac{WL^{۴}}{۴}-\frac{WL^{۴}}{۲۴}+C_{۲}=۰\ \Rightarrow\ C_{۲}=-\frac{۵WL^{۴}}{۲۴}\ \Rightarrow\ y(x)=\frac{W}{۲۴EI}(۶L^{۲}x^{۲}-x^{۴}-۵L^{۴})$$

**۷۰- (۲)**

باتوجه به تقارن شکل و صلب بودن عضو $BC$، تغییرشکل تیر درحالت کلی به‌صورت زیر خواهد بود:




می‌توان تغییرشکل قسمت $AB$ (و$CD$) را به‌صورت زیر درنظر گرفت:

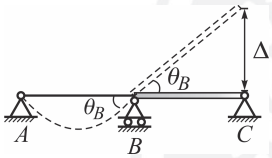



برای صفر شدن تغییرمکان $B$، باید داشته باشیم:

$$\Delta_B = ۰ \Rightarrow \frac{ML^۲}{۲EI} = \frac{\frac{P}{۲}L^۳}{۳EI} \Rightarrow P = \frac{۳M}{L}$$

**۷۱- (۳)**

تغییرشکل سازه به صورت مقابل می‌باشد:




$$\theta_B = \frac{\Delta}{L}$$

لازم به ذکر است که با توجه به قرارداد علامت تغییر شکل‌ها در روابط شیب افت، $\theta_B$ منفی بوده و با علامت منفی در رابطهٔ شیب - افت ظاهر می‌شود.

اکنون $M_{BA}$ را از روابط شیب افت اصلاح شده می‌یابیم. (توجه شود که لنگر در گره دورتر، یعنی $A$ ، صفر می‌باشد)

$$M_B = M_{BA} = \frac{۳EI}{L}(\theta_B - \frac{\Delta_{B/A}}{L}) + FEM_{BA} - \frac{۱}{۲}FEM_{AB} = \frac{۳EI}{L}(-\frac{\Delta}{L} - ۰) = -\frac{۳EI\Delta}{L^۲}$$

**۷۲- (۱)**

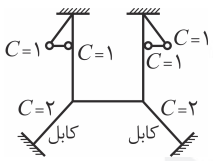
لنگر $\frac{Wa^۲}{۲}$ از قسمت طره‌ای $AB$ به گرهٔ $B$ منتقل می‌شود. از آنجا که عضو$BC$ صلب است، تمام لنگر $\frac{Wa^۲}{۲}$ به این عضو می‌رسد. لذا هیچ لنگری به ستون $BD$ منتقل نشده و $M_{BD} = ۰$ است.

**۷۳- (۱)**

سازه داده شده متقارن و بارگذاری آن نیز متقارن است. لذا شیب نقطه $C$ که روی محور تقارن سازه قرار دارد، برابر صفر است.

**۷۴- (۳)**

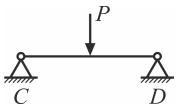
کابل‌ها را به صورت عضو دو سر مفصل در نظر می‌گیریم. بنابراین تعداد معادلات شرطی برای هر کابل ۲ عدد بوده و داریم:




$$n = ۳k + r - (C + ۳) = ۳ \times ۲ + ۱۲ - (۸ + ۳) = ۷$$

**۷۵- (؟)**

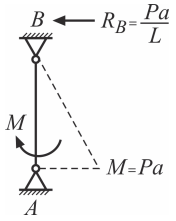
**راه حل مد نظر طراح:** اگر $M_{CD} = ۰$ باشد، از تقارن شکل $M_{DC}$ نیز صفر خواهد بود. بنابراین $CD$ مثل یک تیر دوسر مفصل عمل می‌کند.




$$\theta_C = \frac{PL^۲}{۱۶EI} = \frac{۱}{EI} \Rightarrow P = \frac{۱۶}{۳^۲} = \frac{۱۶}{۹}$$

**تذکر:** تحت اثر بارگذاری فعلی این امکان وجود ندارد که لنگر خمشی در گره $C$ و یا $D$ برابر صفر شود و از این نظر تست اشکال علمی دارد.

**۷۶- (۲)**

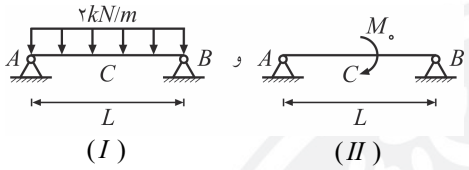



لنگر متمرکز $M=Pa$ به ستون وارد شده و در طول آن حرکت می‌کند. حداکثر لنگر خمشی در طول ستون زمانی ایجاد می‌شود که این لنگر متحرک در یکی از دو تکیه‌گاه وارد شده باشد. چرا که در این حالت نمودار لنگر خمشی در طول ستون به صورت مقابل است:

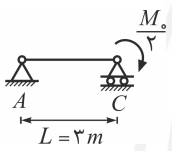
$M_{max}=Pa$ (وقتی که دستک روی $A$ قرار بگیرد)

**۷۷- (۳)**

سازهٔ داده شده را به دو سازهٔ $(I)$ و $(II)$ مطابق شکل تفکیک می‌کنیم.

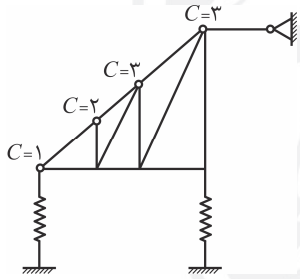



سازهٔ $(I)$ متقارن بوده و در آن $\theta_C=\circ$ می‌باشد. در سازهٔ $(II)$ با توجه به تقارن سازه و پادتقارنی بارگذاری می‌توان به جای تیر دو سر مفصل تحت اثر لنگر خمشی متمرکز در وسط آن، تیر زیر را تحلیل نمود:




$$\begin{cases}\theta_C=\dfrac{\frac{M_\circ L}{۲}}{۳EI}=\dfrac{M_\circ\times ۳}{۶EI}=\dfrac{M_\circ}{۲EI}\\ \theta_C=\circ/\circ۲\end{cases}\Rightarrow\quad M_\circ=\circ/\circ۴\,EI$$

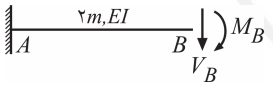
**۷۸- (۴)**




$$n=۳k+r-(C+۳)=۳\times۵+۴-(۹+۳)=۷$$

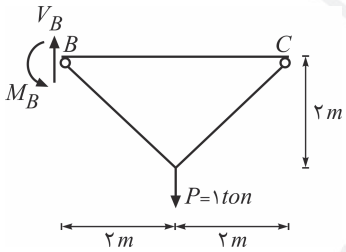
**۷۹- (۴)**

جهت تعیین تغییرمکان قائم $B$، کافیست برای قسمت $AB$ (مطابق شکل) $V_B$ و $M_B$ را بیابیم:




$$\Delta_B=\frac{V_B\times ۲^۳}{۳EI}+\frac{M_B\times ۲^۲}{۲EI}$$

حال قسمت سمت راست $B$ را در نظر گرفته و $M_B$ و $V_B$ را می‌یابیم:



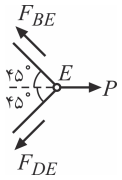

$$\sum F_y=\circ\ \Rightarrow\ V_B=۱\,ton$$
$$\sum M_B=\circ\ \Rightarrow\ M_B=۱\times۲=۲\,ton.m$$

بنابراین تغییرمکان قائم $B$ برابر است با:

$$\Delta_B=\frac{۱\times۲^۳}{۳EI}+\frac{۲\times۲^۲}{۲EI}=\frac{۲۰}{۳EI}$$

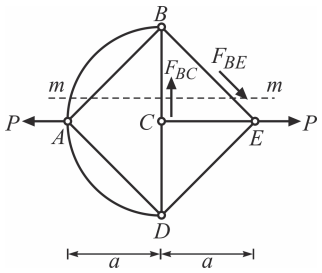
**۸۰- (۱)**

از بررسی گره $C$، $F_{CE}=\circ$ بدست می‌آید. حال گرهٔ $E$ را در نظر گرفته، $F_{BE}$ را می‌یابیم:




$$\begin{cases}\sum F_y=\circ\ \Rightarrow\ F_{BE}=F_{DE}\\ \sum F_x=\circ\ \Rightarrow\ (F_{BE}+F_{DE})\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}=P\end{cases}\Rightarrow\ F_{BE}=\frac{P\sqrt{۲}}{۲}$$

اکنون مقطع $m-m$ را درنظر گرفته و $\sum M_A=\circ$ را برای قسمت بالای این مقطع می‌نویسیم:




$$\sum M_A=\circ\ \Rightarrow\ F_{BC}\times a=F_{BE}\times a\sqrt{۲}\ \Rightarrow\ F_{BC}=\sqrt{۲}\times\frac{P\sqrt{۲}}{۲}=P$$

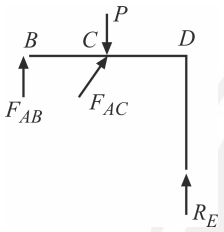
**۸۱- (۲)**

اعضای $EF$ و $GF$ دوسر مفصل بوده و هیچ گونه نیروی برشی را تحمل نمی‌کنند. لذا تمام نیروی $P = ۲\,ton$ از طریق عضو $CF$ منتقل می‌شود. عضو $CD$ نیز دو سر مفصل می‌باشد و بنابراین کل بار $P$ به عضو $BC$ می‌رسد و داریم:

$$M_{B(BC\ \text{از})} = ۲ \times ۲ = ۴\,ton.m$$

**۸۲- (۱)**

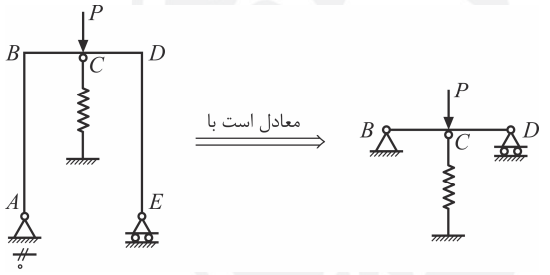
نیروهای وارد بر قطعه $BDE$ عبارتند از نیروی عضو دو نیرویی $AB$ که در راستای قائم می‌باشد، عکس‌العمل تکیه‌گاه $E$ که آن نیز در راستای قائم است و نیروی عضو دو نیرویی $AC$ که مایل و در راستای $AC$ می‌باشد. با نوشتن معادله تعادل نیروها برای قطعه $BDE$ در راستای افقی نتیجه می‌شود که نیروی عضو دو نیرویی $AC$ برابر صفر است:




$$BDE : \sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{AC} = ۰$$

**۸۳- (۲)**

باتوجه به صفر بودن عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه‌های $A$ و $E$، لنگر خمشی در $B$ و $D$ صفر است. بنابراین $BD$ مثل یک تیر دوسر مفصل عمل می‌کند.

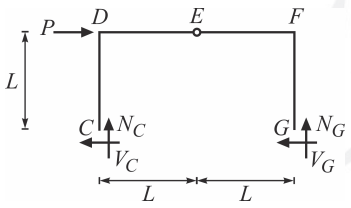



از آنجایی که تغییرمکان قائم $C$ از تیر با میزان فشردگی فنر برابر است، لذا این دو عضو مثل فنرهای موازی عمل نموده و بار $P$ به نسبت سختی انتقالی بین تیر $BCD$ و فنر توزیع می‌شود. سختی انتقالی تیر $BCD$، $\frac{۴۸EI}{L^۳}$ می‌باشد.

$$F_{\text{فنر}} = P \times \frac{K_{\text{فنر}}}{K_{\text{فنر}} + K_{\text{تیر}}} = P \times \frac{\frac{۴۸EI}{L^۳}}{\frac{۴۸EI}{L^۳} + \frac{۴۸EI}{L^۳}} = \frac{P}{۲}$$

**۸۴- (۴)**

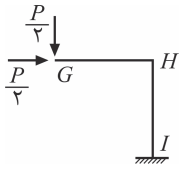
قسمت $CDEFG$ را جداگانه در نظر می‌گیریم:




$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow P \times L = N_G \times ۲L \Rightarrow N_G = \frac{P}{۲}$$

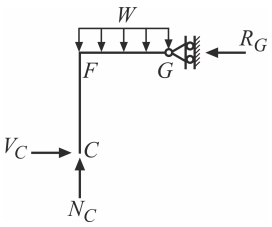
$$EFG : \sum M_E = ۰ \Rightarrow N_G \times L = V_G \times L \Rightarrow N_G = V_G = \frac{P}{۲}$$

$N_G$ و $V_G$ به‌صورت نشان داده شده به $GHI$ وارد می‌شوند:




$$\sum M_I = ۰ \Rightarrow \frac{P}{۲} \times L = \frac{P}{۲} \times L + M_I \Rightarrow M_I = ۰$$

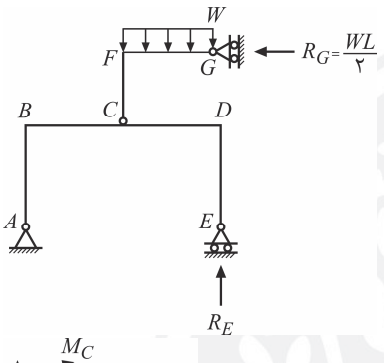
**۸۵- (۳)**




ابتدا قطعه $CFG$ را جداگانه درنظر می‌گیریم. در این قطعه لنگر خمشی در $C$ صفر می‌باشد.

$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow R_G \times L = \frac{WL^۲}{۲} \Rightarrow R_G = \frac{WL}{۲}$$

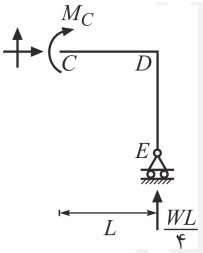
حال برای کل قاب می‌نویسیم:




$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow WL \times \frac{۳L}{۲} = R_G \times ۲L + R_E \times ۲L$$

$$\Rightarrow R_E \times ۲L = \frac{۳WL^۲}{۲} - WL^۲ = \frac{WL^۲}{۲} \Rightarrow R_E = \frac{WL}{۴}$$

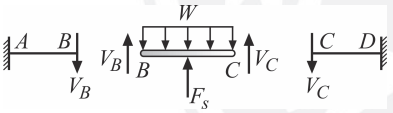
و در نهایت لنگر خمشی در مقطع $C$ با توجه به شکل زیر به‌دست می‌آید.




$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow M_C = \frac{WL}{۴} \times L = \frac{WL^۲}{۴}$$

**۸۶- (۲)**

قسمت‌های $AB$، $BC$ و $CD$ را به‌صورت مقابل تفکیک می‌کنیم:




باتوجه به تقارن نتایج زیر حاصل می‌شوند:

۱- عضو صلب به‌صورت متقارن تغییرشکل می‌دهد. لذا به صورت یکنواخت پایین می‌آید.

۲- برش در $B$ و $C$ با هم برابر است. ($V_B = V_C = V$)

$$BC: \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_s + ۲V = W \times L \Rightarrow F_s = WL - ۲V$$

$$AB: \Delta_B = \frac{V_B L^۳}{۳EI} = \frac{VL^۳}{۳EI}$$

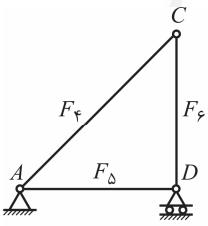
$$\Delta_{\text{فنر}} = \frac{F_s}{K} = \frac{WL - ۲V}{\frac{۲EI}{L^۳}} = \frac{(WL - ۲V)L^۳}{۲EI} = \frac{WL^۴}{۲EI} - \frac{VL^۳}{EI}$$

رابطه سازگاری: $\Delta_B = \Delta_{\text{فنر}} \Rightarrow \frac{VL^۳}{۳EI} = \frac{WL^۴}{۲EI} - \frac{VL^۳}{EI} \Rightarrow V = \frac{۳WL}{۸}$

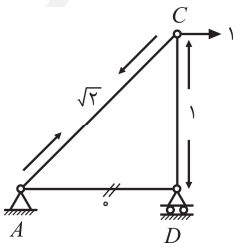
$$F_s = WL - ۲V = WL - ۲\left(\frac{۳WL}{۸}\right) = \frac{WL}{۴}$$

**۸۷- (۳)**

می‌توان قسمت $ACD$ را از این سازه جدا کرده و با استفاده از روش بار واحد، تغییرمکان افقی $C$ را بدست آورد. (توجه شود که قسمت جدا شده پایدار است)




سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی

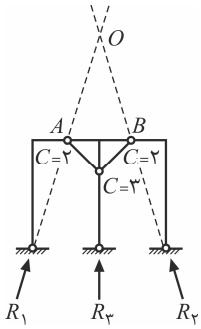



سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

$$۱ \times \Delta_{C_x} = \sum\left(\frac{FfL}{EA}\right)_i = \frac{F_۴ \times \sqrt{۲} \times L\sqrt{۲}}{EA} + \frac{F_۶ \times (-۱) \times L}{EA} = \frac{(۲F_۴ - F_۶)L}{EA}$$

**۸۸- (۴)**

نکته این سوال دقیقاً مانند نکته تست ۶۵ آزمون سال ۱۳۸۶ می‌باشد.




$(۱): \sum M_A = ۰ \Rightarrow$ امتداد $R_۱$، $OA$ می‌باشد.

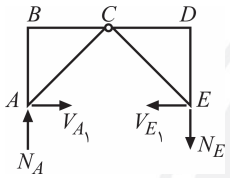
$(۲): \sum M_B = ۰ \Rightarrow$ امتداد $R_۲$، $OB$ می‌باشد.

بنابراین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در $O$ متقاربند و سازه ناپایدار است.

$n = ۳k + r - (C + ۳) = ۳\times۲ + ۶ - (۷+۳) = ۲ \Rightarrow$ سازه ۲ درجه نامعین است.

**۸۹- (۴)**

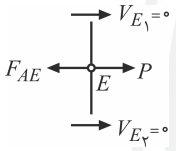
قطعه $ABCDE$ را مطابق شکل جدا نموده و نیروهای قسمت‌های جداشده $(A,E)$ را روی آن‌ها مشخص می‌کنیم:




$\sum M_A = ۰ \Rightarrow N_E = ۰$

$CDE: \sum M_C = ۰ \Rightarrow V_{E_۱} = ۰$

به همین ترتیب $V_{E_۲}$ از قسمت پایینی سازه نیز صفر بدست می‌آید. اکنون گره $E$ را بررسی می‌کنیم:

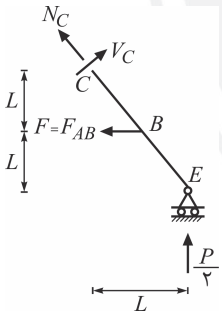



$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{AE} = P$

**۹۰- (۳)**

کل سازه: $\sum M_D = ۰ \Rightarrow R_E \times ۲L = P \times L \Rightarrow R_E = \frac{P}{۲}$

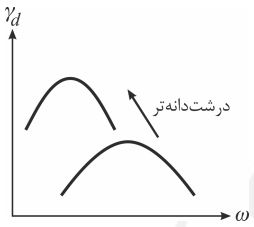
اکنون عضو $CBE$ را جداگانه درنظر می‌گیریم. نیروی عضو $AB$ را $F$ می‌نامیم:




$\sum M_C = ۰ \Rightarrow F \times L = \frac{P}{۲} \times L \Rightarrow F = \frac{P}{۲}$ (کششی)

## مکانیک خاک

**۹۱- (۴)**




باتوجه به اینکه خاک $A$ علاوه بر خاک $B$، ذرات درشت‌تر از خاک $B$ (بزرگتر از یک اینچ) را نیز در بر می‌گیرد، بنابراین می‌توان گفت خاک $B$ از $A$ ریزدانه‌تر است. هر چقدر خاکی ریزدانه‌تر باشد، ضریب نفوذپذیری آن کمتر خواهد بود. همچنین باتوجه به نمودار شکل زیر ملاحظه می‌شود که خاک درشت‌دانه برای متراکم کردن مناسب‌تر از بقیه است. به عبارت دیگر هرچه خاکی ریزدانه‌تر باشد (خاک $B$ در این سؤال) مقدار $\omega_{opt}$ آن بیشتر و $\gamma_{d_{max}}$ آن کمتر خواهد بود.

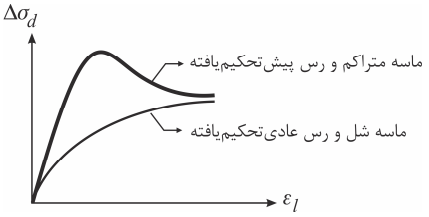
**۹۲- (۳)**

این تست مشابه تست شمارهٔ ۸۳ در آزمون سراسری (۸۳) می‌باشد در این حالت می‌نویسیم:

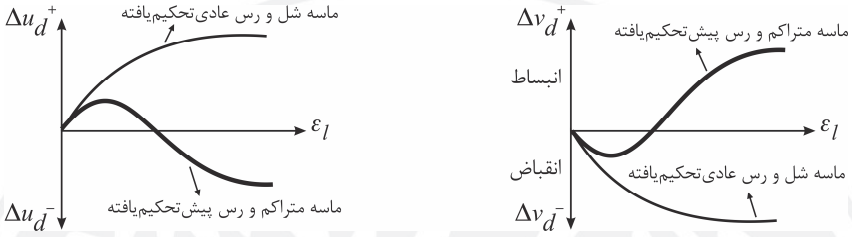
$$\begin{cases} V_{\text{اجرایی}} = ۱۰۰۰\, m^۳ \\ \gamma_{d\,\text{اجرایی}} = RC \times \gamma_{d_{max}} = ۰/۹ \times ۲۰ = ۱۸\, kN/m^۳ \\ \gamma_{d\,\text{قرضه}} = \frac{\gamma_{\text{قرضه}}}{۱+\omega} = \frac{۱۸}{۱+۰/۱۲۵} = ۱۶\, kN/m^۳ \end{cases}$$

$$\frac{\gamma_{d\,\text{اجرایی}}}{\gamma_{d\,\text{قرضه}}} = \frac{V_{\text{قرضه}}}{V_{\text{اجرایی}}} \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۶} = \frac{V_{\text{قرضه}}}{۱۰۰۰} \Rightarrow V_{\text{قرضه}} = ۱۱۲۵\, m^۳$$

**۹۳- (۴)**




در آزمایش $CU$ به هنگام اعمال تنش انحرافی، $\Delta v_d = ۰$ است، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) اساساً نادرست می‌باشند. با توجه به شکل‌های زیر ملاحظه می‌شود که نمودارها مربوط به خاک رس پیش‌تحکیم‌یافته و ماسه متراکم می‌باشند، بنابراین پاسخ صحیح گزینه (۴) می‌باشد.




**الف- آزمایش $CD$** **ب- آزمایش $CU$**

**۹۴- (۱)**

با پایین آمدن سطح آب، تنش مؤثر در لایه رسی به اندازه $\Delta\sigma' = (\gamma - \gamma')\Delta h$ افزایش یافته و در نتیجه خاک رس دچار نشست تحکیم می‌گردد. در رابطه اشاره شده، $\gamma$ و $\gamma'$ به‌ترتیب وزن مخصوص و وزن مخصوص غوطه‌وری خاک ماسه‌ای و $\Delta h$ میزان نزول سطح آب می‌باشند.

**۹۵- (۲)**

$$\theta = ۴۵ + \frac{\phi}{۲} \quad , \quad \theta = ۹۰ - ۳۰ = ۶۰^\circ \;\Rightarrow\; ۶۰ = ۴۵ + \frac{\phi}{۲} \;\Rightarrow\; \phi = ۳۰^\circ$$

$$q_u = ۲c\tan\left(۴۵ + \frac{\phi}{۲}\right) \;\Rightarrow\; ۲\sqrt{۳} = ۲ \times c \times \tan\left(۴۵ + \frac{۳۰}{۲}\right) \;\Rightarrow\; c = ۱\, kg/cm^۲$$

**۹۶- (۲)**

باتوجه به وضعیت قرارگیری المان‌های $A$ و $B$، مقدار فشار جانبی خاک ($\sigma_۳$) برای المان $B$ بیشتر از المان $A$ می‌باشد و در نتیجه المان $B$ محکم‌تر و از لحاظ مقاومتی وضعیت بهتری دارد. از طرفی دو المان در اعماق تقریباً یکسانی از سطح زمین قرار دارند و شرایط اعمال بار روی سطح خاک بالای آنها یکسان است. نتیجه آنکه بایستی بار گسیختگی المان $B$ که قوی‌تر است، بیشتر باشد یعنی $q_۲ > q_۱$ شود.

**۹۷- (۲)**

$$\Delta\sigma_۱ = -۲۴۰\, kN/m^۲ ,\; \Delta\sigma_۳ = -۱۶۰\, kN/m^۲ \Rightarrow \Delta\sigma_۱ - \Delta\sigma_۳ = -۲۴۰ - (-۱۶۰) = -۸۰\, kN/m^۲$$

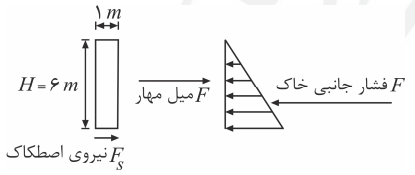
$$\Delta u = B\left[\Delta\sigma_۳ + A\,(\Delta\sigma_۱ - \Delta\sigma_۳)\right] \quad , \quad B = ۱ \quad \text{(خاک اشباع است)}$$

$$\Delta u = ۱ \times \left[-۱۶۰ + ۰/۷۵ \times (-۸۰)\right] = -۲۲۰\, kN/m^۲ \qquad u = u_۰ + \Delta u = ۶۰ - ۲۲۰ = -۱۶۰\, kN/m^۲$$

توجه کنید که بلافاصله بعد از انتقال نمونه به سطح خاک، تنش‌های کل صفر می‌شوند، تنش مؤثر تغییر نمی‌کند و از میزان فشار آب حفره‌ای نیز کاسته می‌شود. مدت مدیدی بعد از انتقال نمونه به سطح خاک و قرار دادن آن در یک ظرف آب، نمونه با جذب آب متورم می‌شود. در این حالت همچنان تنش‌های کل صفر می‌باشند، ولی با افزایش فشار آب حفره‌ای و کاهش تنش مؤثر، هر دو در نهایت (در پایان تورم) صفر می‌گردند.

**۹۸- (۳)**

در این سؤال چون میل مهارها هر $۳\, m$ به $۳\, m$ تعبیه شده‌اند، بعد عمود بر صفحه را برابر سطح بارگیر هر میل مهار ($۳\, m$) در نظر می‌گیریم.




$$\sigma_a = k_a\,\sigma_v - ۲c\sqrt{k_a} \xrightarrow{c=۰} \sigma_a = k_a\,\sigma_v = \gamma H k_a$$

$$FS_{\text{لغزش}} = \frac{\text{نیروهای مقاوم}}{\text{نیروهای محرک}}$$

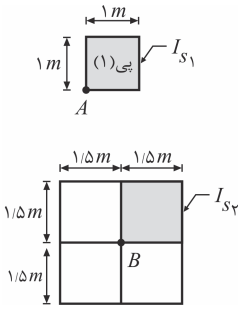
نیروی اصطکاک دیوار با سطح زمین و نیز نیروی میل مهار، نیروهای مقاوم در برابر لغزش بوده و نیروی فشار جانبی خاک، تنها نیروی محرک می‌باشد.

نیروی اصطکاک $F_s = W\tan\delta = (\gamma_c \times V)\tan\delta = (۲/۵ \times ۶ \times ۱ \times ۳) \times ۰/۴ = ۱۸\, ton$

فشار جانبی خاک $F = \left(\frac{۱}{۲} k_a\, \gamma H^۲\right) \times ۳ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} \times ۲ \times (۶)^۲ \times ۳ = ۳۶\, ton$

$FS = ۱ \;\rightarrow\;$ میل مهار $F + ۱۸ = ۳۶ \;\rightarrow\;$ میل مهار $F = ۱۸\, ton$

**۹۹- (۴)**




$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{L_1}{z_1} = \dfrac{1}{1}\ ,\ n_1 = \dfrac{B_1}{z_1} = \dfrac{1}{1} \ \rightarrow\ I_{s_1} = f\left(\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{1}\right) \\ m_2 = \dfrac{L_2}{z_2} = \dfrac{1/5}{1/5}\ ,\ n_2 = \dfrac{B_2}{z_2} = \dfrac{1/5}{1/5} \ \rightarrow\ I_{s_2} = f\left(\dfrac{1/5}{1/5}, \dfrac{1/5}{1/5}\right) = f(1, 1) \end{cases} \Rightarrow m_1 = m_2\ ,\ n_1 = n_2$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید $I_{s_1} = I_{s_2} = I$ است، بنابراین می‌نویسیم:

$$\frac{\Delta\sigma_{z_A}}{\Delta\sigma_{z_B}} = \frac{q_A \times I_A}{q_B \times I_B} \Rightarrow \frac{2/5}{\Delta\sigma_{z_B}} = \frac{\left(\frac{25}{1\times1}\right)(I)}{\left(\frac{180}{3\times3}\right)(4I)} \Rightarrow \Delta\sigma_{z_B} = 8\ t/m^2$$

**۱۰۰- (۳)**

$$\begin{cases} FS = \dfrac{\tau_f RL}{Wd + \frac{1}{2}\gamma_w z_{cr}^2\left(z_s + \frac{2}{3}z_{cr}\right)} \\ \tau_f = c_u = 40\ kg/m^2 \text{ (پایداری کوتاه‌مدت)} \\ z_s = 6m \text{ (فاصله قائم سطح خاک تا نقطه } o \text{ است.)}\ z_s\ ,\ z_{cr} = 6m \end{cases}$$

$$\Rightarrow FS = \frac{40\times15\times25}{(20\times100)(5) + \frac{1}{2}\times10\times6^2\times\left(6+\frac{2}{3}\times6\right)} = \frac{15000}{10000+1800} = 1/27 \approx 1/25$$

توجه شود که در صورت سؤال منظور از قوس دایره لغزش، قسمتی از قوس است که شامل ترک نمی‌شود و با خط‌چین نشان داده شده است.

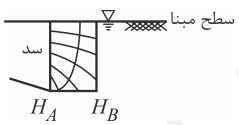
**۱۰۱- (۱)**

باتوجه به سطح مبنای مشخص شده در شکل و نیز استفاده از روابط $H_A = \Delta H - (N_d)_A\,\Delta h$، $(h_p)_A = H_A - (h_z)_A$، $u_A = (h_p)_A\,\gamma_w$، فشار آب حفره‌ای در نقطهٔ $x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$u_x = \left[\Delta H - (N_d)_x\,\Delta h - (h_z)_x\right]\gamma_w = \left[6 - 7\times\left(\frac{6}{18}\right) - (-6)\right]\times10 = 96/7\ kN/m^2$$

توجه کنید که در محاسبات بالا، $(h_z)_x = -6\ m$ درنظر گرفته شد، زیرا طبق صورت سؤال نقطه $x$ در وسط قاعدهٔ سازه واقع شده و بایستی از میانگین فواصل $8\ m$ و $4\ m$ استفاده کرد.

حال برای محاسبه ضریب اطمینان در برابر جوشش خاک در محل بحرانی داریم:




$$FS = \frac{\gamma'}{i_{ave}\,\gamma_w} = \frac{\gamma'}{\left[\dfrac{\frac{H_A + H_B}{2}}{D}\right]\gamma_w}$$

$$\begin{cases} H_A = \Delta H - (N_d)_A\,\Delta h = 6 - 12\times\left(\dfrac{6}{18}\right) = 2m \\ H_B = \Delta H - (N_d)_B\,\Delta h = 6 - 14\times\left(\dfrac{6}{18}\right) = 1/33\ m \\ D = 8m \end{cases} \Rightarrow FS = \frac{10}{\dfrac{\left(\frac{2+1/33}{2}\right)\times10}{8}} = 4/8$$

باتوجه به گزینه‌ها به نظر می‌رسد که بایستی پاسخ (۱) انتخاب شود.

**۱۰۲- (۱)**

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta H}{H_\circ} = \dfrac{\Delta e}{۱+e_\circ} \\ \Delta e = e_\circ - e_f \\ \gamma_{sat} = \dfrac{G_s + e}{۱+e}\gamma_w \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۰}{۱۰۰۰} = \frac{۰/۵ - e_f}{۱+۰/۵} \Rightarrow e_f = ۰/۴۸۵$$

$$\Rightarrow ۲ = \frac{۲/۵+e_\circ}{۱+e_\circ}\times ۱ \Rightarrow e_\circ = ۰/۵$$

**۱۰۳- (۴)**

وقتی خاک تحت بارگذاری جدیدی قرار می‌گیرد (مثل بناشدن یک سازه بر روی آن یا احداث خاکریز و غیره)، فشرده شده و اصطلاحاً نشست می‌کند.

نشست خاک از نقطه نظر زمانی به دو دسته تقسیم می‌شود، یکی نشست کوتاه‌مدت یا نشست آنی خاک است و دیگری نشست بلندمدت یا نشست تحکیم می‌باشد. نشست آنی در خاکهای درشت‌دانه اشباع و غیراشباع، همچنین خاک‌های رسی با درصد اشباع کمتر از ٪۸۰، موردتوجه است. این درحالی است که نشست تحکیم مخصوص خاک‌های رسی اشباع و نزدیک به اشباع ( درصد اشباع بیش از ٪۸۰) بوده که در خاک رس اشباع، از نشست آنی در برابر نشست تحکیم صرف‌نظر می‌گردد.

**۱۰۴- (۳)**

ابتدا درجهٔ تحکیم را بعد از مدت یک سال به‌دست می‌آوریم:

$$U_۱ = \frac{\Delta H_۱}{\Delta H_\infty} = \frac{۲}{۱۰} = ۰/۲$$

از طرفی برای یک لایه خاک در دو زمان متفاوت (با شرط $U < ۶۰٪$)، طبق رابطهٔ بین مدت زمان تحکیم و درجه تحکیم، در دو حالت این مسئله به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{t_۲}{t_۱} = (\frac{U_۲}{U_۱})^۲ \Rightarrow \frac{۴}{۱} = (\frac{U_۲}{۰/۲})^۲ \Rightarrow U_۲ = ۰/۴$$

و در ادامه میزان نشست تحکیم بعد از مدت ۴ سال را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta H_۲ = U_۲ \times \Delta H_\infty = ۰/۴ \times ۱۰ = ۴\ cm$$

و در نهایت نشست کل پی بعد از ۴ سال برابر است با:

$$\delta = \delta_e + \delta_c \quad , \quad \delta_c = \Delta H_۲ = ۴\ cm \Rightarrow \delta = ۱+۴ = ۵\ cm$$

**۱۰۵- (۱)**

$$U_{z(A)} = ۱ - \frac{\Delta u_{z(A)}}{\Delta u_\circ} \ , \ \Delta u_\circ = \Delta p = ۲۰۰\ kN/m^۲ \Rightarrow ۰/۶ = ۱ - \frac{\Delta u_{z(A)}}{۲۰۰} \Rightarrow \Delta u_{z(A)} = ۸۰\ kN/m^۲$$

$$\Delta u_{z(A)} = \gamma_w\ \Delta h_A \Rightarrow ۸۰ = ۱۰ \times \Delta h_A \Rightarrow \Delta h_A = ۸\ m$$

یعنی اگر یک پیزومتر در نقطهٔ $A$ قرار دهیم، ۸ متر بالاتر از سطح سفرهٔ آب زیرزمینی و ۶ متر بالاتر از سطح مبنا خواهد ایستاد.

**۱۰۶- (۲)**

این تست مشابه سؤال ۶۵ در آزمون ۸۱ است. در این حالت می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{خاک اول خشک است} \Rightarrow \omega_۱ = ۰ \\ \text{خاک دوم اشباع است} \Rightarrow \gamma_d = \dfrac{\gamma_{sat}}{۱+\omega_{sat}} \Rightarrow ۱۶ = \dfrac{۲۲}{۱+\omega_{sat}} \Rightarrow \omega_{sat} = \omega_۲ = ۰/۳۷۵ \end{cases}$$

$$\frac{V_۱}{V_۲} = (\frac{\omega_۲ - \omega}{\omega - \omega_۱})(\frac{\gamma_{d۲}}{\gamma_{d۱}})$$

باتوجه به اینکه $\gamma_{d۱} = \gamma_{d۲}$ است (چون هر دو از یک منبع قرضه هستند)، خواهیم داشت:

$$\frac{V_۱}{V_۲} = (\frac{۰/۳۷۵ - ۰/۲}{۰/۲ - ۰}) = \frac{۱/۷۵}{۲} \Rightarrow x_۱ = \frac{۱/۷۵}{۳/۷۵} = ۴۷٪ \ , \ x_۲ = \frac{۲}{۳/۷۵} = ۵۳٪$$

**۱۰۷- (۱)**

| درصد وزنی عبوری خاک $C$ | درصد وزنی عبوری خاک $B$ | درصد وزنی عبوری خاک $A$ | اندازه الک ($mm$) |
|---|---|---|---|
| ۴ | ۲ | ۶ | ۰/۱ |
| ۱۰ | ۸ | ۱۲ | ۰/۲ |
| ۲۰ | ۱۴ | ۲۶ | ۰/۳ |
| ۳۰ | ۲۰ | ۴۰ | ۰/۶ |
| ۴۰ | ۳۲ | ۴۸ | ۱ |
| ۶۰ | ۵۵ | ۶۵ | ۲ |
| ۱۰۰ | ۱۰۰ | ۱۰۰ | ۴ |

باتوجه به این که درصد عبوری خاک $C$ از الک با قطر $۰/۱\,mm$ ناچیز است (٪۴)، بنابراین خاک $C$ خاک درشت‌دانه محسوب می‌شود. درصد عبوری این خاک از الک با قطر $۴\,mm$ و به تبع آن از الک با قطر $۴/۷۵\,mm$ (الک نمره ۴ که مرز ماسه و شن است) برابر ۱۰۰ درصد است، پس این خاک درشت‌دانه ماسه‌ای است.

حال برای مشخص شدن کیفیت دانه‌بندی از پارامترهای $C_c$ و $C_u$ کمک می‌گیریم.

$$\begin{cases} C_u = \dfrac{D_{۶۰}}{D_{۱۰}} = \dfrac{۲}{۰/۲} = ۱۰ > ۶ \ \text{قابل قبول} \\ C_c = \dfrac{D_{۳۰}^{۲}}{D_{۱۰} \times D_{۶۰}} = \dfrac{۰/۶^{۲}}{۰/۲ \times ۲} = \dfrac{۰/۳۶}{۰/۴} = ۰/۹ < ۱ \ \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

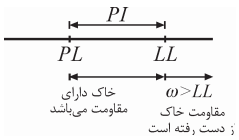
برای اینکه خاک ماسه‌ای خوب‌دانه‌بندی شده باشد، بایستی $C_u \geq ۶$ و $۱ \leq C_c \leq ۳$ باشد.چون شرط $۱ \leq C_c \leq ۳$ ارضا نشد، پس خاک بددانه‌بندی شده است.

**۱۰۸- (۲)**

در کائولینیت پیوند بین واحدهای ساختمانی (ورقه‌ها) از نوع هیدروژنی است، در حالی که در ایلیت‌ها این پیوند فلزی با یون $K^{+}$ می‌باشد. در مونت‌موریلونیت‌ها نیز بین واحدهای ساختمانی نیروی واندروالسی برقرار است.

**۱۰۹- (۲)**

در حد روانی، خاک مقاومت خود را از دست داده و از آن به بعد مانند یک سیال روان می‌شود. باتوجه به گزینه‌ها حد روانی و درصد رطوبت اشباع خاک را به‌دست می‌آوریم و از مقایسه آن‌ها درمورد پایداری خاک اظهارنظر می‌کنیم.

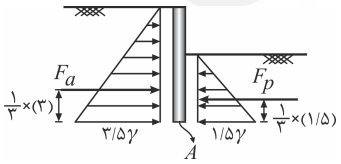



$$\begin{cases} \gamma_{sat} = \dfrac{G_s + e}{۱+e} \times \gamma_w \ \Rightarrow \ ۲ = \dfrac{۲/۵ + e}{۱+e} \times ۱ \ \Rightarrow \ e = ۰/۵ \\ S_r \times e = \omega G_s \xrightarrow{S_r = ۱} \omega_{sat} = \dfrac{e}{G_s} = \dfrac{۰/۵}{۲/۵} = ۰/۲ = ۲۰٪ \\ PI = LL - PL \ \Rightarrow \ LL = ۱۰ + ۵ = ۱۵٪ \end{cases}$$

درصد رطوبت خاک درحالت اشباع ($\omega_{sat}$) بزرگتر از حد روانی ($LL$) است. بنابراین خاک قبل از اشباع شدن مقاومت خود را به‌طور کامل از دست داده و ناپایدار می‌گردد.

**۱۱۰- (۳)**

ابتدا نمودار نیروهای وارد بر دیوار را ترسیم می‌کنیم. در این سؤال به علت وجود خاک ماسه‌ای در دو طرف دیوار، مقدار چسبندگی خاک ($c$) صفر در نظر گرفته می‌شود.




$$F_a = \frac{۱}{۲}\gamma H_a^{۲} k_a = \frac{۱}{۲} \times \gamma \times ۳^{۲} \times k_a = \frac{۹}{۲} k_a \gamma$$

$$F_p = \frac{۱}{۲}\gamma H_p^{۲} k_p = \frac{۱}{۲} \times \gamma \times ۱/۵^{۲} \times k_p \gamma = \frac{۹}{۸} k_p \gamma$$

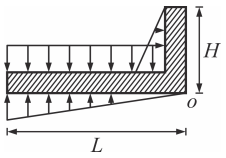
برای اینکه دیوار حول $A$ دوران نکند باید لنگر نیروهای محرک و مقاوم با یکدیگر برابر باشد:

$$\sum M_A = ۰ \ \rightarrow \ (\frac{۹}{۲} k_a \gamma)(\frac{۱}{۳} \times ۳) = (\frac{۹}{۸} k_p \gamma)(\frac{۱}{۳} \times ۱/۵) \ \Rightarrow \ \frac{k_a}{k_p} = \frac{۱}{۸} = ۰/۱۲۵$$

## مکانیک سیالات

**۱۱۱- (۳)**

با ترسیم نمودار توزیع فشار وارد بر سد و نوشتن رابطه تعادل لنگرها حول نقطه $O$ خواهیم داشت:




$$\sum M_O = ۰ \Rightarrow (\gamma H)(L\times ۱)(\frac{L}{۲}) = (\frac{\gamma H + ۰}{۲})(L\times ۱)(\frac{۲L}{۳}) + (\frac{\gamma H + ۰}{۲})(H\times ۱)(\frac{H}{۳})$$

$$\Rightarrow L^۲ = H^۲ \Rightarrow \frac{L}{H} = ۱$$

**تذکر:** با توجه به نفوذپذیری خاک و نیز ثابت بودن گرادیان هیدرولیکی در خاک، نمودار توزیع فشار هیدرواستاتیک در زیر سد به صورت خطی وجود خواهد داشت.

**۱۱۲- (۲)**

در آستانه خروج آب از استوانه، رابطه تعادل نیروها در امتداد قائم را برای آن می‌نویسیم:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow \text{نیروی وارده از طرف آب به کف استوانه} = \text{نیروی وزن استوانه} \Rightarrow (۲\gamma_۰ h_۰)(A_{\text{استوانه}}) = (\gamma_۰)(h\times A_{\text{استوانه}}) \Rightarrow h_۰ = \frac{h}{۲}$$

**۱۱۳-(۳)**

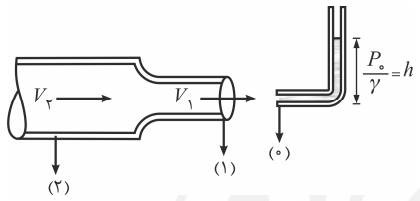
نقطهٔ $B$ را در فاصله ۰/۵ متری از محور دوران، بر روی سطح آزاد آب در نظر گرفته و می‌نویسیم:

$$\begin{cases} P_A = P_۰ + \gamma(\frac{\omega^۲ r_A^۲}{۲g}) - \gamma y_A \\ P_B = P_۰ + \gamma(\frac{\omega^۲ r_B^۲}{۲g}) - \gamma y_B \end{cases} \Rightarrow P_A - P_B = \frac{\gamma\omega^۲}{۲g}(r_A^۲ - r_B^۲) - \gamma(y_A - y_B)$$

$$\Rightarrow P_A - ۰ = \frac{\gamma_w \omega^۲}{۲g}(۱^۲ - ۰/۵^۲) - \gamma_w(-۰/۵ - ۰) \Rightarrow P_A = \left[\frac{۳\omega^۲}{۸g} + ۰/۵\right]\gamma_w$$

**۱۱۴- (۴)**

ابتدا معادله برنولی را بین نقاط (۰) و (۱) می‌نویسیم. در این حالت توجه داریم که سرعت در دهانهٔ ورودی لوله پیتو ($V_۰$) برابر صفر است.




$$H_۰ = H_۱ \Rightarrow \frac{P_۰}{\gamma} + \frac{V_۰^۲}{۲g} = \frac{P_۱}{\gamma} + \frac{V_۱^۲}{۲g} \Rightarrow h + ۰ = ۰ + \frac{V_۱^۲}{۲g} \Rightarrow V_۱ = \sqrt{۲gh}$$

حال با بکارگیری معادله پیوستگی جریان بین مقاطع (۱) و (۲)، سرعت در مقطع (۲) را به‌دست می‌آوریم:

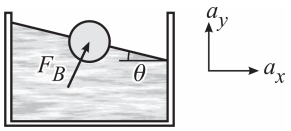
$$V_۲ = V_۱(\frac{D_۱}{D_۲})^۲ = V_۱(\frac{D}{۲D})^۲ = \frac{۱}{۴}V_۱ = \frac{\sqrt{۲gh}}{۴}$$

و در نهایت با نوشتن معادله برنولی بین نقاط (۱) و (۲)، مقدار فشار در نقطه (۲) را محاسبه می‌کنیم:

$$H_۱ = H_۲ \Rightarrow \frac{P_۱}{\gamma} + \frac{V_۱^۲}{۲g} = \frac{P_۲}{\gamma} + \frac{V_۲^۲}{۲g} \Rightarrow ۰ + h = \frac{P}{\gamma} + \frac{h}{۱۶} \Rightarrow P = \frac{۱۵\gamma h}{۱۶}$$

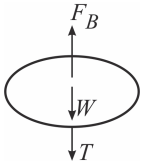
**۱۱۵- (۳)**

نیروی شناوری (فشاری خالص) وارد بر یک جسم جامد که در داخل یک ظرف محتوی مایع با شتاب ثابت $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$ حرکت می‌کند، برابر است با:




$$F_B = \frac{\gamma_f V_d}{\cos\theta}\left(1+\frac{a_y}{g}\right)$$

این نیرو عمود بر سطح آزاد بوده و در حالتی که ظرف ساکن است، برابر $F_B = \gamma_f V_d$ می‌باشد. در رابطهٔ بالا $V_d$ حجم قسمتی از جسم جامد است که داخل مایع به وزن مخصوص $\gamma_f$ قرار دارد. در حل این تست ابتدا دیاگرام آزاد جسم را ترسیم می‌کنیم:




در حالت اول (سکون) داریم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T = F_B - W = \gamma_f V_d - \gamma_s V \xrightarrow{V_d = V} T = (\gamma_f - \gamma_s) V$$

اما در حالت دوم (حرکت) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sum F_y = m a_y \Rightarrow F_B - W - T = m a_y \Rightarrow T = F_B - W\left(1+\frac{a_y}{g}\right) \\ F_B = \frac{\gamma_f V_d}{\cos\theta}\left(1+\frac{a_y}{g}\right) \xrightarrow{V_d = V} F_B = \frac{\gamma_f V}{\cos\theta}\left(1+\frac{a_y}{g}\right) \\ a_x = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \gamma_f V\left(1+\frac{a_y}{g}\right) - \gamma_s V\left(1+\frac{a_y}{g}\right) = (\gamma_f - \gamma_s) V\left(1+\frac{a_y}{g}\right)$$

بنابراین نسبت $\frac{T_2}{T_1}$ برابر است با:

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{a_y}{g} = 1 + \frac{\left(\frac{g}{2}\right)}{g} = \frac{3}{2}$$

**۱۱۶- (۲)**

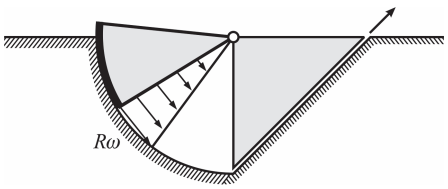
در سازه‌های هیدرولیکی نظیر سدها بایستی بین مدل و نمونه اصلی تشابه فرود برقرار باشد:

$$(Fr)_m = (Fr)_p \Rightarrow \frac{V_m}{\sqrt{g l_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g l_p}} \Rightarrow V_r = \sqrt{L_r}$$

$$t_r = \frac{L_r}{V_r} = \frac{L_r}{\sqrt{L_r}} = \sqrt{L_r} \Rightarrow \frac{t_m}{15} = \sqrt{\frac{1}{100}} \Rightarrow t_m = 1/5\, day$$

**۱۱۷- (۲)**

پروفیل توزیع سرعت در اثر حرکت دورانی دریچه به‌صورت خطی بوده و از صفر در مرکز دوران تا $R\omega$ در فاصله $R$ از مرکز دوران تغییر می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:




$$V = \frac{R\omega + 0}{2} = \frac{R\omega}{2} \quad (V \text{ سرعت متوسط است})$$

$$Q = VA = \left(\frac{R\omega}{2}\right)(bR) = bR^2\frac{\omega}{2}$$

دبی فوق با توجه به رابطهٔ پیوستگی جریان، با دبی جریان در لوله برابر است.

**۱۱۸- (۱)**

برای جریان آرام، دائمی و تراکم‌ناپذیر سیال بین دو صفحهٔ موازی، پروفیل سرعت به‌صورت زیر است:

$$u = u_t\left(\frac{y}{H}\right) - \frac{1}{2\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{ds}(Hy - y^2)$$

که در آن $H$ فاصله دو صفحهٔ موازی از هم، $y$ فاصله از صفحهٔ پایینی و $s$ امتداد جریان است. $u_t$ نیز سرعت صفحهٔ بالایی می‌باشد. حال اگر دو صفحه افقی باشند، $\frac{dh}{ds} = 0$ بوده و خواهیم داشت:

$$u = u_t\left(\frac{y}{H}\right) - \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{ds}(Hy - y^2)$$

و از آنجا تنش برشی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tau = \mu\left(\frac{du}{dy}\right) = \mu\frac{u_t}{H} - \frac{1}{2}\frac{dP}{ds}(H - 2y)$$

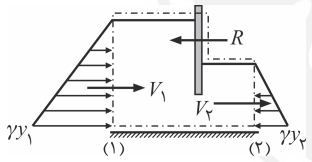
در این سؤال در عبارت بالا $u_t < 0$ و $\frac{dP}{ds} < 0$ است. بنابراین قدرمطلق عبارت فوق زمانی حداکثر می‌شود که $(H - 2y)$ منفی‌ترین حالت خود را داشته باشد، یعنی به ازای $y = H$.

$$\tau = \underbrace{\mu\left(\frac{u_t}{H}\right)}_{\text{منفی}} + \underbrace{\frac{H}{2}\left(\frac{dP}{ds}\right)}_{\text{بیشترین منفی ممکن}}$$

**توجه:** آنچه در صورت سؤال به عنوان پروفیل سرعت داده شده اشتباه می‌باشد و در جمله اول در سمت راست تساوی، $\gamma$ اضافه است.

**۱۱۹- (۴)**

با در نظر گرفتن حجم کنترل به شکل زیر، نیروی وارد بر واحد عرض دریچه (بعد عمود بر صفحه) را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:




$$\begin{cases} \frac{1}{2}\gamma y_1^2 - \frac{1}{2}\gamma y_2^2 - R = \rho Q(V_2 - V_1) \Rightarrow R = \frac{1}{2}\gamma(y_1^2 - y_2^2) - \rho Q(V_2 - V_1) \\ Q = V_1 A_1 = (1)(2\times 1) = 2\ m^3/s \\ V_2 = V_1\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = (1)\left(\frac{2\times 1}{1\times 1}\right) = 2\ m/s \end{cases}$$

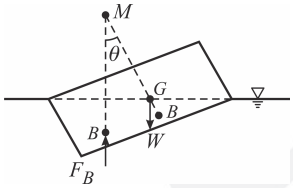
$$R = \frac{1}{2}(1000\times 10)(2^2 - 1^2) - (1000)(2)(2-1) = 13000\ N$$

و برای دریچه به پهنای ۲ متر، مقدار نیروی وارده برابر است با:

$$F = 2\times 13000 = 26000\ N$$

**۱۲۰- (؟)**

شکل زیر وضعیت دوران یافته جسم شناور را نشان می‌دهد که به اندازه زاویه کوچک $\theta$ منحرف شده است.




$B$ = مرکز شناوری قبل از دوران

$B^*$ = مرکز شناوری بعد از دوران

$G$ = مرکز ثقل

در این حالت برای محاسبه کوپل نیروی بازگرداننده و تغییر مکان افقی مرکز شناوری از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$M = (W)(\overline{MG})(\sin\theta) = (W)(\overline{MG})(\theta) = (200)(4.5)(0.02) = 18\ t.m$$

$$r = \frac{I_n\gamma\theta}{W} = \frac{\left(\frac{1}{12}\times 20\times 6^3\right)(1000)(0.02)}{(200\times 10^3)} = 0.036\ m = 36\ mm$$

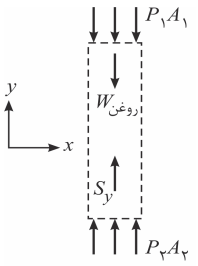
**توجه:** پاسخ به‌دست آمده در گزینه‌ها موجود نیست. ولی گزینهٔ (۱) نزدیک‌ترین جواب به مقادیر به‌دست آمده می‌باشد.

**۱۲۱- (۴)**

ابتدا رابطهٔ تعادل نیروها در امتداد قائم را برای لوله می‌نویسیم:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F = W_{\text{لوله}} + R_y$$

$R_y$ در حقیقت نیرویی است که از طرف سیال به لوله وارد می‌شود و به صورت زیر محاسبه می‌شود:




$$\sum F_y = P_۲A_۲ - P_۱A_۱ - W_{\text{روغن}} + S_y = \rho Q(V_۲ - V_۱) = ۰ \Rightarrow S_y = W_{\text{روغن}} - (P_۲ - P_۱)A$$

وزن روغن داخل لوله برابر است با:

$$W_{\text{روغن}} = \gamma V = ۸۰۰۰ \times ۷ \times \frac{\pi \times ۰/۰۴^۲}{۴} = ۲۲/۴\pi \ N$$

از طرفی $(P_۲ - P_۱)$ را از معادلهٔ برنولی و به صورت زیر می‌یابیم:

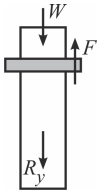
$$\frac{P_۱}{\gamma} + z_۱ + \frac{V_۱^۲}{۲g} = \frac{P_۲}{\gamma} + z_۲ + \frac{V_۲^۲}{۲g} + \Delta H$$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{۸۰۰ \times ۳ \times ۰/۰۴}{۰/۱} = ۹۶۰ < ۲۰۰۰ \Rightarrow \text{جریان آرام است}$$

$$\Delta H = \frac{۳۲\mu V L}{\gamma D^۲} = \frac{۳۲ \times ۰/۱ \times ۳ \times ۷}{۸۰۰۰ \times ۰/۰۴^۲} = ۵/۲۵ \ m$$

$$\Rightarrow \frac{P_۱}{\gamma} + ۷ = \frac{P_۲}{\gamma} + ۵/۲۵ \Rightarrow P_۲ - P_۱ = ۱/۷۵ \times ۸۰۰۰ = ۱۴۰۰۰ \ Pa$$

با جایگذاری مقادیر $W$ و $P_۲ - P_۱$ در رابطهٔ مومنتم، $S_y$ به‌دست می‌آید:




$$S_y = ۲۲/۴\pi - ۱۴۰۰۰ \times \frac{\pi \times ۰/۰۴^۲}{۴} = ۱۶/۸\pi \ N$$

نیروی $R_y$ برابر نیروی $S_y$ و در جهت عکس این نیرو (رو به پایین) می‌باشد. بنابراین $F$ برابر است با:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F = W_{\text{لوله}} + R_y = ۶۰\pi + ۱۶/۸\pi = ۷۶/۸\pi \ N$$

**۱۲۲- (۳)**

اگر لوله به قطر ۱ متر را با اندیس (۱) و لوله به قطر ۲ متر را با اندیس (۲) نشان دهیم، در آن صورت خواهیم داشت:

$$\frac{V_۲}{V_۱} = (\frac{D_۱}{D_۲})^۲ = (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow V_۱ = ۴V_۲$$

الف) وقتی جریان در داخل لوله‌ها آرام است، ضریب اصطکاک $f$ تنها تابعی از عدد رینولدز است و به زبری نسبی لوله بستگی ندارد. در این حالت با استفاده از رابطه هاگن - پوازی و با توجه به این که سیال در دو لوله یکسان است، می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta H_{T\,(۱)}}{\Delta H_{T\,(۲)}} = (\frac{V_۱}{V_۲})(\frac{L_۱}{L_۲})(\frac{D_۲}{D_۱})^۲ = (۴)(۱)(۲)^۲ = ۱۶$$

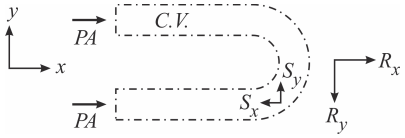
ب) وقتی جریان در داخل لوله‌ها کاملاً آشفته است، ضریب اصطکاک $f$ تنها تابعی از زبری نسبی لوله است و به عدد رینولدز (و به تعبیری سرعت) بستگی ندارد. حال اگر بپذیریم که تفاوت قطر لوله‌ها تأثیری بر زبری نسبی $(\frac{\varepsilon}{D})$ و در نتیجه ضریب اصطکاک $f$ ندارد، در آن صورت می‌توان با استفاده از معادله دارسی ـ ویسباخ نوشت:

$$\frac{\Delta H_{T\,(۱)}}{\Delta H_{T\,(۲)}} = (\frac{L_۱}{L_۲})(\frac{V_۱}{V_۲})^۲(\frac{D_۲}{D_۱}) = (۱)(۴)^۲(۲) = ۳۲$$

**توجه:** در صورت سوال اشاره شده که جنس لوله‌ها یکسان است و این به معنی آن است که زبری دو لوله با هم برابر می‌باشد $(\varepsilon_۱ = \varepsilon_۲)$، اما با توجه به یکسان نبودن قطر لوله‌ها نمی‌توان نتیجه گرفت که زبری‌های نسبی دو لوله هم با یکدیگر برابر است. به هر حال مطابق با نظر طراح سوال چنین فرض شد که یکسان بودن جنس لوله‌ها به معنی یکسان بودن زبری نسبی و ضریب اصطکاک $f$ (در جریان کاملاً آشفته) در آنها است.

**۱۲۳- (۴)**

حجم داخلی زانویی را مطابق شکل زیر به‌عنوان حجم کنترل در نظر می‌گیریم:




$$\sum F_x = PA + PA - S_x = \rho Q\,(V_{x_2} - V_{x_1})$$
$$\Rightarrow\ PA + PA - S_x = \rho Q\,(-V - V)\ \Rightarrow\ S_x = 2\rho QV + 2PA$$

$S_x$ نیروی وارد به سیال داخل حجم کنترل است که عکس‌العمل آن به زانویی وارد می‌شود ( $R_x$) و این نیرو نیز به نگهدارنده‌ها منتقل می‌گردد. توجه کنید که در این مسئله $S_y = 0$ می‌باشد.

**۱۲۴- (۲)**

با کنترل دیمانسیون‌ها، مشخص می‌شود که تنها گزینه (۲) دارای دیمانسیون یکسان با دیمانسیون توان است:

$$N \equiv ML^2T^{-3}$$

**۱۲۵- (۴)**

طبق معادله انتقال رینولدز نرخ افزایش $N$ در داخل سیستم ($\frac{dN_{sys}}{dt}$)، برابر است با نرخ افزایش $N$ در داخل حجم کنترل ($\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\eta\rho\, d\forall$) به‌علاوه نرخ خالص خروج $N$ از سطح کنترل ($\int_{cs}\eta\rho V\cdot dA$)، یعنی:

$$\frac{dN_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\eta\rho\, d\forall + \int_{cs}\eta\rho V\cdot dA$$

در این سوال خواسته شده تا کاربرد معادلهٔ انتقال رینولدز در قالب معادله پیوستگی، برای شکل مورد نظر بررسی شود. معادله انتقال رینولدز زمانی به معادله پیوستگی تبدیل می‌شود که در آن $N = m$ در نظر گرفته شود. در این حالت خواهیم داشت:

$$N = m\ \Rightarrow\ \eta = \frac{N}{m} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{dN_{sys}}{dt} = \frac{dm}{dt} = 0 \quad \text{(اصل بقای جرم)}$$

واضح است که در اینحالت $N_{sys} = m_{sys} \neq 0$ است. (سیستم همان جرم مشخص است)

با جایگذاری $N = m$ و $\eta = 1$ در معادله انتقال رینولدز، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\, d\forall + \int_{cs}\rho V\cdot dA = 0\ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\, d\forall = -\int_{cs}\rho V\cdot dA$$

حال ببینیم در این سوال مقدار $\int_{cs}\rho V\cdot dA$ چقدر است؟

$$\int_{cs}\rho V\cdot dA = \sum_{cs}\rho\vec{V}\cdot\vec{A} = -(3)(10)(0.1) + (2)(5)(0.2) = -1\ kg/s \neq 0 \xrightarrow{\eta = 1} \sum_{cs}\eta\rho\vec{V}.\vec{A} = -1$$

یعنی نرخ خالص خروج جرم از سطح کنترل ۱- کیلوگرم در ثانیه است یا به عبارت دیگر نرخ خالص ورود جرم به سطح کنترل ۱ کیلوگرم در هر ثانیه می‌باشد. این مفهوم را با توجه به روابط ذکر شده در بالا می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\, d\forall = -\int_{cs}\rho V.dA = -(-1) = 1\ kg/s \neq 0$$

با توجه به توضیحات ارائه شده، مشخص است که گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) عبارت‌های درستی بوده و گزینهٔ (۴) که غلط است، جواب سؤال می‌باشد.

**۱۲۶- (۱)**

مقدار ضریب $\alpha$ هیچگاه نمی‌تواند کمتر از یک شود. بنابراین گزینهٔ (۱) جواب صحیح است.

**۱۲۷- (۲)**

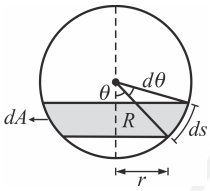
طبق قانون لزجت نیوتن، تنش برشی وارده بر کره برابر است با:

$$\tau = \mu(\frac{du}{dy})$$

با توجه به کم بودن ضخامت $t$ ، پروفیل توزیع سرعت خطی خواهد بود:

$$\tau = \mu(\frac{V}{t})\ , V = r\,\omega \ \Rightarrow\ \tau = \frac{\mu r\,\omega}{t}$$

حال با انتخاب المان $dA$ بر روی سطح کره، خواهیم داشت:




$$\begin{cases} dA = ۲\pi r\,ds \\ ds = R d\theta \\ r = R\sin\theta \end{cases} \Rightarrow\ dA = ۲\pi R^{۲}\sin\theta d\theta$$

$$dF = \tau.dA = (\frac{\mu r\,\omega}{t})(۲\pi R^{۲}\sin\theta d\theta)\ , r = R\sin\theta \ \Rightarrow\ dF = \frac{۲\pi\mu\omega R^{۳}\sin^{۲}\theta d\theta}{t}$$

$$dT = r.dF\ \ ,\ \ r = R\sin\theta \ \Rightarrow\ dT = \frac{۲\pi\mu\omega R^{۴}\sin^{۳}\theta d\theta}{t}$$

$$T = \int_{۰}^{\pi}\frac{۲\pi\mu\omega R^{۴}\sin^{۳}\theta d\theta}{t} = \frac{۲\pi\mu\omega R^{۴}}{t}\int_{۰}^{\pi}(\sin\theta - \sin\theta\cos^{۲}\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{۲\pi\mu\omega R^{۴}}{t}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^{۳}\theta}{۳}\right]_{۰}^{\pi} = \frac{۲\pi\mu\omega R^{۴}}{t}(۱ - \frac{۱}{۳} + ۱ - \frac{۱}{۳}) = \frac{۸\pi\mu\omega R^{۴}}{۳t}$$

**۱۲۸- (۲)**

با نوشتن رابطه تعادل نیروها در امتداد قائم (برای مجموعهٔ شناور)، خواهیم داشت:

$$\sum F_y = ۰ \ \Rightarrow\ W = F_B + F_j$$

حال مقادیر $W$، $F_B$ و $F_j$ را به‌دست آورده و در رابطه تعادل قرار می‌دهیم:

$$W = ۳۴/۴ + ۴(h\times ۱) = ۳۴/۴ + ۴h \quad kN$$

$$F_B = \gamma_w \forall = (۱۰)\left[(h-۱)(۴\times ۱)\right] = ۴۰(h-۱) \quad kN$$

$$F_j = \rho Q V\ \ ,\ \ V = \sqrt{V_{۰}^{۲} - ۲gh} = \sqrt{۶^{۲} - ۲\times ۱۰\times ۱} = ۴\ m/s$$

$$F_j = (۱۰۰۰)(۰/۱\times ۶)(۴) = ۲۴۰۰\ N = ۲/۴ \quad kN$$

$$W = F_B + F_j \ \Rightarrow\ ۳۴/۴ + ۴h = ۴۰(h-۱) + ۲/۴ \ \Rightarrow\ h = ۲\ m$$

**توجه**: سرعت برخورد جت به سکو برابر $V = ۴\ m/s$ است که با سرعت خروج آب از فواره، $V_{۰} = ۶\ m/s$ متفاوت می‌باشد.

**۱۲۹- (۳)**

$$F = \sigma\times L = (۰/۰۷)(۶\times ۰/۰۱\times ۲) = ۰/۰۰۸۴N$$

**توجه**: مولکول‌های آب به هر دو محیط داخلی و خارجی حلقه فلزی چسبیده‌اند.

**۱۳۰- (۱)**

$$x^{۲} + y^{۲} - \frac{k}{c}y = ۰ \xrightarrow[y=۱۰m]{x=۵m} ۵^{۲} + ۱۰^{۲} - (\frac{k}{c})\times ۱۰ = ۰ \ \Rightarrow\ \frac{k}{c} = ۱۲/۵$$

$$\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} - ۱۲/۵y = ۰ \ \Rightarrow\ ۲x + ۲y(\frac{dy}{dx}) - ۱۲/۵(\frac{dy}{dx}) = ۰ \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \frac{۲x}{۱۲/۵ - ۲y} \\ \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x} \end{cases} \Rightarrow\ \frac{V_y}{V_x} = \frac{۲x}{۱۲/۵ - ۲y}$$

به‌ازای $x = ۵$ و $y = ۱۰m$ ، $V_x = ۵\ m/s$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{V_y}{۵} = \frac{۲\times ۵}{۱۲/۵ - ۲\times ۱۰} \ \Rightarrow\ V_y = -۶/۶۷\ m/s$$

## زبان عمومی و تخصصی

***بخش A : لغت***

***دستورالعمل: شماره (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) را که به بهترین شکل جمله مربوطه را کامل می‌کند انتخاب نمایید. سپس گزینه صحیح را در پاسخنامه خود علامت بزنید.***

**۱- زمانی اختلاف زیادی بین آن دو نظریه‌پرداز وجود داشت اما اکنون برخی ..... در عقاید بین آن‌ها وجود دارد.**

۱) اعتقاد راسخ ۲) مشارکت ۳) فرض ۴) همگرایی

گزینه ۴ صحیح است.

**۲- درمانی که قبلاً برای این بیماری داده می‌شد اکنون ..... نیست.**

۱) متداول ۲) ضربه ۳) دورنما ۴) اندازه

گزینه ۱ صحیح است.

**۳- مذاکرات در حال ادامه یافتن هستند در مورد اینکه چه کسی باید دارای ..... بر جزیره باشد.**

۱) حاکمیت ۲) قابلیت تداوم ۳) تأسیس ۴) اجرا

گزینه ۱ صحیح است.

**۴- قانون جدید به اعضا اجازه می‌دهد که به جای ..... ، با رأی اکثریت تصمیم‌گیری نمایند.**

۱) عظمت ۲) همدلی ۳) طرفدار ۴) ساختار

گزینه ۲ صحیح است.

**۵- اکنون که زبان انگلیسی به عنوان زبان اصلی استفاده می‌شود، زبان بومی کشور ..... .**

۱) مغایرت دارد. ۲) نقض شده است. ۳) نادیده گرفته شده است. ۴) متمایز شده است.

گزینه ۳ صحیح است.

**۶- مسئولیت‌های افراد مختلفی که در این بخش کار می‌کنند به طور واضح ..... .**

۱) منسوب شده است. ۲) تأثیر متقابل دارند. ۳) آشنا شده‌اند. ۴) تعیین حدود شده‌اند.

گزینه ۴ صحیح است.

**۷- موزه در حال برنامه‌ریزی برای افزایش میزان فضای ..... به هنر مدرن است.**

۱) حمایت شده ۲) ترفیع یافته ۳) اختصاص یافته ۴) به نمایش گذاشته شده

گزینه ۳ صحیح است.

**۸- فرصت‌های اشتغال خانم‌ها اغلب به شدت با تعهدات خانوادگی ..... .**

۱) در بر گرفته می‌شوند. ۲) مبارزه شده‌اند. ۳) سرزنش شده‌اند. ۴) محدود می‌شوند.

گزینه ۴ صحیح است.

**۹- با اینکه این عناوین تحقیق، همگی به زبانشناسی مربوط هستند ولی می‌توانند به چهار دسته ..... تقسیم شوند.**

۱) کامل ۲) مجزا ۳) نزدیک ۴) نهایی

گزینه ۲ صحیح است.

**۱۰- یک درمان جدید باعث می‌شود که این بیماری وارد یک مرحله ..... شود ولی بیمار هرگز به طور کامل مداوا نخواهد شد.**

۱) نهفته ۲) مرکزی ۳) فرسایشی ۴) اساس، اصولی

گزینه ۱ صحیح است.

***بخش B : گرامر***

***دستورالعمل: متن زیر را بخوانید و تصمیم بگیرید که کدام گزینه(۱)،(۲)،(۳) و(۴) به بهترین شکل با هر جای خالی همخوانی دارد. سپس گزینه صحیح را در پاسخنامه خود علامت بزنید.***

سیاره مشتری بزرگترین سیاره در بین ۹ ستاره‌ایست که به دور خورشید می‌چرخند. مدار آن در .....(۱۱) ..... ۷۷۸ میلیون کیلومتری از خورشید، ورای مدارهای سیارهٔ مریخ و کمربند سیاره‌های کوچک مابین آن‌ها قرار دارد. ۱۱/۸۶ سال زمینی طول می‌کشد تا یک مدار را به دور خورشید .....(۱۲) ..... و هر ۹ ساعت و ۵۵ دقیقه و ۲۹ ثانیه یک‌بار به دور محور خودش می‌چرخد.

از زمین، با چشم غیر مسلح سیاره مشتری به شکل یک نقطه ستاره مانند روشن نمایان است، از نظر درخشندگی در مقام دوم .....(۱۳) .....، پس از سیاره زهره است. ستاره‌شناسان زمان‌های قدیم برای احترام به فرمانروای خدایان مورد پرستش رومی - یونانی، نام آن را ژوپیتر گذاشتند، گر چه آن‌ها نمی‌دانستند که این نام واقعاً .....(۱۴) ..... . در واقع، سیارهٔ مشتری از مجموع تمامی سیارات دیگر بزرگتر است. قطر آن ۱۱ برابر قطر زمین است و می‌تواند بیش از ۱۵۰۰ زمین را در حجم خود جای دهد. جرم آن ۳۱۸ .....(۱۵) ..... است اما به دلیل اینکه سیاره مشتری بسیار بزرگ است، به طور قابل توجهی سبک است و چگالی‌اش فقط اندکی بیشتر از آب است.

**۱۱-** ۱) یک فاصلهٔ متوسط ۲) یک دور متوسط ۳) یک متوسط دور ۴) یک متوسط فاصله

در انگلیسی صفت قبل از اسم می‌آید. distant یک صفت و به معنای دور است. در حالی که بعد از average باید از اسم آن یعنی distance استفاده شود.

گزینه ۱ صحیح است.

**۱۲-** ۱) کامل کننده ۲) برای اینکه کامل کند. ۳) زمانی که کامل می‌کند. ۴) تا هنگامی که کامل می‌کند.

گزینه ۲ صحیح است.

**۱۳-** ۱) to only ۲) only of ۳) only to ۴) of only

گزینه ۴ صحیح است.

**۱۴-** ۱) اگر مناسب باشد ۲) مناسب بودن ۳) اینکه چقدر مناسب است. ۴) در مورد مناسب بودن

گزینه ۳ صحیح است.

**۱۵-** ۱) از ۲) از مال ۳) از مال‌های ۴) خیلی بیشتر از

در اینجا مقایسه‌ای بین قطر زمین و مشتری انجام شده است که به جای تکرار دوبارهٔ کلمه diameter از عبارت that of استفاده شده است. این امکان در عبارات مقایسه‌ای وجود دارد. همان‌طور که در خود متن بعد از این مقایسه، دو بار دیگر از that of استفاده شده است.

گزینه ۲ صحیح است.

***بخش C : درک‌مطلب***

***دستورالعمل: متن زیر را بخوانید و بهترین گزینه(۱)،(۲)،(۳) یا(۴) را انتخاب نمایید. سپس آن را در پاسخنامه خود علامت بزنید.***

***مواد لایروبی شده، نشست غیر عادی را تجربه خواهند کرد:***

یک جایگاه کنترل مواد لایروبی شده هم‌اکنون برای متصل شدن به کرانه شرقی منطقه مدیریتی مواد لایروبی شده جزیره کرینی(CIDMMA) که در طول رودخانه الیزابت در پورت موث ویرجینیا قرار دارد در حال طراحی شدن است. بزرگترین چالش آن است که مهندسان انتظار نشستی به بزرگی ۶/۱ متر را دارند. به محض اینکه سطح زمین تثبیت شود یک پایانه دریایی جدید بر روی جایگاه مواد لایروبی شده ساخته خواهد شد.

فرودگاه بین‌المللی کانسایی ژاپن که در سال ۱۹۹۴ بر روی یک جزیره ساخت بشر که انتظار می‌رفت تا میزان ۱۲ متر در طی ۵۰ سال نشست کند ساخته شد، در سال ۲۰۰۱ به میزان متوسط ۱۱/۵ متر نشست کرده بود. در کاوش برای جلوگیری از انواع مشابه این مورد، مهندسانی که در حال کار بر روی طرح جزیره کرینی هستند با توجه به اضافه بارگذاری معمول به منظور تسهیل نشست قبل از اینکه ساخت و ساز آغاز شود، خیلی با دقت جلو می‌روند.

به منظور ایجاد جایگاه جدید، ۳ خاکریز به CIDMMA اضافه خواهد شد. کرانه شرقی این جایگاه حدود ۲۵۹۱ متر طول خواهد داشت و یک اسکله و ۲۲ جرثقیل کانتینری را برای تخلیه بار کشتی‌ها در خود جای خواهد داد. خاکریزهای ۷۶۲ متری، کرانه‌های شمالی و جنوبی را شکل خواهند داد.

یک کانال کشتیرانی به عمق ۱۸/۳ متر در طول کرانه شرقی این جایگاه جدید در جریان خواهد بود که به کشتی‌ها این قابلیت را خواهد داد که کالاهای خود را مستقیماً در اسکله‌ای که بخشی از پایانه دریایی را شکل خواهد داد تخلیه نمایند. این پایانه با کمک جاده و خط آهن قابل دسترسی خواهد بود و خط آهن آنجا ظرفیت حمل و نقل یک میلیون کانتینر را در سال خواهد داشت.

این جایگاه جدید مساحت ۲۴۳ هکتار را پوشش خواهد داد و با مواد لایروبی شده راه‌های آبی اطراف پر خواهد شد.

مهندسان در حال به‌دست آوردن اطلاعاتی در مورد پروژه‌های لایروبی در بندرگاه هستند تا تعیین نمایند که خاک‌های آن پروژه‌ها می‌توانند در چه محلی برای پر کردن جایگاه مورد استفاده قرار گیرند. مواد درشت دانه یا ماسه در مناطق بحرانی‌تر و مواد ریزدانه در مناطقی که حالت بحرانی کمتری دارند قرار خواهند گرفت.

انجام کارهای مهندسی بر روی آن پرکننده‌ها از ابتدا به مهندسان کمک خواهد کرد که نشست‌های آینده را کنترل نمایند. به محض اینکه این جایگاه با مواد لایروبی شده پر شود، احتمالاً این منطقه با حداکثر ۹ متر خاک، بارگذاری خواهد شد. زمانی که به حداکثر نشست برسیم، خاک اضافی برداشته خواهد شد و این منطقه روسازی می‌گردد. این روش ساده است اما معمولاً کم‌هزینه‌ترین گزینه است. آن لایه سربار ممکن است تا حداکثر یک سال در آن‌جا بماند.

در ابتدا یک سیستم سرریز بتنی دارای دریچه به عنوان یک سازه خروجی برای جریان مازاد آب عمل خواهد کرد هنگامی که مواد لایروبی شده در آن جایگاه نشست نمایند؛ نیروی ثقل، آب را به خارج از سرریز هدایت خواهد کرد، و کیفیت آب تحت نظارت خواهد بود و در انطباق با استانداردهای کیفیت زیست محیطی نگهداشته خواهد شد. به محض اینکه جایگاه از مواد لایروبی شده پر شود، آب اضافی باقی‌مانده احتمالاً با استفاده از زهکش‌های فتیله‌ای، که اغلب زهکش‌های نواری نامیده می‌شوند، از سیستم بیرون خواهد رفت. مواد لایروبی شده بر روی ۳۰/۵ متر خاک رس زیرزمینی اشباع شده با آب قرار خواهند گرفت. مهندسان تصمیم دارند که این زهکش‌ها را، که شبیه پوشال‌های موجدار بزرگ عمل می‌کنند، در هر موقعیتی با فاصله۲ تا ۳/۵ متری قرار دهند. این زهکش‌ها ارائه‌دهندهٔ مسیری هستند که توسط آن آب می‌تواند تا سطح بالا بیاید، جایی که یک پوشش زهکشی ماسه‌ای آن آب را جمع‌آوری می‌کند و اجازه می‌دهد تا تبخیر شود. جریان‌های رودخانه و جزر و مد ۰/۸ متری جلوی عملکرد این زهکشی را نمی‌گیرند.

به دلیل دامنهٔ طرح و میزان نشستی که باید رخ دهد، قبل از اینکه بارهای متمرکز کانتینرهای حمل کننده بتوانند به پایانه دریایی وارد کنند، خاکریزهای داخلی مراحل ساخت و ساز را تفکیک خواهند نمود. برنامه‌های طرح حاضر قید می‌کنند که جایگاه(مواد لایروبی شده) باید در دو تا چهار مرحله ساخته شود، مقاطع اسکله در کنار مراحل تکمیل شده ساخته خواهند شد.

خاکریزهای سنگی و ماسه‌ای اضافه پس از اولین برش عمیقی که برای کانال کشتیرانی انجام می‌گیرد در کنار کرانه شرقی این جایگاه ساخته خواهند شد. این کانال کشتیرانی تا عمق ۲۷/۵ متری لایروبی خواهد شد و مواد لایروبی شده در CIDMMA قرار خواهند گرفت. خاکریز شرقی سپس در عمق ۲۷/۵ متری ساخته خواهد شد و مجدداً پر خواهد شد به گونه‌ای که کانال کشتیرانی به عمق ۱۸/۳ متر بتواند پهلوی آن در جریان باشد. مهندسان انتظار دارند که ماسهٔ محلی برای خاکریزها استفاده شود و دیگر اینکه سنگ باقطر ۳۰۵ نانومیلی‌متر برای این پروژه آورده شود(به محل پروژه حمل خواهد شد). CIDMMA در حال حاضر ۵/۲ کیلومتر مربع را پوشش می‌دهد و بیش از ۱۷۲ متر مکعب از مواد لایروبی شده را در بر دارد. این جایگاه ۲۴۳ هکتاری ۲/۲ میلیارد دلار هزینه خواهد داشت و ۲۵ سال برای ساخته شدن زمان خواهد برد.

**۱۶- از موضوع این مقاله می‌توان دریافت کرد که نویسنده می‌خواهد از طرح فرودگاه کانسایی استفاده نماید:**

۱) به شکل یک نقشه اصلی برای ساخت آن جایگاه کنترل جدید.
۲) برای نشان دادن اینکه میزان نشست چه‌قدر می‌تواند دست پایین گرفته شود.
۳) به منظور ایجاد یک استاندارد بین‌المللی برای نشست مکان‌های دفن زباله.
۴) زیرا میزان نیاز لایروبی را برای پایانه جدید تخمین می‌زند.
گزینه ۲ صحیح است.

**۱۷- پیش‌بینی می‌شود که در مدت ..... آن جایگاه کنترل تکمیل شود.**

۱) ۱ سال ۲) ۵ سال ۳) ۲۵ سال ۴) ۵۰ سال
با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

The 243 ha cell will cost $ 2.2 billion and take 25 years to construct

**۱۸- خاکریز پرکننده برای جایگاه جدید در ابتدا تشکیل شده است از:**

۱) بتن مسلح ۲) کانتینرهای حمل آسیب دیده
۳) مواد لایروبی شده از راه‌های آبی نزدیک ۴) خاک اضافی از کارگاه‌های ساختمانی منطقه‌ای
با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

The new cell will cover 243 ha and be filled with dredged material from the surrounding water ways.

**۱۹- به منظور اجازه به ساخت و ساز اسکله قبل از اینکه پروژه کامل شود:**

۱) جایگاه مورد نظر در طی مراحلی ساخته خواهد شد.
۲) یک سیستم سرریز بتنی برای نگهداری اسکله ساخته خوهد شد.
۳) اسکله بر روی شاه تیرهایی که در کنار جایگاه قرار دارند ساخته خواهد شد.
۴) اسکله بر روی خاکریزهای سنگی و ماسه‌ای که در بر دارنده آن جایگاه هستند ساخته خواهد شد.
با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

Current design plans stipulate that the cell be constructed in 2 to 4 phases. Sections of the wharf will be constructed alongside the completed phases.

**۲۰- یک روشی که مهندسان امیدوارند که نشست را کنترل نمایند ..... است.**

۱) ریختن یک فونداسیون بتنی در پایه آن جایگاه

۲) با قرار دادن سرباری از خاک بر روی مواد لایروبی شده

۳) با زهکشی کردن سریع با استفاده از کانال کشتیرانی که در کنار آن جایگاه ساخته می‌شود.

۴) استفاده کردن از مواد درشت دانه یا ماسه در قسمت‌های بحرانی و مواد سیلتی در قسمت‌های با حالت بحرانی کمتر

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

Coarse material or sand will be put in the more critical areas and fine silty materials in the less critical areas. Engineering the fill from the beginning will help the engineers control future settlement.

**۲۱- از موضوع این مقاله دریافت می‌شود که هدف از لایهٔ سربار ..... است.**

۱) مورد استفاده قرار گرفتن به شکل یک اساس برای زهکش‌های فتیله‌ای

۲) فراهم آوردن یک سطح محکم که بر روی آن روسازی انجام بگیرد.

۳) داشتن یک سطح موقت ارزان که روی آن(پایانه) ساخته شد.

۴) سنگین کردن مواد لایروبی شده و سرعت بخشیدن به نشست

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

When the maximum settlement has been reached, the excess earth will be removed and the site paved over.

**۲۲- عملکرد اصلی پروژه‌ای که باید در آن منطقه تازه ایجاد شده، ساخته شود چه خواهد بود؟**

۱) فراهم آوردن یک پایانه برای کشتی‌های کانتینردار به منظور تخلیه بار

۲) فراهم آوردن یک پایانه برای قطارهای باری به منظور آوردن کالاها برای کشتی ها

۳) فراهم آوردن مبنای عملیاتی برای توسعه CIDMMA

۴) فراهم آوردن یک پایانه مسافری برای کشتی های گردشی و قطارهای مسافری

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

The east side of the cell will …… accommodate a wharf and 22 container cranes for unloading ships.

**۲۳- زهکش‌های نواری:**

۱) آب را به خارج از دریچه‌های سرریز بتنی هدایت می‌نمایند.

۲) اجازه می‌دهند که مواد لایروبی شده در بالای رس اشباع زیرزمینی قرار گیرند.

۳) آب را به یک لایهٔ ماسه‌ای در بالای مواد لایروبی شده انتقال می‌دهند تا بتواند تبخیر شود.

۴) جایگاه را به چند مرحله تقسیم می‌نمایند به طوری که ساخت و ساز بتواند قبل از تکمیل پروژه آغاز شود.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

The drains will offer a path by which the water can rise to the surface, where a sand drainage blanket will collect the water and allow it to evaporate.

**۲۴- کدام مورد(مؤلفه) توسعه را می‌دانیم که احتمالاً قابل یافتن در محل پروژه نیست؟**

۱) ماسه که بخشی از خاکریزها را شکل می‌دهد.

۲) سنگ‌های بزرگی که بخشی از خاکریزها را شکل می‌دهند.

۳) مواد بازیافت شده در عملیات لایروبی

۴) خاک سرباری که مواد لایروبی شده را می‌پوشاند.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

The engineers expect that …… the 305 nmL diameter rock for the project will be shipped in.

**۲۵- چرا این موضوع برای نشست اهمیت دارد که قبل از ساخته شدن پایانه(خاک) باید تثبیت شود؟**

۱) زیرا اگر مواد پرکننده پایدار نباشند، خاکریزها نیز بی‌ثبات خواهند شد.

۲) زیرا یک کانال کشتیرانی عمیق وجود خواهد داشت که در کنار جایگاه در جریان است.

۳) زیرا رودخانه و جزر و مد ممکن است منطقهٔ به تازگی ایجاد شده را از زیر تخریب کرده و باعث فروپاشی آن گردند.

۴) زیرا کانتینرهای حمل شده با کشتی در آن محل سنگین خواهند بود و ممکن است خودشان باعث نشست شوند.

از پاراگراف ۵ و ۷ نتیجه می‌گیریم که گزینه ۴ صحیح است.

***در ۵ سؤال زیر، پاسخی را انتخاب نمایید که به بهترین شکلی از نظر فنی هر عبارت را کامل می‌نماید.***

**۲۶- روابط دیگری برای محاسبه دوره‌های تناوب اصلی دودکش‌ها پیشنهاد شده اند، از قبیل آن رابطه‌ای که توسط هاوسنر برای تیرهای طره‌ای باریک شونده (پیشنهاد شده است). این کار همچنین روابط مربوط به دوره‌های تناوب ..... دوم و سوم را نیز ارائه می‌نماید.**

۱) مناسب ۲) استوانه‌ای ۳) مفید ۴) حالت

گزینه ۴ صحیح است.

**۲۷- توصیفی از تحلیل طیف پاسخ هشت دودکش بتنی مسلح با ارتفاع تا ۲۵۰ متر توسط رومان ارائه شده است، کسی که از داده‌های ورودی هفت زلزله و ..... سازه‌ای با ۵ درصد بحرانی استفاده کرد.**

۱) معادل ۲) نیرو ۳) میرایی ۴) ممان(گشتاور)

گزینه ۳ صحیح است.

**۲۸- یکی از مهم‌ترین مشلغه‌های فکری، ایجاد اطمینان از این موضوع است که ..... لرزه‌ای در جاهای انتخاب شده از پل‌ها - یعنی عموماً در بخش‌های قابل رؤیت پایه‌ها به منظور تسهیل در ترمیم‌های پس از زلزله - شکل خواهند گرفت.**

۱) نیروها ۲) مفاصل(لولاهای) ۳) شکل‌پذیری ۴) سخت شدن

گزینه ۲ صحیح است.

**۲۹- برای پل‌های مهم، تحلیل دینامیکی مطلوب‌ترین تحلیل است، و جایی که فونداسیون‌ها در خاک‌های ..... ساخته شده یا کوبیده می‌شوند، یک تحلیل پاسخ دینامیکی از محل ممکن است ضروری باشد.**

۱) نرم‌تر ۲) متفاوت ۳) بحرانی ۴) تحت تأثیر قرار گرفته

گزینه ۱ صحیح است.

**۳۰- تنش‌های بر هم کنش افقی میان خاک و پی به شکل قابل بحثی نسبت به تنش‌های قائم مشکل‌آفرین‌تر هستند، زیرا شناخت ما از فشارهای مقاوم لرزه‌ای ..... و اثر فشار محرک لرزه‌ای در موقعیت‌های مختلف پی نسبتاً کم است.**

۱) مناسب ۲) مجاز ۳) راهنمایی ۴) طراحی

گزینه ۲ صحیح است.

## ریاضیات

**۳۱- (۲)**

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم $(L(y)=Y)$:

$$L\left\{(1-t^2)y''\right\}-2L\{ty'\}+2L\{y\}=0 \Rightarrow L\{y''\}-L\left\{t^2y''\right\}-2L\{ty'\}+2L\{y\}=0$$

$$\Rightarrow s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)-\frac{d^2}{ds^2}\left\{s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)\right\}+2\frac{d}{ds}\left\{sL\{y\}-y(0)\right\}+2L\{y\}=0$$

با اعمال مقادیر اولیه نتیجه می‌شود:

$$s^2Y-1-s^2Y''-4sY'-2Y+2sY'+2Y+2Y=0 \Rightarrow s^2Y''+2sY'-(s^2+2)Y=-1$$

**۳۲- (۲)**

از تغییر متغیر $2(t-1)=\ln u$ استفاده می‌کنیم.

$$2(t-1)=\ln u \Rightarrow 2t=2+\ln u \Rightarrow t=1+\frac{1}{2}\ln u \Rightarrow dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{u}\ ,\ e^{2t}=u.e^2$$

با جایگذاری مقادیر فوق در انتگرال خواسته شده در سؤال، خواهیم داشت:

$$\int_{1+\frac{\ln 2}{2}}^{x}\frac{e^{2t}}{t-1}dt=\int_2^{e^{2x-2}}\frac{u.e^2}{\frac{\ln u}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{du}{u}\right)=e^2\int_2^{e^{2x-2}}\frac{du}{\ln u}$$

و نهایتاً با توجه به تعریف تابع $L_i(x)$ نتیجه می‌شود:

$$=e^2.L_i(e^{2x-2})$$

**۳۳- (۲)**

معادله این پاره‌خط عبارت است از:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=2t-1 \end{cases} \Rightarrow dx=dy=\frac{1}{2}dz$$

$$\Rightarrow \text{انتگرال} = \int_{x=0}^{1}(x+1)\,dx+(2x-1)\,dx-2x\,dx=\int_0^1 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

**۳۴- (۳)**

از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم:

$$3x^2-3y^2y'=0 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} 6x-6yy'^2-3y^2y''=0$$

از رابطه اول به‌دست می‌آید $y'=\frac{x^2}{y^2}$ که پس از جایگذاری آن در رابطه دوم، خواهیم داشت:

$$6x-6y\frac{x^4}{y^4}-3y^2y''=0 \Rightarrow y''=\frac{2x}{y^2}-\frac{2x^4}{y^5} \Rightarrow y''=\frac{2(xy^3-x^4)}{y^5} \Rightarrow y''=\frac{2x\,(y^3-x^3)}{y^5} \Rightarrow y''=\frac{-2x}{y^5}$$

**۳۵- (۴)**

طول قوس منحنی $C$ بین دو نقطه $A$ و $B$ از رابطه مقابل حاصل می‌شود:( $ds$ المان طول قوس) $l=\int_A^B ds$

و چون منحنی $C$ به صورت $y=P(x)$ است، داریم: $ds=\sqrt{1+p'^2(x)}\,dx=\sqrt{1+(\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2x^3})^2}\,dx$

بنابراین:

$$l=\int_{x=1}^{2}\sqrt{1+(\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2x^3})^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{4+(x^3-\frac{1}{x^3})^2}\,dx$$

با توجه به اتحاد $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$ داریم:

$$l=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{(x^3+\frac{1}{x^3})^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2(x^3+\frac{1}{x^3})\,dx=\frac{1}{2}(\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2})\Big|_{x=1}^{2}=\frac{33}{16}$$

**۳۶- (۱)**

از روش اپراتور معکوس استفاده می‌کنیم:

$$y_P=\frac{1}{D^2+4}\{3\sin 2x+2\sinh x\}\ ;\ (\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2})=3\frac{1}{D^2+4}\{\sin 2x\}+\frac{1}{D^2+4}\{e^x\}-\frac{1}{D^2+4}\{e^{-x}\}$$

$$=3x\frac{1}{2D}\{\sin 2x\}+\frac{e^x}{5}-\frac{e^{-x}}{5}=\frac{3}{2}x\int\sin 2x\,dx+\frac{2}{5}(\frac{e^x-e^{-x}}{2})=\frac{-3}{4}x\cos 2x+\frac{2}{5}\sinh x$$

**۳۷- (۱)**

اگر $X$ بردار ویژه ماتریس $A$ باشد، باید به ازای اسکالری مانند $\lambda$ در رابطه $AX=\lambda X$ صدق کند، یعنی؛ نتیجه $AX$ مضربی از خود $X$ باشد(که به آن مضرب، $\lambda$ ، مقدار ویژه گفته می‌شود.)

حال برای بردار $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ داریم:

$$AX=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\a+b+1\\3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow a+b+1=3$$

از طرفی برای بردار $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ داریم:

$$AX=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\a-1\\0\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$$

بنابراین $a=1$ و $b=1$ ، دقت کنید که با این محاسبات مقادیر ویژه ماتریس یعنی $\lambda=0$ و $\lambda=3$ نیز به‌دست می‌آیند.

**۳۸- (۱)**

$x=0$ نقطه غیرعادی معادله است، با تقسیم طرفین معادله به ضریب $y''$ نتیجه می‌شود:

$$y''+\frac{2}{3x}y'+\frac{1}{3}y=0 \Rightarrow P(x)=\frac{2}{3x}\ ,\ Q(x)=\frac{1}{3}$$

برای بررسی منظم بودن نقطه، داریم:

$$\alpha=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{2}{3x}=\frac{2}{3}\ ,\ \beta=\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1}{3}=0$$

پس، معادله مشخصه به صورت زیر است:

$$r^2+(\alpha-1)r+\beta=0 \Rightarrow r^2-\frac{1}{3}r=0 \Rightarrow r=0\ ,\ \frac{1}{3}$$

بنابراین، $y_1=x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ و $y_2=x^0\sum_{n=0}^{\infty}bx^n$ جوابهای پایه‌ای معادله می‌باشند.

**۳۹- (۳)**

معادله فاقد $x$ است، بنابراین با فرض $y'=u$ در معادله داده شده نتیجه می‌شود:

$$yy''=2 \Rightarrow uu'=2 \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{انتگرال از}} \frac{u^2}{2}=2x+c_1 \Rightarrow y'^2=4x+2c_1$$

با اعمال شرط اولیه $y'(0)=2$ مقدار $c_1=2$ به‌دست می‌آید:

$$y'^2=4(x+1) \Rightarrow y'=2\sqrt{x+1} \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{انتگرال از}} y=\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c_2$$

که از شرط $y(0)=1$ نتیجه می‌شود: $c_2=\frac{-1}{3}$ و بنابراین:

$$y=\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3} \Rightarrow y(3)=\frac{4}{3}(3+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}=\frac{31}{3}$$

**۴۰- (۲)**

$$f(x)=x^2-x\sin x-\cos x=0$$

$$f'(x)=2x-\sin x-x\cos x+\sin x=x\underbrace{(2-\cos x)}_{\text{همواره مثبت}}$$

| $x$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ |

بنابراین باید هر یک از فاصله‌های $x\geq 0$ و $x\leq 0$ را جداگانه بررسی کرد.

حالت ۱ $(x\geq 0)$:

$I$: $x\geq 0 \to f'(x)\geq 0 \to$ $f$ تابع صعودی است $\to$ $f$ در بازه $[0\ ,+\infty)$ حداکثر یک ریشه دارد.

$II$: با توجه به قضیه مقدار میانی داریم:

$f(0)=-1<0\ ,\ f(+\infty)=+\infty>0 \Rightarrow$ $f$ در این بازه حداقل یک ریشه دارد.

از $I$ و $II$ نتیجه می‌شود $f$ در بازه $[0\ ,+\infty)$ دقیقاً یک ریشه دارد.

حالت ۲ $(x\leq 0)$:

$I$: $x\leq 0 \to f'\leq 0 \to$ $f$ تابع نزولی است $\to$ $f$ در بازه $(-\infty\ ,0]$ حداکثر یک ریشه دارد.

$II$: با توجه به قضیه مقدار میانی داریم:

$f(0)=-1<0\ ,\ f(-\infty)=+\infty>0 \Rightarrow$ $f$ در این بازه حداقل یک ریشه دارد.

از $I$ و $II$ نتیجه می‌شود $f$ در بازه $(-\infty\ ,0]$ دقیقاً یک ریشه دارد.

بنابراین، $f$ در بازه اعداد حقیقی دقیقاً دو ریشه دارد.

**۴۱- (۱)**

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\underbrace{(2xy^2+2y)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(2x^2y+2x)}_{N(x,y)}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=4xy+2$$

بنابراین، معادله از نوع کامل بوده و جواب آن به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$\int M\,dx+\int N^*dy=C$$

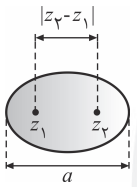
که در آن $N^*$ جملاتی از $N$ می‌باشد که فاقد $x$ هستند.

در نتیجه، جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$\int(2xy^2+2y)\,dx+\int 0\,dy=C \Rightarrow x^2y^2+2xy=C$$

**۴۲- (۴)**

با توجه به پاسخ تست ۴۰ از سال ۸۴، چون $|z_2-z_1|=|-1-1|=2>1$ بنابراین مجموعه تهی جواب است.



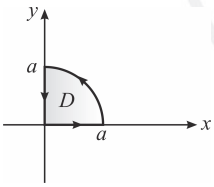

**۴۳- (۴)**

تست ۳۸ از سال ۸۴ را ملاحظه کنید.

**۴۴- (۴)**

منحنی مرز $C$ به صورت زیر است:

با توجه به پیوسته بودن توابع $P(x,y)=x-y^3$ و $Q(x,y)=y^3+x^3$ و مشتقات آن‌ها و بسته بودن مرز $C$ از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:




$$\text{انتگرال}=\iint_D(Q_x-P_y)\,dx\,dy=\iint_D(3x^2+3y^2)\,dx\,dy=3\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

با استفاده از مختصات قطبی نتیجه می‌شود:

$$\Rightarrow \text{انتگرال}=3\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{a}r^2.r\,dr\,d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cdot\int_0^a r^3dr=3\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^a=\frac{3\pi}{8}a^4$$

**۴۵- (۱)**

با تغییر متغیر $u=\frac{y}{x^2}$ و $v=\frac{x}{y^2}$ داریم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\\ \frac{1}{y^2} & \frac{-2x}{y^3}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{4}{x^2y^2}-\frac{1}{x^2y^2}}=\frac{x^2y^2}{3}\Rightarrow J=\frac{1}{3u^2v^2}$$

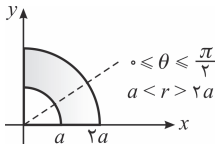
مرزهای ناحیه جدید به صورت $1\le u\le 2$ و $1\le v\le 3$ می‌باشند و در نتیجه داریم:

$$\text{مساحت}=\iint_D dx\,dy=\iint_{D'}|J|\,du\,dv=\int_{v=1}^{3}\int_{u=1}^{2}\frac{1}{3u^2v^2}\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^3\frac{+1}{v^2}\left(\frac{-1}{u}\right)\Big|_{u=1}^{2}dv=\frac{1}{3}\int_1^3\frac{1}{v^2}\left(\frac{-1}{2}+1\right)dv=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{v}\right)\Big|_{v=1}^{3}=\frac{1}{6}\left(\frac{-1}{3}+1\right)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$$

**۴۶- (۳)**

با توجه به آنکه تابع تحت انتگرال نسبت به متغیرها زوج بوده و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به صفحات مختصات متقارن است، انتگرال را در $\frac{1}{8}$ اول فضا حساب کرده و نتیجه را ۸ برابر می‌کنیم: در $\frac{1}{8}$ اول فضا، حجم مورد نظر از پایین به $z=0$ و از بالا به کره محدود بوده و تصویر آن در صفحه $xy$ مطابق شکل است:




$$I = 8 \iiint_{R'} dv = 8 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=a}^{2a} \int_{z=0}^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^2(r)\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 8\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right)\cdot \int_{r=a}^{2a} r^3 . \sqrt{4a^2-r^2}\, dr = 4\pi \int_{r=a}^{2a} r^2 \times \sqrt{4a^2-r^2}\,(r\,dr)$$

تغییر متغیر: $4a^2 - r^2 = u^2 \Rightarrow -2r\,dr = 2u\,du \Rightarrow r\,dr = -u\,du$

$$= 4\pi \int_{\sqrt{3a}}^{0} (4a^2-u^2)\times u \times (-u\,du) = 4\pi \int_0^{\sqrt{3a}} (4a^2u^2 - u^4)\,du$$

$$= 4\pi\left(\frac{4}{3}a^2u^3 - \frac{1}{5}u^5\right)\Big|_0^{\sqrt{3}a} = 4\pi\left(\frac{4}{3}\times a^2 \times 3\sqrt{3}\,a^3 - \frac{1}{5}9\sqrt{3}\,a^5\right) = \frac{44}{5}\sqrt{3}a^5\pi$$

**۴۷- (۲)**

با توجه به بسط مک لورن تابع $e^x$ داریم:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

طرفین را در $x$ ضرب می‌کنیم:

$$xe^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}$$

حال از طرفین مشتق گرفته و سپس در $x$ ضرب می‌کنیم:

$$e^{-x} - xe^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)x^n}{n!} \xrightarrow{\times x} \sum \frac{(-1)^n (n+1)x^{n+1}}{n!} = xe^{-x} - x^2e^{-x}$$

**۴۸- (۳)**

با تغییر متغیر $t = -u + 2$ در انتگرال مورد سؤال، داریم:

$$dt = -du$$

$$\int_1^2 \frac{e^{-t}}{t-3}\,dt = \int_1^0 \frac{e^{u-2}}{-(u+1)}(-du) = -e^{-2}\int_0^1 \frac{e^u}{u+1}\,du = -e^{-2}A$$

**۴۹- (۴)**

انتگرال زیر در بی‌نهایت ناسره است.

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} - \frac{c}{x+1}\right) dx$$

با نوشتن هم‌ارز تابع تحت انتگرال در بی‌نهایت داریم:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2}} - \frac{c}{x}\right) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - c\right) dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - c\right)\int_0^{\infty} \frac{dx}{x}$$

چون $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x}$ واگراست؛ بنابراین شرط همگرایی انتگرال فوق آن است که:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**۵۰- (۳)**

با نوشتن مسئله به صورت $I = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b$ داریم:

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x + ax + bx^3}{x^3}$$

به‌دلیل حضور جملات $x$ و $x^3$ در صورت، سری مک لورن $\sin 3x$ را تا جمله شامل توان پنجم $x$ می‌نویسیم:

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{3x - \frac{(3x)^3}{6} + \frac{(3x)^5}{120} + ax + bx^3}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(3+a)x + \left(b - \frac{9}{2}\right)x^3 + \frac{243}{120}x^5}{x^3}$$

صفر شدن این حد اقتضا می‌کند که:

$$\begin{cases} 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3 \\ b - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow b = \frac{9}{2} \end{cases}$$

## مقاومت مصالح و تحلیل سازه‌ها

**۵۱- (۲)**

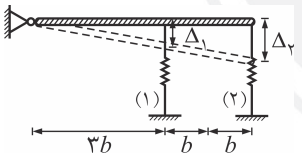
با در نظر گرفتن راستای قائم به عنوان محور $y$ ها داریم:

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),\ \sigma_x = \sigma_z = 0 \Rightarrow \varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E} \times \sigma_y = \frac{1-2\nu}{E} \times \frac{P}{A(y)}$$

$$\Delta V = \int \varepsilon_V\, dV = \int \frac{1-2\nu}{E} \times \frac{P}{A(y)} \times A(y)\, dy = \frac{1-2\nu}{E} P[y]_0^L = \frac{PL}{E}(1-2\nu)$$

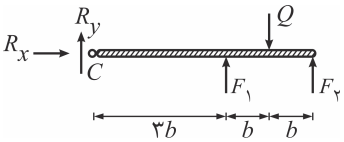
**۵۲- (۲)**

تغییرشکل تیر صلب افقی به‌صورت زیر است. باتوجه به تغییرشکل رسم شده، داریم:




$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{5b}{3b} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\frac{F_2}{K}}{\frac{F_1}{K}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{5}{3} \Rightarrow F_2 = \frac{5}{3}F_1$$

همچنین با استفاده از نمودار جسم آزاد عضو صلب، داریم:




$$\sum M_C = 0 \Rightarrow F_1 \times 3b + F_2 \times 5b = Q \times 4b \Rightarrow 3F_1 + 5 \times \frac{5}{3}F_1 = 4Q \Rightarrow F_1 = \frac{6}{17}Q$$

از طرفی باتوجه به همان تغییرشکل رسم شده برای عضو صلب، می‌توان گفت:

$$\frac{\Delta_H}{\Delta_1} = \frac{4b}{3b} = \frac{4}{3} \Rightarrow \Delta_H = \frac{4}{3}\Delta_1 = \frac{4}{3}\frac{F_1}{K} = \frac{4}{3} \times \frac{6}{17}\frac{Q}{K} = \frac{8}{17}\frac{Q}{K} \Rightarrow \frac{Q}{\Delta_H} = \frac{17}{8}K$$

**۵۳- (۱)**

سختی محوری هر دو مجموعه میله‌های متعامد $AOC$ و $BOD$ باهم برابر است.

$$K_{AOC} = K_{BOD} = 2 \times \frac{EA}{L} = \frac{2EA}{L}$$

بنابراین مشابه تست ۵۳ آزمون سال ۸۷، محل اثر نیروی $P$ فقط در راستای قائم جابجا می‌شود و داریم:

$$\Delta_O = \frac{P}{K}$$

در رابطه فوق، به‌جای $K$، سختی محوری هریک از مجموعه‌های متعامد $AOC$ و یا $BOD$ قرار می‌گیرد و داریم:

$$\Delta_O = \frac{P}{\frac{2EA}{L}} = \frac{PL}{2EA}$$

**۵۴- (۱)**

اعضای صلب تغییرطول نمی‌دهند. بنابراین عضو صلب افقی هیچ‌گونه تغییرشکلی نمی‌دهد و در نتیجه عضو الاستیک سمت راست، تغییرطول نخواهد داد.

$$\Delta = ۰ \Rightarrow \frac{FL}{EA} = ۰ \Rightarrow F = ۰$$

**۵۵- (۲)**

باتوجه به تقارن سیستم در فضا، محل تقارب ۳ سیم فقط در راستای قائم جابجا می‌شود. همچنین تغییرطول هر۳ سیم باهم برابر است. لذا سیم‌ها مانند فنرهای موازی عمل کرده و سختی قائم هر سیم برابر است با:

$$K_۱ = K_۲ = K_۳ = \frac{EA}{L}\cos^۲\alpha = \frac{EA}{L}\times\cos^۲ ۴۵^\circ = \frac{EA}{۲L}$$

بنابراین تغییرمکان قائم محل تقارب سیم‌ها برابر است با:

$$\Delta = \frac{W}{\sum K} = \frac{W}{۳\times\frac{EA}{۲L}} = \frac{۲WL}{۳EA}$$

**۵۶- (۳)**

تغییرمکان قائم $C$ ناشی از تغییرشکل خمشی تیر $ACB$ $(\Delta_۱)$ و تغییرطول فنرها $(\Delta_۲)$ است. داریم:

$$\Delta_C = \Delta_۱ + \Delta_۲$$

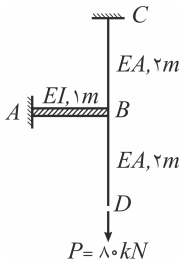
$$\Delta_۱ = \frac{PL^۳}{۴۸EI} = \frac{۳\times۱۰^۳\times(۲۰۰)^۳}{۴۸\times۱۰^۹} = ۰/۵\ cm$$

$$\Delta_۲ = \frac{\Delta_A + \Delta_B}{۲} = \frac{\frac{F_۱}{K_۱}+\frac{F_۲}{K_۲}}{۲} = \frac{\frac{۱/۵}{۲}+\frac{۱/۵}{۱}}{۲} = ۱/۱۲۵\ cm$$

$$\Delta_C = ۰/۵ + ۱/۱۲۵ = ۱/۶۲۵\ cm$$

**۵۷- (۲)**

تیر $AB$ و کابل $BC$ مانند فنرهای موازی عمل می‌کنند. زیرا انتهای $B$ از این اعضا به یک میزان پایین می‌آید. کل این مجموعه با کابل $BD$ به‌صورت سری عمل می‌کنند. زیرا نیروی این دو قسمت با هم برابر است و داریم:




$$K_{BC} = \frac{EA}{L} = \frac{۲۰۰\times۱۰^۴\times۶}{۲۰۰} = ۶\times۱۰^۴\ kg/cm$$

$$K_{AB} = \frac{۳EI}{L^۳} = \frac{۳\times۲۰۰\times۱۰^۴\times۱۰^۴}{(۱۰۰)^۳} = ۶\times۱۰^۴\ kg/cm$$

$$\Rightarrow K_{ABC} = K_{AB} + K_{BC} = ۱۲\times۱۰^۴\ kg/cm$$

$$K_{BD} = \frac{EA}{L} = \frac{۲۰۰\times۱۰^۴\times۶}{۲۰۰} = ۶\times۱۰^۴\ kg/cm$$

$$\Rightarrow K_{\text{کل}} = \frac{K_{ABC}\times K_{BD}}{K_{ABC}+K_{BD}} = \frac{۱۲\times۱۰^۴\times۶\times۱۰^۴}{۱۲\times۱۰^۴+۶\times۱۰^۴} = ۴\times۱۰^۴\ kg/cm$$

بنابراین تغییرمکان محل اثر نیرو برابر است با:

$$\Delta_D = \frac{P}{K_{\text{کل}}} = \frac{۸۰\times۱۰^۲}{۴\times۱۰^۴} = ۰/۲cm = ۲mm$$

**تذکر:** هر $۱GPa$ معادل $۱۰^۴\ kg/cm^۲$ می‌باشد.

**۵۸- (۳)**

در حالت کرنش مسطح، کرنش برشی حداکثر برابر است با:

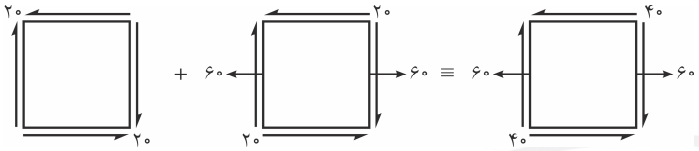
$$\gamma_{max} = ۲R$$

در رابطه فوق، $R$ شعاع دایره موهر کرنش می‌باشد که به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{\gamma_{xy}}{۲}\right)^۲} = \sqrt{\left(\frac{A-(-A)}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{۲A}{۲}\right)^۲} = \sqrt{۲}A \Rightarrow \gamma_{max} = ۲\times\sqrt{۲}A = ۲\sqrt{۲}A$$

**۵۹- (۴)**

با استفاده از اصل جمع آثار، مجموع تنش‌های ایجاد شده در نقطه موردنظر به‌صورت زیر می‌باشد:




بنابراین تنش‌های اصلی عمودی و برشی برابرند با:

$$R=\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲})^۲+\tau_{xy}^۲}=\sqrt{(\frac{۶۰-۰}{۲})^۲+۴۰^۲}=۵۰$$

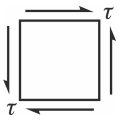
$$\sigma_{ave}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}=\frac{۶۰+۰}{۲}=۳۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma_{max}=\sigma_{ave}+R=۳۰+۵۰=۸۰MPa & \text{کششی}\\ \sigma_{min}=\sigma_{ave}-R=۳۰-۵۰=-۲۰MPa & \text{فشاری}\\ \tau_{max}=R=۵۰MPa\end{cases}$$

**تذکر:** در صورتی‌که المان سه بعدی در نظر گرفته شود، تنش اصلی سوم برای این المان $\sigma_۳=۰$ می‌باشد.

**۶۰- (۴)**

المان‌های طولی عضو موردنظر به‌صورت المان برش خالص می‌باشند:




$$t=\frac{۲۰/۶-۱۹/۴}{۲}=\frac{۱/۲}{۲}=۰/۶\,cm$$

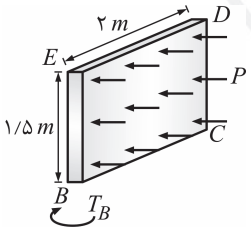
$$\tau=\frac{T}{۲A_m t}=\frac{۲\times۱۰^۵}{۲\times(\frac{۲۰/۶+۱۹/۴}{۲})^۲\times۰/۶}=۴۱۶/۷\,kg/cm^۲$$

باتوجه به خصوصیات المان برش خالص، تنش عمودی ماکزیمم در این عضو برابر است با:

$$\sigma_{max}=\tau=۴۱۶/۷\,kg/cm^۲$$

**۶۱- (۳)**

با درنظر گرفتن نمودار جسم آزاد صفحه $BCDE$، مقدار لنگر پیچشی در مقطع $B$ از لوله $AB$ به‌صورت زیر بدست می‌آید:



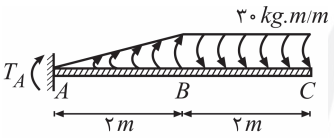

$$T_B=P\times A\times d=۱۰۰\times(۲\times۱/۵)\times(\frac{۲}{۲})=۳۰۰\,kg.m$$

بنابراین تنش برشی ماکزیمم ناشی از پیچش در ستون $AB$ برابر است با:

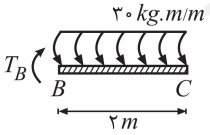
$$\tau_{max}=\frac{TR}{J}=\frac{۳۰۰\times۱۰^۲\times۵}{\frac{\pi\times۵^۴}{۲}}=\frac{۴۸۰}{\pi}$$

**۶۲- (۴)**

تنش برشی ماکزیمم در مقطعی اتفاق می‌افتد که لنگر پیچشی در آن حداکثر باشد. باتوجه به تغییرجهت لنگر پیچشی گسترده در $AB$ و $BC$، لنگر پیچشی در نقاط $A$ و $B$ را محاسبه می‌کنیم:




$$T_A+\frac{۱}{۲}\times۳۰\times۲=۳۰\times۲\Rightarrow T_A=۳۰\,kg.m$$



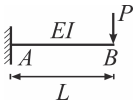

$$T_B=۳۰\times۲=۶۰\,kg.m$$

بنابراین تنش برشی حداکثر در $B$ اتفاق افتاده و برابر است با:

$$\tau_{max}=\frac{TR}{J}=\frac{۶۰\times۱۰^۲\times\frac{۴}{۲}}{\frac{\pi\times۴^۴}{۳۲}}=\frac{۱۵۰۰}{\pi}\,kg/cm^۲$$

**۶۳- (۴)**

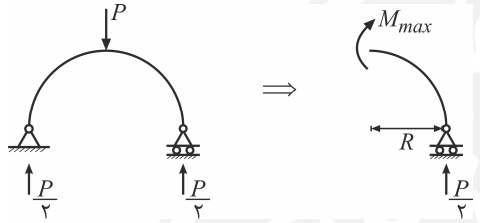
باتوجه به رابطه $\kappa = \frac{M}{EI}$، انحنای حداکثر در محل لنگر خمشی حداکثر ($A$) ایجاد می‌شود.




$$\begin{cases} \kappa_{max} = \frac{M_A}{EI} = \frac{PL}{EI} \\ \Delta_B = \Delta = \frac{PL^۳}{۳EI} \Rightarrow \frac{PL}{EI} = \frac{۳\Delta}{L^۲} \end{cases} \Rightarrow \kappa_{max} = \frac{۳\Delta}{L^۲} \overset{\Delta = ۰/۰۱L}{=\!=\!=} \frac{۰/۰۳}{L}$$

**۶۴- (۲)**

تنش خمشی ماکزیمم در محل لنگر خمشی ماکزیمم اتفاق می‌افتد. واضح است که لنگر خمشی ماکزیمم در وسط قوس ایجاد شده و برابر است با:



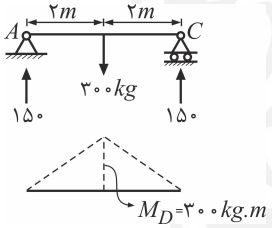

$$M_{max} = \frac{PR}{۲}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S} = \frac{\frac{PR}{۲}}{\frac{\pi r^۳}{۴}} = \frac{۲PR}{\pi r^۳}$$

**۶۵- (۳)**

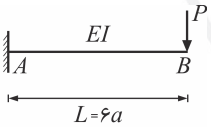
$$\sigma_{max_D} = \frac{M_D}{S}$$

$M_D$ را از نمودار لنگر خمشی در عضو $AC$ به‌صورت زیر می‌یابیم:



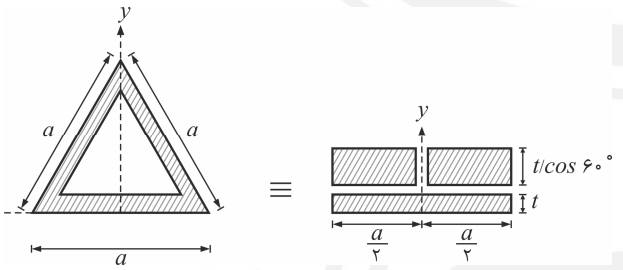

$$\sigma_{max_D} = \frac{۳۰۰ \times ۱۰^۲}{\frac{۶^۳}{۶}} \simeq ۸۳۳\ kg/cm^۲$$

**۶۶- (۱)**




$$\Delta_B = \frac{PL^۳}{۳EI}$$

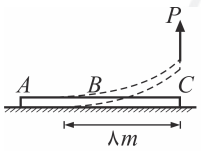
باتوجه به آنکه مقطع بیش از دو محور تقارن دارد، ممان اینرسی آن حول محورهای عبوری از مرکز سطح مقطع یکسان است. برای محاسبه ممان اینرسی $I$ از محور قائم $y$ و قاعده لغزاندن مقطع استفاده می‌کنیم:




$$I = \frac{a^۳t}{۱۲} + ۲\left(\frac{(\frac{a}{۲})^۳ \times \frac{t}{\cos ۶۰^\circ}}{۳}\right) = \frac{a^۳t}{۴}$$

$$\Rightarrow \Delta_B = \frac{P \times (۶a)^۳}{۳ \times \frac{۱}{۴}a^۳t \times E} = ۲۸۸\frac{P}{Et}$$

**۶۷- (۳)**



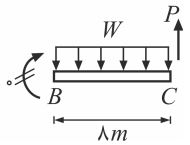

اگر مقطعی از تیر را در $B$ درنظر بگیریم، چون انحنای تیر در این مقطع صفر است، داریم:

$$\kappa_B = ۰ \Rightarrow \frac{M_B}{EI} = ۰ \Rightarrow M_B = ۰$$

همچنین اگر $W$ وزن واحد طول تیر باشد، داریم:

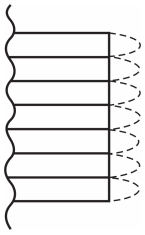
$$W = \frac{۲۴۰۰}{۱۲} = ۲۰۰\ N/m$$

با استفاده از نمودار جسم آزاد $BC$، $P$ بدست می‌آید:



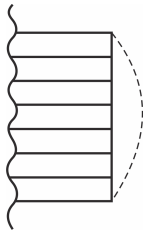

$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow PL = \frac{WL^۲}{۲} \Rightarrow P = \frac{WL}{۲} = \frac{۲۰۰ \times ۸}{۲} = ۸۰۰N$$

**۶۸- (۱)**



هنگامی که تیرها را بدون استفاده از چسب روی هم قرار می‌دهیم، نیروی برشی ایجاد شده در مقطع هر تیر برابر $\frac{P}{n}$ می‌باشد. زیرا تیرها به‌صورت مستقل عمل می‌کنند. در این حالت توزیع تنش برشی در کل مقطع به‌صورت زیر است:

$$\tau_{max_1} = 1.5 \times \frac{\frac{V}{n}}{A} = \frac{1.5V}{nA}$$



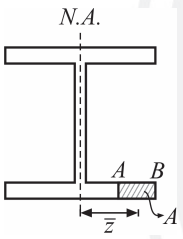
درحالت دوم، تیرها به‌صورت یکپارچه عمل کرده و مقطع مستطیلی با مساحت $nA$ تحت اثر نیروی برشی $V$ قرار می‌گیرد و داریم:

$$\tau_{max_2} = 1.5\frac{V}{nA} = \frac{1.5V}{nA}$$

ملاحظه می‌شود که $\tau_{max_1} = \tau_{max_2}$، بنابراین مقاومت برشی هر دو مقطع درحالت‌های(۱) و(۲) باهم برابر است.

**۶۹- (۱)**

توجه شود که راستای محور خنثی همواره بر راستای نیروی برشی وارد شده عمود است.




$$\begin{cases} \tau_A = \frac{VQ}{It} \\ Q = A\bar{z} = 6\times1\times(10-\frac{6}{2}) = 42\ cm^3 \\ I = 2\times\frac{20^3\times1}{12} = \frac{4000}{3}\ cm^4 \end{cases} \Rightarrow \tau_A = \frac{20\times10^3\times42}{\frac{4000}{3}\times1} = 630\ kg/cm^2$$

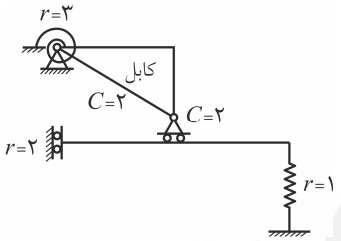
**۷۰- (۴)**

با فرض اینکه جنس مقاطع و در نتیجه تنش برشی مجاز آنها یکسان باشد، داریم:

$$\begin{cases} \tau_{max_1} = \frac{4}{3}\times\frac{V}{A_1} \\ \tau_{max_2} = \frac{3}{2}\times\frac{V}{A_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\text{مقاومت برشی مقطع(۱)}}{\text{مقاومت برشی مقطع(۲)}} = \frac{\frac{3A_1}{4}}{\frac{2A_2}{3}} \overset{A_1 = A_2}{=\!=\!=} \frac{9}{8}$$

**۷۱- (۲)**

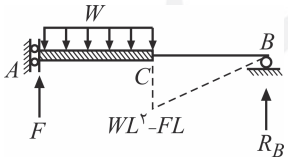
با استفاده از روش حلقه، درجه نامیعنی سازه را می‌یابیم.




$$n = 3k + r - (C+3) = 3\times1+6-(4+3) = 2$$

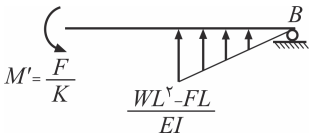
**۷۲- (۳)**

نیروی ایجاد شده در فنر را $F$ می‌نامیم. بنابراین نمودار لنگر خمشی در قسمت $BC$ بصورت زیر می‌باشد.( توجه شود که چون $AC$ صلب است، نیازی به ترسیم نمودار لنگر خمشی در این قسمت نمی‌باشد)




$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_B = WL - F$$

تیر مزدوج این سازه به‌صورت زیر رسم شده و بارگذاری می‌شود:

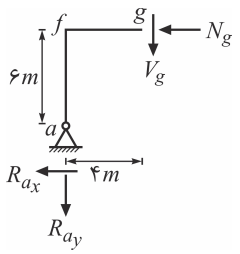



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \frac{F}{K} = \frac{1}{2}\times\frac{(WL^2-FL)}{EI}\times L\times\frac{2L}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{FL^3}{2EI} = \frac{(WL^2-FL)}{EI}\times\frac{L^2}{3} \Rightarrow F = 0.4WL$$

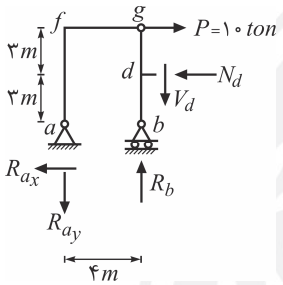
**۷۳- (۴)**

قسمت $afg$ را مطابق شکل به‌صورت جداگانه درنظر می‌گیریم:




$$\sum M_g = ۰ \Rightarrow R_{a_y} \times ۴ = R_{a_x} \times ۶ \Rightarrow R_{a_y} = \frac{۳}{۲} R_{a_x} \quad (۱)$$

اکنون قسمت $afgdb$ را مطابق شکل به‌صورت جداگانه درنظر می‌گیریم:



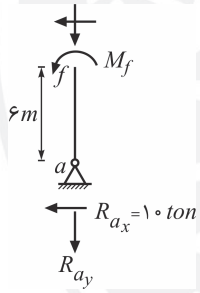

$$\sum M_d = ۰ \Rightarrow R_{a_y} \times ۴ = ۱۰ \times ۳ + R_{a_x} \times ۳$$

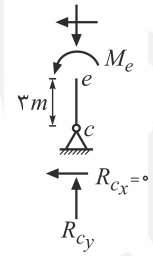
$$\xrightarrow{(۱)} \frac{۳}{۲} R_{a_x} \times ۴ = ۳۰ + R_{a_x} \times ۳ \Rightarrow R_{a_x} = ۱۰\, ton$$

اکنون برای کل سازه داریم:

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_{a_x} + R_{c_x} = ۱۰ \,,\, R_{a_x} = ۱۰\, ton \Rightarrow R_{c_x} = ۰$$

اگر ستون‌های $ce$ و $af$ را به‌صورت جداگانه درنظر بگیریم، داریم:



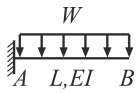

$$\sum M_f = ۰ \Rightarrow M_f = R_{a_x} \times ۶ = ۶۰\, ton.m \qquad \sum M_e = ۰ \Rightarrow M_e = ۰$$

**۷۴- (۳)**

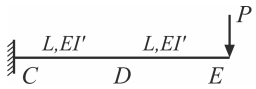
$$\begin{cases} \sum F_{y\,(\text{سمت راست } B)} = ۰ \Rightarrow R_c = ۸ \times ۳ = ۲۴\, ton \\ \sum M_a = ۰ \Rightarrow R_c \times ۶ = (۸ \times ۳) \times ۴/۵ + \frac{۴}{۵} F_{bd} \times ۳ \end{cases} \Rightarrow ۲۴ \times ۶ = ۱۰۸ + \frac{۱۲}{۵} F_{bd} \Rightarrow F_{bd} = ۱۵\, ton$$

**۷۵- (۴)**

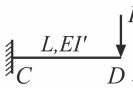
به علت صلب بودن عضو $BD$، فاصله نقاط $B$ و $D$ نباید تغییر کند. بنابراین باید $\Delta_B$ در تیر $AB$ با $\Delta_D$ در تیر $CDE$ برابر باشد. اگر نیرویی در عضو $BD$ ایجاد نشود، می‌توان تیرها را به‌صورت جداگانه درنظر گرفت. توجه شود که در تیر $CDE$، بار $P$ را به نقطهٔ $D$ منتقل کرده و لنگر ناشی از انتقال را در $D$ اعمال می‌کنیم.




$$\Delta_B = \frac{WL^۴}{۸EI}$$




$\Longrightarrow$

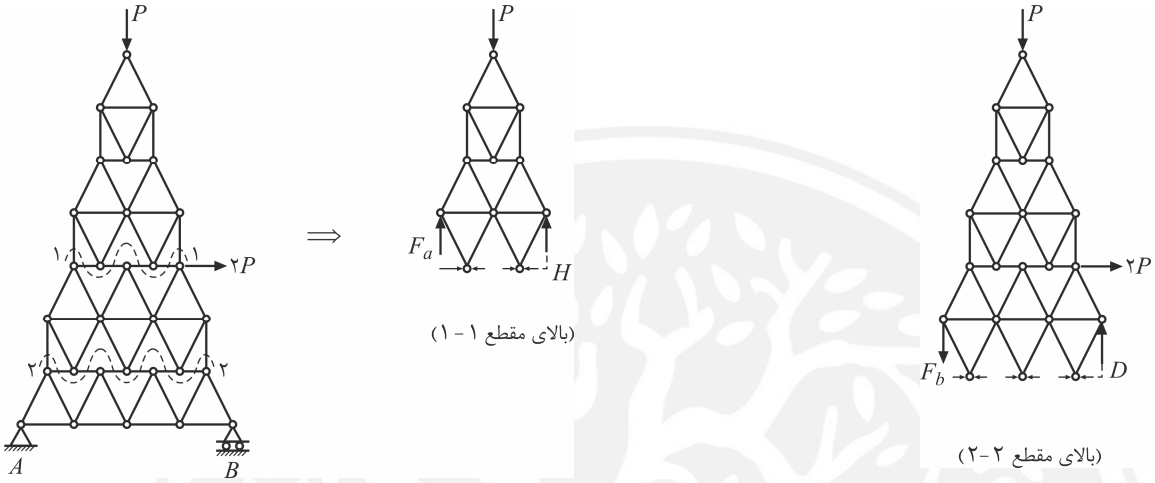



$$\Delta_D = \frac{PL^۳}{۳EI'} + \frac{PL \times L^۲}{۲EI'} = \frac{۵PL^۳}{۶EI'}$$

$$\Delta_B = \Delta_D \Rightarrow \frac{WL^۴}{۸EI} = \frac{۵(۰/۳WL)\,L^۳}{۶EI'} \Rightarrow \frac{I'}{I} = ۲$$

**۷۶- (۲)**

با درنظرگرفتن مقطع‌های (۱-۱) و (۲-۲) در شکل‌های زیر و با توجه به خرپاهای جداشده توسط هر مقطع، داریم:




$$\sum M_H = ۰ \Rightarrow F_a \times ۲L = P \times L \Rightarrow F_a = \frac{P}{۲} \text{ (فشاری)}$$

$$\sum M_D = ۰ \Rightarrow F_b \times ۳L + P \times ۱/۵L = ۲P \times ۲L \Rightarrow F_b = \frac{۵P}{۶} \text{ (کششی)}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

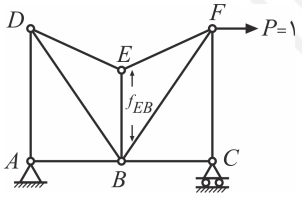
$$\frac{F_b}{F_a} = \frac{\frac{۵P}{۶}}{-\frac{P}{۲}} = -\frac{۵}{۳}$$

**۷۷- (۱)**

باتوجه به تقارن سازه، نیروی برشی در نقاط $C$ و $D$ صفر می‌باشد. این مطلب از معادلات $\sum F_y = ۰$ در این گره‌ها نتیجه می‌شود. بنابراین لنگر خمشی در گوشه‌های سازه برابر صفر است و اعضای قائم چپ و راست مانند تیرهای دو سر مفصل عمل می‌کنند و داریم:

$$\Delta_A = \Delta_B = \frac{Ph^۳}{۴۸EI} \Rightarrow \Delta_{AB} = \Delta_A + \Delta_B = \frac{Ph^۳}{۲۴EI}$$

**۷۸- (۴)**




از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. توجه شود که سازه معین است و لذا خطای ساخت ذکر شده، هیچ‌گونه نیرویی در اعضای خرپا ایجاد نمی‌کند ($F_i = ۰$). خرپای واحد به‌صورت زیر می‌باشد:

$$۱ \times \Delta_F = \sum \Delta_i \times f_i$$

باتوجه به توضیح داده شده درصورت سوال، داریم:

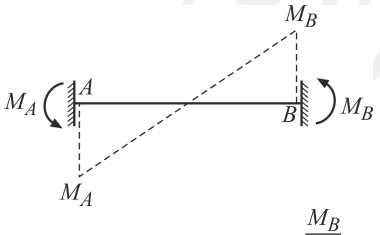
$$P = ۵\,ton \Rightarrow F_{EB} = -۳\,ton$$

$$P = ۱\,ton \Rightarrow f_{EB} = -۳ \times \frac{۱}{۵} = -۰/۶\,ton$$

$$\Delta_F = \Delta_{EB} \times f_{EB} = (-۳) \times (-۰/۶) = ۱/۸\,cm$$

**۷۹- (۳)**

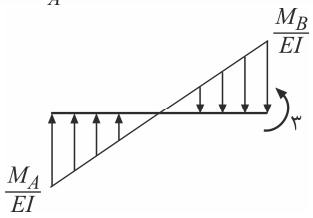
نمودار لنگر خمشی در عضو $AB$ به‌صورت مقابل است:




$$|M_A| = |M_B|$$

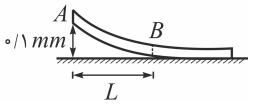
می‌دانیم بارگذاری در تیر مزدوج، معادل $\frac{۱}{EI}$ مقادیر نمودار لنگر خمشی در تیر اصلی می‌باشد.

بنابراین تیر مزدوج به صورت مقابل رسم و بارگذاری می‌شود که معادل با تیر مزدوج رسم شده در گزینهٔ (۳) می‌باشد.



**۸۰- (۲)**

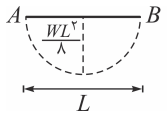
تیر را مطابق شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم:




در نقطه $B$ انحناء صفر است. بنابراین باتوجه به رابطه انحناء با لنگر خمشی، داریم:

$$\begin{cases} \kappa = \dfrac{۱}{\rho} = \dfrac{M}{EI} \\ \kappa_{(\text{انحنای } B)} = ۰ \end{cases} \Rightarrow M_B = ۰$$

بنابراین نمودار لنگر خمشی در عضو $AB$، مانند یک عضو دوسر مفصل با بار گسترده $W$(وزن تیر) می‌باشد.




از طرفی باتوجه به هندسه شکل داریم:

$$\Delta_{A/B} = \Delta_A$$

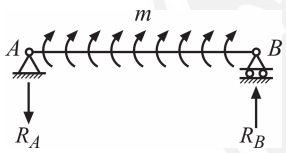
$\Delta_{A/B}$، همان فاصله قائم $A$ از مماس رسم شده بر $B$ است که با استفاده از روش لنگر سطح آن را می‌یابیم:

$$\Delta_{A/B} = \frac{A_M \times \bar{x}}{EI} \Rightarrow ۱۰^{-۴} = \frac{\frac{۲}{۳}\left(\frac{WL^۲}{۸} \times L\right) \times \frac{L}{۲}}{EI} = \frac{\frac{۲}{۳} \times \frac{۰/۰۳}{۱۶} \times L^۴}{۲۰۰} \Rightarrow L = ۲\,m$$

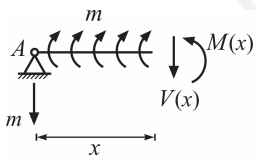
**۸۱- (۱)**

برای بررسی تغییرشکل‌های خمشی و برشی این سازه، از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. براین اساس، باید به ترتیب اثر جملات $\int \frac{M(x)\,m(x)}{EI}dx$ و $\int \frac{V(x)v(x)}{GA}dx$ را درنظر بگیریم:

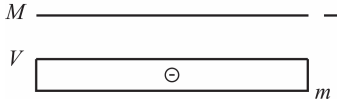
دیاگرام لنگر خمشی و نیروی برشی تیر اصلی به‌صورت زیر می‌باشند:




$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow R_A L = mL \Rightarrow R_A = m$$

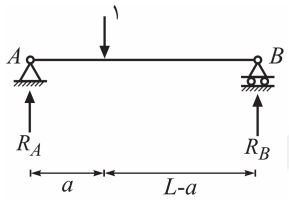



$$M(x) = mx - mx = ۰$$

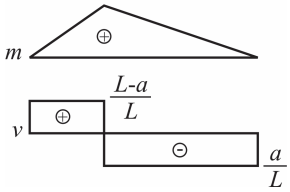



$M(x)=۰$ (لنگر خمشی در طول تیر صفر است)

اگر بار واحد را در نقطه‌ای دلخواه(به فاصله $a$ از تکیه‌گاه سمت چپ) قرار دهیم، نمودارهای لنگر خمشی و نیروی برشی سازه واحد به‌صورت زیر بدست می‌آیند:




$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow R_B L = ۱ \times a \Rightarrow R_B = \frac{a}{L}\ ,\ R_A = \frac{L-a}{L}$$




به علت صفر شدن $M(x)$ در سازه اصلی، جمله شامل لنگر خمشی در رابطه بار واحد صفر می‌شود. بنابراین تغییرمکان خمشی تیر صفر است.

از طرفی مساحت قسمت مثبت و منفی دیاگرام برش در سازه واحد، باهم برابر است.

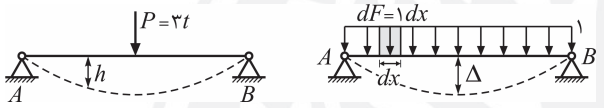
$$\begin{cases} A_V(+) = \dfrac{L-a}{L}\times a \\ A_V(-) = (L-a)\times \dfrac{a}{L} \end{cases} \Rightarrow A_V(+) = A_V(-) \Rightarrow A_{V\,\text{کل}} = ۰$$

بنابراین باتوجه به ثابت بودن $A_V$ در سازه اصلی، جمله شامل برش نیز در رابطه بار واحد صفر می‌شود. بنابراین تغییرمکان برشی تیر نیز صفر است.

**تذکر:** لازم به ذکر است که تحت اثر بارگذاری اعمال شده، مطابق شکل زیر، تغییر شکل زاویه‌ای در تیر ایجاد خواهد شد.

**۸۲- (۲)**

با توجه به قضیهٔ تقابل کار ماکسول با استفاده از تیرهای زیر داریم:




کار $dF$ تحت تغییرشکل‌های تیر سمت چپ عبارت است از:

$$dW = h\times dF = h\times ۱\times dx \Rightarrow W = \int_۰^L h dx = A$$

$A$ مساحت زیر نمودار تغییرشکل تیر سمت چپ است و مقدار آن با کار نیروی $P$ تحت تغییرشکل‌های تیر سمت راست برابر است.

$$A = P\times \Delta = P\times \frac{۵qL^۴}{۳۸۴EI} = ۳\times \frac{۵\times ۱\times ۴^۴}{۳۸۴\times ۱۰^۴} = ۱۰^{-۳} m^۲ = ۱۰ cm^۲$$

**۸۳- (۳)**

قسمت متشکل از عضوهای ۵ ، ۶ و ۸ ، پایدار و معین می‌باشد. اکنون از روش بار واحد برای تعیین $\theta_A$ استفاده می‌کنیم.

سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی — سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

باتوجه به رابطه روش بار واحد داریم:

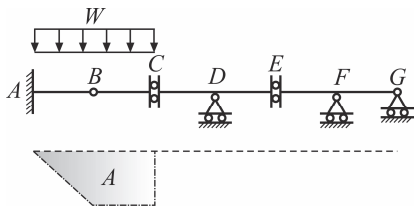
$$۱\times \theta_A = \sum \left(\int_L \frac{M(x)m(x)\,dx}{EI}\right)_i$$

$$\theta_A = \frac{۱}{EI}\left(\int_{L_۶} M_۶(x)\,dx + \int_{L_۵} M_۵(x)\,dx + \int_{L_۸} M_۸(x)\,dx\right)$$

رابطه فوق با استفاده از قضیه اول لنگر سطح نیز قابل فهم است.

**۸۴- (۱)**

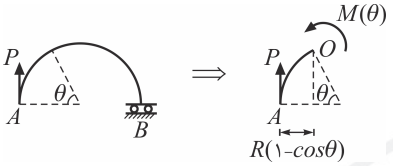
نمودار خط تأثیر لنگر خمشی در تکیه‌گاه $A$ به‌صورت زیر می‌باشد. باتوجه به آن، برای حداکثر شدن $M_A$، بار گسترده متحرک باید در محل نشان داده شده قرار بگیرد.




$$M_{A_{max}} = WA = W\left[\frac{۱}{۲}(L+۲L)\times L\right] = \frac{۳WL^۲}{۲}$$

**۸۵- (۳)**

باتوجه به تقارن سازه حول محور افقی، می‌توان نیمی از آن را به‌صورت زیر درنظر گرفت. در این صورت تغییرمکان قائم $A$ را با استفاده از روش بار واحد یافته و آن را دو برابر می‌کنیم. (تابع لنگر خمشی $m(\theta)$ در سازه واحد، مشابه سازه اصلی بدست می‌آید)




$$M(\theta)=PR\,(1-\cos\theta) \quad \text{و} \quad m(\theta)=R\,(1-\cos\theta)$$

رابطه بار واحد برای عضو خمیده به‌صورت زیر است:

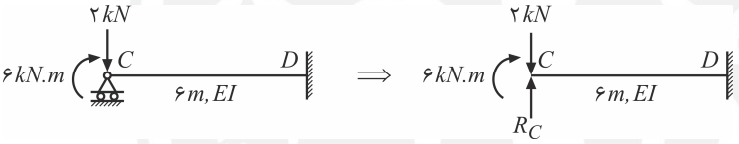
$$1\times\Delta_A=\int\frac{M(\theta)m(\theta)ds}{EI}\xrightarrow{ds=Rd\theta}\Delta_A=\int_0^{\pi}\frac{PR^2(1-\cos\theta)^2\times Rd\theta}{EI}=\frac{3\pi PR^3}{2EI}$$

بنابراین تغییرفاصله خواسته شده برابر است با:

$$\Delta=2\Delta_A=\frac{3\pi PR^3}{EI}$$

**۸۶- (۳)**

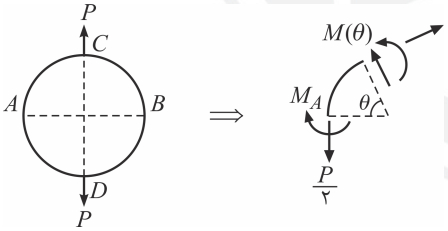
بار $2\,kN$ را به گره $C$ منتقل می‌کنیم و لنگر ناشی از این انتقال را نیز در $C$ مطابق شکل اعمال می‌کنیم. فرض کنید عکس‌العمل تکیه‌گاه $C$، $R_C$ باشد.




رابطه سازگاری: $\Delta_C=0 \Rightarrow \frac{R_C\times 6^3}{3EI}=\frac{2\times 6^3}{3EI}-\frac{6\times 6^2}{2EI} \Rightarrow R_C=\frac{1}{2}kN$

**۸۷- (۱)**

مقطعی با زاویه $\theta$ روی $AC$ درنظر گرفته، تابع $M(\theta)$ را برای این مقطع به‌صورت زیر بدست می‌آوریم:




$$M(\theta)=M_A-\frac{P}{2}\times R\,(1-\cos\theta)$$

تابع انرژی کرنشی حلقه به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$U=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M^2(\theta)\,ds}{2EI}$$

باتوجه به قضیه دوم کاستیگلیانو، می‌دانیم مشتق تابع انرژی نسبت به نیروهای داخلی یک سازه، صفر می‌شود. لذا داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial M_A}=0 \Rightarrow 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M(\theta)\dfrac{\partial M(\theta)}{\partial M_A}Rd\theta}{EI}=0\\ M(\theta)=M_A-\dfrac{PR}{2}(1-\cos\theta) \Rightarrow \dfrac{\partial M(\theta)}{\partial M_A}=1\end{cases}$$

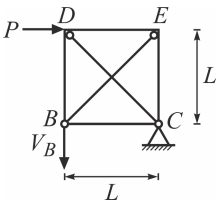
$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M_A-\frac{PR}{2}(1-\cos\theta)}{EI}Rd\theta=0 \Rightarrow M_A=PR\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)$$

**تذکر:** در صورتی‌که انرژی کرنشی ناشی از برش و نیروی محوری را در روابط وارد می‌کردیم، به سادگی می‌توان نشان داد که در پاسخ تغییری ایجاد نمی‌شود (چرا؟)

**۸۸- (۲)**

تیر $AB$ را به‌طور جداگانه درنظر می‌گیریم که به‌صورت زیر بارگذاری می‌شود:

لذا برای تعیین تغییرمکان $B$، کافیست $V_B$ بدست بیاید. این مقدار را با درنظر گرفتن تعادل قسمت سمت راست $B$ (مطابق شکل) بدست می‌آوریم:



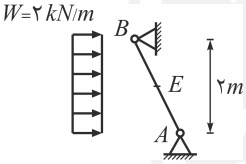

$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow V_B \times L = P \times L \Rightarrow V_B = P$$

بنابراین $\Delta_B$ برابر است با:

$$\Delta_B = \frac{V_B L^۳}{۳EI} = \frac{PL^۳}{۳EI}$$

**۸۹- (۱)**

می‌توان برای تعیین نیروها در عضو دوسر مفصل، مستقل از کل سازه، آن را به‌صورت یک تیر دوسر مفصل درنظر گرفت. لذا تیر $AEB$ را مطابق شکل زیر جداگانه درنظر می‌گیریم. برای محاسبه لنگر خمشی می‌توان از تصویر عضو $AB$ روی راستای قائم بهره گرفت که در این صورت یک تیر دو سر ساده به طول $۲\,m$ تحت اثر بار گسترده $۲\,kN/m$ خواهیم داشت:

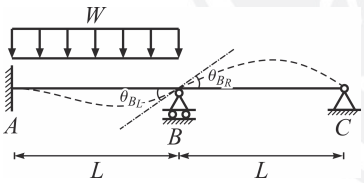



$$M_E = \frac{WL^۲}{۸} = \frac{۲ \times ۲^۲}{۸} = ۱\,kN.m$$

ملاحظه می‌کنید که $L$ در رابطهٔ فوق، همان طول عمود بر راستای اعمال بار لحاظ می‌شود.

**۹۰- (۴)**

تغییرشکل تیر داده شده به‌صورت مقابل است:




باتوجه به تغییرشکل رسم شده و همچنین توجه به پیوستگی تیر در محل تکیه‌گاه میانی، رابطه سازگاری به صورت $\theta_{B_R} = \theta_{B_L}$ می‌باشد.

## مکانیک خاک

**۹۱- (۲)**

می‌دانیم نیروهای جاذبه بین ذرات کانی‌های رسی عامل اصلی چسبندگی خاک‌های رسی می‌باشند، لیکن می‌خواهیم جنس این نیروها و ماهیت آنها را شناسایی کنیم.

ذرات رس کانی‌های صفحه‌ای هستند که بر روی آنها بارهای الکتریکی به صورت زیر پخش شده است. با توجه به شکل در می‌یابیم که وقتی دو ذره کانی رس در کنار هم قرار می‌گیرند، سر مثبت یک ذره به بدنهٔ منفی ذره دیگر می‌چسبد که این نیروی جاذبه الکتریکی یا همان نیروی الکترواستاتیک می‌باشد.

**۹۲- (۳)**

با نوشتن رابطهٔ بین چگالی دانه‌های جامد، درصد رطوبت، درجه اشباع و ضریب تخلخل به صورت زیر، خواهیم داشت:

$$\omega . G_s = S_r . e \Rightarrow \frac{G_s}{e} = \frac{S_r}{\omega}$$

**۹۳- (۳)**

در صورت سؤال اشاره‌ای به تغییرات حجم خاک براثر افزایش درصد رطوبت نشده است، بنابراین با ثابت فرض کردن حجم خاک در این حالت، خواهیم داشت:

$$\gamma_{d_1}=\gamma_{d_2} \Rightarrow \frac{\gamma_1}{\gamma_2}=\frac{1+\omega_1}{1+\omega_2} \quad , \quad \omega_2=1.5\omega_1 \Rightarrow \frac{1.6}{1.7}=\frac{1+\omega_1}{1+1.5\omega_1} \Rightarrow \omega_1=0.14=14\%$$

**۹۴- (۱)**

این تست مشابه سؤال ۸۴ در آزمون ۸۶ است. در این حالت می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \gamma_{d\,\text{اجرایی}}=RC\times\gamma_{d\,max}=0.98\times2.041=2\,t/m^3 \\ \gamma_{d\,\text{قرضه}}=\dfrac{\gamma_{\text{قرضه}}}{1+\omega_{\text{قرضه}}}=\dfrac{\frac{W}{V}}{1+\omega}=\dfrac{33}{V_{\text{قرضه}}\times(1+0.1)}=\dfrac{30}{V_{\text{قرضه}}} \\ V_{\text{اجرایی}}=8\times0.125L=L \end{cases}$$

$$\frac{\gamma_{d\,\text{اجرایی}}}{\gamma_{d\,\text{قرضه}}}=\frac{V_{\text{قرضه}}}{V_{\text{اجرایی}}} \Rightarrow \frac{2}{\left(\frac{30}{V_{\text{قرضه}}}\right)}=\frac{V_{\text{قرضه}}}{L} \Rightarrow L=15m$$

**۹۵- (۴)**

از غلتک‌های چرخ فولادی برای خاکهای درشت‌دانهٔ خوب دانه‌بندی شده و ریزدانه‌های غیرخمیری استفاده می‌شود و ماسه‌های یکنواخت(و سست)، ماسه‌های لای‌دار و حتی درشت‌دانه‌ها را بهتر است با استفاده از روش‌های ارتعاشی و لرزاننده‌ها متراکم کرد. غلتک‌های پاچه‌بزی برای خاکهای ریزدانهٔ خمیری و غیرخمیری و خاکهای درشت‌دانه که بیش از ۲۰ درصد ریزدانه دارند، به‌کار می‌روند. غلتک‌های چرخ لاستیکی را نیز می‌توان برای کوبیدن بیشتر خاک‌های درشت‌دانه و ریزدانه به‌کار برد و بالاخره از کفشک‌های لرزنده برای خاکهای درشت‌دانه با کمتر از ٪۱۵ ریزدانه، در مواردی که امکان استفاده از غلتک‌های بزرگ نیست، استفاده می‌شود. با توجه به این توضیحات، پاسخ صحیح گزینه(۴) است.

**۹۶- (۲)**

باتوجه به اینکه نمونه‌ها ماسه‌های نسبتاً یکنواخت هستند، بنابراین با استفاده از رابطه هازن(هیزن) خواهیم داشت:

$$k=mD_{10}^2 \xrightarrow[\text{مساوی و در حدود یک است}]{m\ \text{برای هر دو خاک تقریباً}} \frac{k_A}{k_B}\simeq\left[\frac{(D_{10})_A}{(D_{10})_B}\right]^2=\left(\frac{0.01}{0.002}\right)^2=25$$

**۹۷- (۴)**

سطح آب در پایین‌دست را به‌عنوان سطح مبنا انتخاب کرده و با استفاده از روابط محاسبه فشار آب حفره‌ای می‌نویسیم:

$$u_N=\left[\Delta H\,(N_d)_N\,\Delta h-(h_z)_N\right]\gamma_w=\left[45-1\times\left(\frac{45}{9}\right)-0\right]\times10=400\,kN/m^2$$

واضح است که با تغییر نفوذپذیری سد خاکی، ترسیم شبکه جریان هیچ تغییری نکرده و باز هم فشار آب حفره‌ای همان مقدار قبلی خواهد بود.

**۹۸- (۴)**

آنچه باعث کاهش تنش مؤثر و جوشش در خاک می‌شود، مؤلفه قائم(و رو به بالای) گرادیان هیدرولیکی است. بنابراین می‌نویسیم:

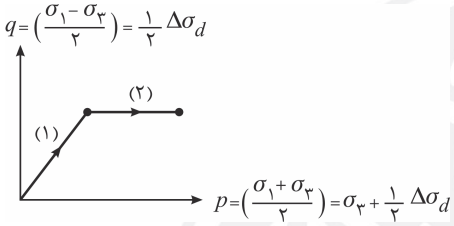
$$\begin{cases} i_z=i_{cr} \\ i_z=i\sin\alpha=\left(\dfrac{\Delta H}{L}\right)\sin\alpha=\dfrac{(h-60)}{\left(\frac{30}{\sin30}\right)}\times\sin30=\left(\dfrac{h-60}{120}\right) \Rightarrow \left(\dfrac{h-60}{120}\right)=1.1 \Rightarrow h=192cm \\ i_{cr}=\dfrac{\gamma'}{\gamma_w}=\left(\dfrac{2.1-1}{1}\right)=1.1 \end{cases}$$

**۹۹- (۳)**

مقدار ضریب $k_\circ$ برای خاک‌های ماسه‌ای از رابطه $k_\circ = 1 - \sin\phi$ تعیین می‌گردد. در اثر فرسایش خاک، ذرات خاک گرد گوشه تر شده و درگیری دانه‌ها با یکدیگر کمتر شده و زاویه اصطکاک داخلی خاک کاهش می‌یابد که این منجر به افزایش ضریب فشار جانبی خاک می‌گردد.

**۱۰۰- (۱)**

باتوجه به اطلاعات داده شده درصورت سؤال، اگر فرض کنیم که مسیر تنش در فضای $P = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ و $q = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ موردنظر طراح بوده است، در آن‌صورت خواهیم داشت:




برای قسمت(۱) داریم:

$$p = q \;\Rightarrow\; \sigma_3 + \frac{1}{2}\Delta\sigma_d = \frac{1}{2}\Delta\sigma_d \;\Rightarrow\; \sigma_3 = 0 \;\Rightarrow\; \text{بارگذاری تک‌محوری است}$$

برای قسمت(۲) نیز خواهیم داشت:

$$\begin{cases} q = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Delta\sigma_d = const \\ P = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) = \sigma_3 + \frac{1}{2}\Delta\sigma_d \;\; \text{در حال افزایش است} \end{cases}$$

از دو رابطهٔ بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$\sigma_1$ و $\sigma_3$ هر دو افزایش می‌یابند و رشد آنها یکسان است، زیرا $\Delta\sigma_d$ ثابت مانده است. بنابراین می‌توان گفت یک بارگذاری سه‌محوری با رشد یکسان $\sigma_1$ و $\sigma_3$ خواهیم داشت.

**۱۰۱- (۲)**

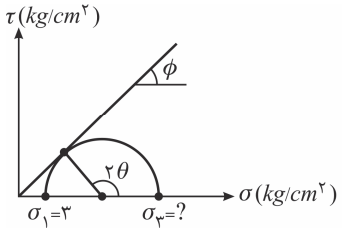
با استفاده از روش تقریبی ۲ به ۱، داریم:

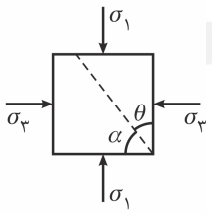
$$\Delta\sigma_z = q\left(\frac{D}{D+z}\right)^2 = 3/2\left(\frac{2}{2+2}\right)^2 = 0/8 \;\; kg/cm^2$$

توجه کنید که روش بوسینسک، اضافه تنش قائم در زیر مرکز پی دایره‌ای را به ما می‌دهد، بنابراین در این سؤال عملاً نمی‌توانستیم از روش بوسینسک استفاده کنیم.

**۱۰۲- (۱)**

درصورت سؤال اشاره به حداکثر فشار افقی وارد بر نمونه شده است، بنابراین بایستی با ثابت نگه داشتن فشار قائم $(\sigma_1)$ و افزودن به فشار افقی $(\sigma_3)$، نمونه را به گسیختگی برسانیم.




$$\begin{cases} \sigma_3 > \sigma_1 \;\Rightarrow\; \sigma_3 = \sigma_1 \tan^2\theta + 2c\tan\theta \\ c = 0 \;\text{(خاک ماسه‌ای)} \;,\; \theta = 45 + \frac{\phi}{2} = 45 + \frac{30}{2} = 60^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 90 - \theta = 90 - 60 = 30^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; \sigma_3 = 3 \times \tan^2 60 + 0 = 9 \;\; kg/cm^2$$

**۱۰۳- (۲)**

مقدار پارامتر $B$ اسکمپتون همواره کوچکتر یا مساوی یک است. در آزمایش سه‌محوری اگر غشاء لاستیکیِ اطراف نمونه سوراخ شود، فشار آب حفره‌ای داخل نمونه علاوه بر اینکه تابعی از تنش همه‌جانبه است، تابعی از فشار آب داخل محفظه هم خواهد بود. در این حالت فشار آب حفره‌ای نمونه کمی بیشتر از تنش همه‌جانبهٔ اعمالی خواهد بود و همین امر باعث می‌شود تا پارامتر $B$ اسکمپتون کمی بیشتر از یک به‌دست آید.

**۱۰۴- (۱)**

۱۰ سال بعد از بهره‌برداریِ سد خاکی، تحکیم صورت گرفته است ولی به هنگام زلزله چون بارگذاری سریع است، امکان زهکشی و از بین رفتن اضافه فشار آب حفره‌ای ناشی از این بارگذاری میسر نیست. در این حالت برای بررسی پایداری شیروانی‌های این سد خاکی از پارامترهای مقاومت برشی در شرایط تحکیم‌یافته - زهکشی نشده(آزمایش سه‌محوری $CU$) استفاده می‌شود.

**۱۰۵- (۳)**

در آزمایش تحکیم به علت عدم تغییر مکان جانبی و تحکیم یک‌بعدی، شرایط فشار سکون حاکم است، بنابراین تنش کل افقی وارد بر نمونه را بایستی از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\sigma_h = k_\circ \sigma'_v + u$$

**۱۰۶- (۴)**

ابتدا نسبت تخلخل خاک را در پایان آزمایش تحکیم محاسبه می‌کنیم:

$$\omega G_s = S_r e \Rightarrow ۰/۲ \times ۲/۵ = ۱ \times e_f \Rightarrow e_f = ۰/۵$$

حال با استفاده از رابطه تغییر ضخامت نسبی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\varepsilon = \frac{\Delta H}{H_\circ} = \frac{\Delta e}{۱+e_\circ} \quad , \quad \varepsilon = ۰/۲ \Rightarrow ۰/۲ = \frac{e_\circ - ۰/۵}{۱+e_\circ} \Rightarrow e_\circ = \frac{۷}{۸} \simeq ۰/۸۸$$

**تذکر:** توجه کنید که نمونهٔ خاک در سراسر آزمایش تحکیم اشباع است.

**۱۰۷- (۴)**

مشابه با تست ۹۳ در آزمون سراسری ۸۶، می‌نویسیم:

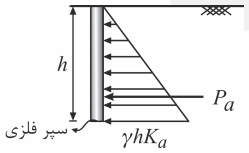
$$\frac{t_۲}{t_۱} = (\frac{U_۲}{U_۱})^۲ (\frac{H_{dr_۲}}{H_{dr_۱}})^۲ \Rightarrow \frac{t_۲}{۵} = (\frac{۳۰}{۲۰})^۲ (\frac{۸}{۱۲ \times \frac{۱}{۲}})^۲ \Rightarrow t_۲ = ۲۰ \text{ سال}$$

**تذکر:** از صورت سؤال چنین استنباط می‌شود که زمان موردنظر برای وقوع ۳۰ درصد نشست تحکیم در لایه دوم، بعد از طی زمان لازم برای وقوع ۲۰ درصد نشست تحکیم در لایه اول خواسته شده است(عبارت چند سال بعد) و بر این اساس پاسخ صحیح گزینه(۳) خواهد بود $(۲۰-۵=۱۵\,year)$. اما در پاسخ ارائه شده توسط سازمان سنجش(کلید آزمون)، گزینه(۴) به‌عنوان جواب درست، انتخاب شده است.

**۱۰۸- (۱)**

در خاک ماسه‌ای مقدار چسبندگی برابر صفر می‌باشد $(c=۰)$ و رابطه فشار جانبی خاک به صورت زیر در می‌آید:

$$\sigma_h = \sigma_v k_a - ۲c\sqrt{k_a} \xrightarrow{c=۰} \sigma_h = \sigma_v k_a = \gamma h k_a$$




$$F_a = \frac{۱}{۲} k_a \gamma h^۲$$

$$\frac{F_{a_۲}}{F_{a_۱}} = \frac{\frac{۱}{۲} k_a \gamma (h_۲)^۲}{\frac{۱}{۲} k_a \gamma (h_۱)^۲} = (\frac{h_۲}{h_۱})^۲ = (\frac{۱/۳ h_۱}{h_۱})^۲ = ۱/۶۹$$

یعنی مقدار نیروی رانش جانبی خاک ٪۶۹ افزایش خواهد یافت.

**۱۰۹- (۲)**

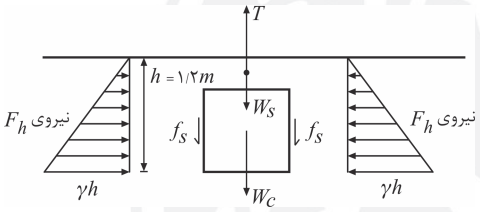
باتوجه به پاسخ صحیح ارائه شده توسط سازمان سنجش(همین گزینه ۲) باید گفت که درصورت سؤال مقادیر تنش‌های قائم و افقی در آزمایش برش مستقیم جابجا نوشته شده‌اند، یعنی شکل درست عبارت باید به این صورت می‌بود: «**تحت فشار قائم $۲/۴\ kg/cm^۲$ و فشار افقی $۲\ kg/cm^۲$ گسیخته شده است.**» حال با اعمال این اصلاحیه، مسئله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \tau_f = \sigma' tan\phi' + c' \quad , \quad c' = ۰ \qquad \Rightarrow \ ۲ = ۲/۴ tan\phi' \ \Rightarrow \ tan\phi' = ۰/۸۳ \\ \gamma_{sat} = \dfrac{G_s + e}{۱+e}\gamma_w = (\dfrac{۲/۶ + ۰/۶}{۱+۰/۶})\gamma_w = ۲\gamma_w \\ \gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w = ۲\gamma_w - \gamma_w = \gamma_w \end{cases}$$

$$\xrightarrow[c'=۰]{\text{خاک دانه‌ای}} FS = \frac{\gamma'}{\gamma_{sat}}(\frac{tan\phi'}{tan\beta}) = \frac{\gamma_w}{۲\gamma_w}(\frac{۰/۸۳}{tan ۲۰}) = \frac{۱}{۲}\times(\frac{۰/۸۳}{tan ۲۰}) \simeq ۱/۱۵$$

**تذکر:** از آنجائیکه استفاده از ماشین حساب در آزمون مجاز نمی‌باشد و مقدار $tan ۲۰^\circ$ نیز درصورت سؤال داده نشده، اصولاً طرح چنین سؤالی در آزمون منطقی به نظر نمی‌رسد.

**۱۱۰- (۳)**




به هنگام بیرون کشیدن بلوک بتنی، نیروهای $W_s$ (وزن خاک بالای بلوک)، $W_c$ (وزن بلوک بتن)، $F_s$ (نیروی اصطکاک که بر چهار وجه جانبی بلوک وارد می‌شود)، $F_h$ (نیروی ناشی از فشار جانبی خاک که در حالت سکون بر چهار وجه جانبی بلوک وارد می‌شود) و $T$ مطابق شکل روبرو بر بلوک بتنی اعمال می‌شوند. برای محاسبه این نیروها می‌نویسیم:

$$W_s = \gamma V = (۱/۵)(۱\times۱\times۰/۲) = ۰/۳\ ton \qquad W_c = \gamma_c V = (۲/۵)(۱\times۱\times۱) = ۲/۵\ ton$$

$$F_h = \frac{۱}{۲}\gamma h^۲ K_\circ B = \frac{۱}{۲}\times۱/۵\times۱/۲^۲\times(۱-sin۳۰^\circ)\times(۱) = ۲/۱۶ ton$$

$$F_s = \mu . N \ , \ \mu = tan\delta \le tan\phi = tan۳۰^\circ \ , N = F_h \ \Rightarrow \ (F_s)_{max} = (tan۳۰)(۲/۱۶) = ۰/۵۸\times۲/۱۶ = ۱/۲۵ ton$$

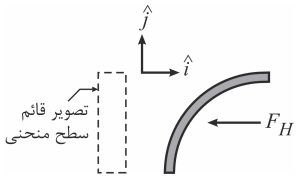
حال با نوشتن رابطه تعادل نیروها در امتداد قائم خواهیم داشت:

$$\sum F_y = ۰ \ \rightarrow \ T_{max} = W_s + W_c + (F_s)_{max} = ۰/۳ + ۲/۵ + ۱/۲۵ = ۴/۰۵\ ton$$

**تذکر:** $f_s$ نیروی اصطکاک در واحد سطح را نشان می‌دهد. در ضمن $\delta$ زاویه اصطکاک خاک و بلوک بتنی است که حداکثر آن برابر $\phi$ یعنی زاویه اصطکاک داخلی خاک است.

## مکانیک سیالات

**۱۱۱- (۳)**

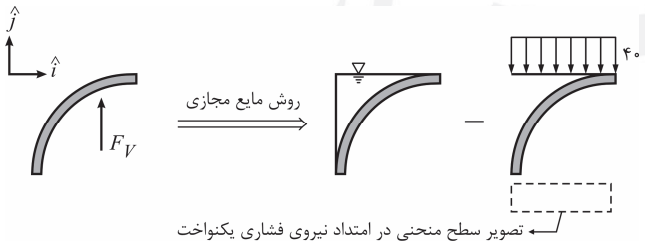



الف) محاسبه نیروی افقی وارد بر سطح منحنی:

$$F_H = \gamma \bar{h} A = (۱۰۰۰۰)(-۲/۵)(۳\times۱) = -۷۵۰۰۰\ N = -۷۵\ kN$$

نیروی افقی وارد بر سطح منحنی خلاف جهت نشان داده شده در شکل و در جهت بردار $i$ می‌باشد.

ب) محاسبه نیروی قائم وارد بر سطح منحنی:




$$F_V = \gamma V - PA = (۱۰۰۰۰)(۳\times۳ - \frac{\pi}{۴}\times۳^۲)$$
$$-(۴۰\times۱۰^۳)(۳\times۱) = -۹۷۵۰۰\ N = -۹۷/۵\ kN$$

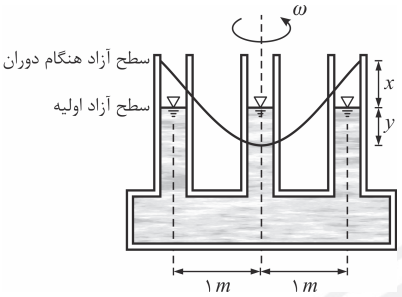
نیروی قائم وارد بر سطح منحنی خلاف جهت نشان داده شده در شکل و خلاف جهت بردار $j$ می‌باشد.

با توجه به توضیحات فوق می‌توان بردار نیروهای وارد بر سطح منحنی (در واحد عرض) را برحسب کیلونیوتن به صورت زیر نشان داد:

$$\vec{F} = ۷۵\hat{i} - ۹۷/۵\hat{j}$$

**توجه:** با توجه به منفی بودن فشار در زیر سطح منحنی و ایجاد مکش، می‌توان حدس زد که جهت نیروهای افقی و قائم وارد بر سطح منحنی به سمت راست و پایین است که این شرایط تنها در گزینه (۳) آمده است.

**۱۱۲- (۴)**




با ترسیم موقعیت سطح آزاد سیال به هنگام دوران، خواهیم داشت:

$$h_p = \frac{r_0^2\omega^2}{2g} = \frac{1^2\times 1^2}{2g} = \frac{1}{2g} \Rightarrow x+y = \frac{1}{2g}$$

حجم سیال پایین رفته در لوله (۲) برابر است با حجم سیال بالا رفته در لوله‌های (۱) و (۳)، بنابراین می‌نویسیم:

$$\pi(2a)^2(y) = 2\times\pi(a^2)(x) \Rightarrow x = 2y$$

و در نهایت به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x+y = \frac{1}{2g} \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{6g}$$

**۱۱۳- (۳)**

حجم کنترل رادر داخل نازل در نظر گرفته و با صرف‌نظر کردن از تلفات، معادله برنولی را بین دو نقطه واقع در ورودی و خروجی حجم کنترل می‌نویسیم:

$$H_1 = H_2 \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma} \quad , \quad V_2 = 4V_1 \text{ (معادله پیوستگی)}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma} = \frac{16V_1^2}{2g}+0 \Rightarrow V_1^2 = \frac{2}{15}\left(\frac{P_1}{\rho}\right)$$

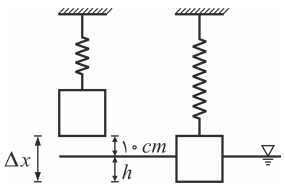
حال با بکارگیری معادله مومنتم در حجم کنترل خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sum F = \rho Q(V_2-V_1) \\ \sum F = S - P_1A_1 = 8100-(P_1)(\pi\times 0/03^2) = 8100-9\pi\times 10^{-4}P_1 \\ \rho Q(V_2-V_1) = (\rho)(V_1\times\pi\times 0/03^2)(-4V_1+V_1) = -27\pi\times 10^{-4}\rho V_1^2 = -27\pi\times 10^{-4}\rho\left[\frac{2}{15}\left(\frac{P_1}{\rho}\right)\right] = -\frac{18\pi}{5}\times 10^{-4}P_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8100-9\pi\times 10^{-4}P_1 = \frac{-18\pi}{5}\times 10^{-4}P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{15\times 10^6}{\pi}(N/m^2)$$

**۱۱۴- (۳)**

وضعیت فرو رفته استوانه در داخل سیال را مطابق شکل زیر در نظر گرفته و رابطه تعادل نیروها در امتداد قائم را برای استوانه می‌نویسیم:




$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{\text{فنر}}+F_B = W$$

$$\begin{cases} (500)(\Delta x)+(10^4)(\pi\times 0/2^2\times h) = 500 \\ \Delta x = 0/1+h \end{cases}$$

$$\Rightarrow (500)(h+0/1)+400\pi h = 500 \Rightarrow h = \frac{4/5}{4\pi+5}(m)$$

**۱۱۵- (۱)**

جریان سیلاب آشفته است و زمانی که در حال فروکش کردن است، غیردائمی (ناپایدار) خواهد بود. از آنجایی که مسیر دارای پیچ و خم است، بردار سرعت در یک لحظه در نقاط مختلف متفاوت بوده و جریان غیریکنواخت می‌باشد.

**۱۱۶- (۴)**

انرژی تلف شده در واحد زمان (توان تلف شده) را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\text{توان تلف شده} = \gamma Q\Delta H$$

در این رابطه $\Delta H$ و $Q$ به ترتیب افت انرژی و دبی عبوری بین نقاط $A$ و $B$ می‌باشند. چون اتصال لوله‌ها موازی است، بنابراین $Q$ مجموع دبی‌های عبوری بین نقاط $A$ و $B$ خواهد بود و $\Delta H$ نیز افت انرژی هر یک از دو شاخه است که با هم برابرند. پس می‌توان نوشت:

$$\text{توان تلف شده} = \gamma Q\left(\frac{f_1L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g}\right) = \gamma Q\left(\frac{f_2L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g}\right)$$

**۱۱۷- (۲)**

تنش برشی در جدار داخلی لوله افقی، برابر است با:

$$\tau_0 = \frac{\Delta PD}{4L} = \frac{0/1 \times \gamma \times 0/2}{4 \times 10} = \frac{\gamma}{2000}$$

**۱۱۸- (۱)**

در حالت کلی معادلهٔ پیوستگی جریان به‌صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

حال اگر جریان دائمی (پایدار) باشد $(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0)$، صرف‌نظر از تراکم‌پذیری سیال، معادله پیوستگی جریان به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

**۱۱۹- (۱)**

۱- ارتفاع صعود مویینگی در لوله باریک به قطر $d$:

$$h_1 = \frac{4\sigma \cos\theta}{\gamma d}$$

۲- ارتفاع صعود مویینگی بین دو صفحه موازی با فاصله $d$ از هم:

$$h_2 = \frac{2\sigma \cos\theta}{\gamma d}$$

۳- ارتفاع صعود مویینگی بین دو لوله متحدالمرکز به اقطار $D_2$ و $D_1$، به فاصله $d$ از هم:

$$h_3 = \frac{4\sigma \cos\theta}{\gamma (D_2 - D_1)} = \frac{4\sigma \cos\theta}{\gamma (2d)} = \frac{2\sigma \cos\theta}{\gamma d}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، $h_1 > h_2 = h_3$ است، یعنی گزینه (۱) صحیح است.

**۱۲۰- (۳)**

رابطه تعادل نیروهای وارد بر صفحه را در امتداد سطح شیبدار می‌نویسیم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow W \sin\alpha = \tau . A \ , \tau = \mu (\frac{V}{t})$$

$$(2 \times 10)(\sin 30) = (0/06)(\frac{2 \times 10^{-2}}{t}) \times 1 \Rightarrow t = 0/00012 m = 0/12 mm$$

**توجه**: پروفیل توزیع سرعت با فرض کم بودن ضخامت سیال، خطی در نظر گرفته شد.

**۱۲۱- (۴)**

الف) مکعب

ارتفاعی از مکعب که داخل آب است را با $h$ نشان داده، رابطه تعادل نیروها در امتداد قائم را می‌نویسیم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W = F_B \Rightarrow (\gamma_w s)(b^3) = (\gamma_w)(b^2 h) \Rightarrow h = bs$$

حال شرط تعادل پایدار یعنی مثبت بودن ارتفاع متاسنتریک را اعمال می‌کنیم:

$$\overline{MG} > 0 \Rightarrow \overline{MB} - \overline{GB} > 0 \Rightarrow \frac{I_n}{V_d} - (\frac{b}{2} - \frac{h}{2}) > 0 \Rightarrow \frac{(\frac{1}{12} b^4)}{b^2 (bs)} - (\frac{b}{2} - \frac{bs}{2}) > 0 \Rightarrow s(1-s) < \frac{1}{6}$$

ب) استوانه

مشابه با آنچه در مورد مکعب انجام شد، می‌نویسیم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W = F_B \Rightarrow (\gamma_w s)\frac{\pi b^3}{4} = (\gamma_w)(\frac{\pi b^2 h}{4}) \Rightarrow h = bs$$

$$\overline{MG} > 0 \Rightarrow \overline{MB} - \overline{GB} > 0 \Rightarrow \frac{I_n}{V_d} - (\frac{b}{2} - \frac{h}{2}) > 0$$

$$\frac{(\frac{\pi b^4}{64})}{\frac{\pi b^2}{4}(bs)} - (\frac{b}{2} - \frac{bs}{2}) > 0 \Rightarrow s(1-s) < \frac{1}{8}$$

برای برقراری تعادل پایدار در هر دو حالت (توأماً) داریم:

$$\begin{cases} s(1-s) < \frac{1}{6} \\ s(1-s) < \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow s(1-s) < \frac{1}{8}$$

**۱۲۲- (۱)**

$$u=\frac{dx}{dt}=x\,(1+2t)\ \Rightarrow\ \frac{dx}{x}=(1+2t)dt\ \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}}\ ln\,x=t+t^2+C_1$$

$$x=1\ \text{و}\ t=0\ \Rightarrow\ C_1=0\ \Rightarrow\ ln\,x=t\,(1+t)$$

$$v=\frac{dy}{dt}=y\ \Rightarrow\ \frac{dy}{y}=dt\ \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}}\ ln\,y=t+C_2\ ,\ y=1\ \text{و}\ t=0\ \Rightarrow\ C_2=0\ \Rightarrow\ ln\,y=t$$

در نهایت کافی است $t$ را بین روابط به‌دست آمده برای $x$ و $y$ حذف کنیم که حاصل همان معادله خط مسیر ذره می‌باشد:

$$ln\,x=ln\,y\,(1+ln\,y)\ \Rightarrow\ x=e^{ln\,y\,(1+ln\,y)}$$

**۱۲۳- (۲)**

چون در این پدیده هم نیروهای لزجی و هم نیروهای ثقلی (علاوه بر اینرسی)، نیروهای غالب و اصلی می‌باشند، بنابراین تشابه توأم رینولدز و فرود مدنظر می‌باشد. در این حالت داریم:

$$\begin{cases}(Re)_m=(Re)_p\ \Rightarrow\ \dfrac{V_m\,l_m}{\nu_m}=\dfrac{V_p\,l_p}{\nu_p}\ \Rightarrow\ \dfrac{\nu_m}{\nu_p}=V_r\,L_r\\[2ex] (Fr)_m=(Fr)_p\ \Rightarrow\ \dfrac{V_m}{\sqrt{l_m g}}=\dfrac{V_p}{\sqrt{l_p g}}\ \Rightarrow\ V_r=\sqrt{L_r}\end{cases}\ \Rightarrow\ \frac{\nu_m}{\nu_p}=L_r^{\frac{3}{2}}\ \Rightarrow\ \frac{1}{8}=L_r^{\frac{3}{2}}\ \Rightarrow\ L_r=\frac{1}{4}$$

**۱۲۴- (۲)**

ابتدا با نوشتن رابطه تعادل نیروها در امتداد قائم (برای صفحهٔ دایره‌ای)، سرعت جت را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum F_y=0\ \Rightarrow\ W=F_j\ \ ,\ \ F_j=\rho Q_j V_j=\rho A_j V_j^2\ \Rightarrow\ 90\pi=(1000)\times\left(\frac{\pi\times 0/3^2}{4}\right)(V_j)^2\ \Rightarrow\ V_j=3\ m/s$$

حال معادله برنولی را بین نقطهٔ $A$ و یک نقطه در خروجی شعاعی می‌نویسیم:

$$\frac{V_A^2}{2g}+z_A+\frac{P_A}{\gamma}=\frac{V^2}{2g}+z+\frac{P}{\gamma}\ \Rightarrow\ \frac{3^2}{2\times 10}+0+\frac{13/5}{10}=\frac{V^2}{2\times 10}+1+0\ \Rightarrow\ V=4\ m/s$$

با نوشتن معادلهٔ پیوستگی جریان بین مقطع جت و مقطع خروجی شعاعی، خواهیم داشت:

$$Q_j=Q\ \Rightarrow\ (3)\left(\frac{\pi\times 0/2^2}{4}\right)=(4)(2\pi\times 1\times e)\ \Rightarrow\ e=0/00375\ m=3/75\ mm$$

**نظر مؤلف:** به نظر می‌رسد این تست کمی ایراد دارد. چرا که طراح افت ناشی از اصطکاک را در نظر نگرفته است!

**۱۲۵- (۲)**

$$H_B=H_A+\Delta H\ \Rightarrow\ \frac{V_B^2}{2g}+z_B+\frac{P_B}{\gamma}=\frac{V_A^2}{2g}+z_A+\frac{P_A}{\gamma}+\Delta H\ \Rightarrow\ 0+0+\frac{276}{10}=0+2+\Delta H\ \Rightarrow\ \Delta H=25/6\ m$$

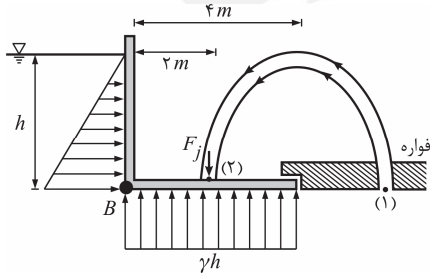
با فرض آرام بودن جریان و نیز با استفاده از رابطه هاگن ـ پوازی می‌نویسیم:

$$\Delta H=\frac{32\mu VL}{\gamma D^2}\ \Rightarrow\ 25/6=\frac{32\times\pi\times V\times 2}{10000\times 0/1^2}\ \Rightarrow\ V=\frac{40}{\pi}\ m/s$$

$$Re=\frac{\rho VD}{\mu}=\frac{(1000)\left(\frac{40}{\pi}\right)(0/1)}{(\pi)}\simeq 400<2000\ \Rightarrow$$ فرض ما مبنی بر آرام بودن جریان صحیح می‌باشد.

$$Q=V.A=\left(\frac{40}{\pi}\right)\left(\frac{\pi\times 0/1^2}{4}\right)=0/1\ m^3/s=100\ lit/s$$

**۱۲۶- (۱)**




$$H_1=H_2\ \Rightarrow\ \frac{V_1^2}{2g}+z_1+\frac{P_1}{\gamma}=\frac{V_2^2}{2g}+z_2+\frac{P_2}{\gamma}\ \Rightarrow\ 0+0+\frac{\gamma h}{\gamma}=\frac{V_j^2}{2g}+0+0$$

$$\Rightarrow\ V_j=\sqrt{2gh}$$

$$F_j=\rho Q_j V_j=\rho A_j V_j^2=\rho(0/5)(2gh)=\gamma h$$

$$\sum M_B=0\ \Rightarrow\ \left(\frac{\gamma h+0}{2}\right)(h\times 1)\left(\frac{h}{3}\right)+(\gamma h)(2)=(\gamma h)(4\times 1)\left(\frac{4}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ h^2=36\ \Rightarrow\ h=6\ m$$

**۱۲۷- (۳)**

با توجه به یک بعدی بودن جریان، شتاب ذره به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a = V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

(توجه کنید که محور مرکزی لوله یک خط جریان است و $\partial s$ جابجایی روی آن می‌باشد.)

چون جریان دائمی است (به‌علت ثابت بودن دبی در زمان)، بنابراین $\frac{\partial V}{\partial t} = ۰$ خواهد بود و این به معنی صفر بودن شتاب موضعی است. در این حالت شتاب ذره تنها بر اساس شتاب جابجایی می‌باشد:

$$a = V\frac{dV}{ds}$$

حال با استفاده از معادله پیوستگی و دانستن این که دبی جریان در طول لوله ثابت است، می‌توان نتیجه گرفت که در سیستم‌های (۱) و (۲) به‌ترتیب با افزایش و کاهش تدریجی سرعت مواجه هستیم. این به معنی آن است که $\frac{dV}{ds}$ در سیستم اول مثبت و در سیستم دوم منفی می‌باشد، بنابراین با مثبت فرض کردن سرعت ذره مورد نظر (جریان در جهتِ مثبت است)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_{(۱)} = V(\frac{dV}{ds}) \text{ و } \frac{dV}{ds} > ۰ \Rightarrow a_{(۱)} > ۰ \Rightarrow \text{شتاب تندشونده است.} \\ a_{(۲)} = V(\frac{dV}{ds}) \text{ و } \frac{dV}{ds} < ۰ \Rightarrow a_{(۲)} < ۰ \Rightarrow \text{شتاب کندشونده است.} \end{cases}$$

**۱۲۸- (۲)**

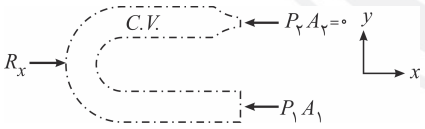
ضخامت زیر لایه آرام در جریان آشفته با افزایش عدد رینولدز، کاهش می‌یابد. با توجه به نمودار مودی می‌توان ملاحظه کرد که برای یک زبری نسبی خاص، عدد رینولدز در ناحیه انتقالی بیشتر از ناحیه لوله صاف و کمتر از ناحیه کاملاً آشفته است. از این رو می‌توان گفت ضخامت زیرلایه آرام در ناحیه انتقالی بیشتر از ناحیه کاملاً آشفته و کمتر از ناحیه لوله صاف برای لوله مورد نظر است.

**۱۲۹- (۴)**

در جریان آرام در لوله‌ها، تنش برشی در لوله دارای رابطه خطی با شعاع است و مقادیر حداکثر و حداقل آن به ترتیب در جداره‌ها ($\tau_{max} = \tau_۰ \ , \ r = r_۰$) و محور هندسی لوله ($\tau_{min} = ۰ \ , \ r = ۰$) می‌باشند.

**۱۳۰- (۴)**

حجم داخل زانویی و نازل را مطابق شکل زیر به‌عنوان حجم کنترل در نظر می‌گیریم:




$$V_۱ = \frac{Q}{A_۱} = \frac{۰/۰۵\pi}{(\frac{\pi \times ۰/۱^۲}{۴})} = ۲۰ \ m/s \quad , \quad V_۲ = V_۱(\frac{D_۱}{D_۲})^۲ = ۲۰ \times (\frac{۱۰}{۵})^۲ = ۸۰ \ m/s$$

$$H_۱ = H_۲ \Rightarrow z_۱ + \frac{P_۱}{\gamma} + \frac{V_۱^۲}{۲g} = z_۲ + \frac{P_۲}{\gamma} + \frac{V_۲^۲}{۲g} \Rightarrow ۰ + \frac{P_۱}{۱۰} + \frac{۲۰^۲}{۲ \times ۱۰} = ۰ + ۰ + \frac{۸۰^۲}{۲ \times ۱۰} \Rightarrow P_۱ = ۳۰۰۰ \ kPa$$

$$F_x = \rho Q(V_{x_۲} - V_{x_۱}) \ , \ F_x = R_x - P_۱A_۱$$

$$\Rightarrow R_x - (۳۰۰۰ \times ۱۰^۳)(\frac{\pi \times ۰/۱^۲}{۴}) = (۱۰^۳)(۰/۰۵\pi)(۸۰ + ۲۰) \Rightarrow R_x = ۱۲۵۰۰\pi \ N = ۱۲/۵\pi \ kN$$

## زبان عمومی و تخصصی

***بخش A : لغات***

***دستورالعمل: کلمه یا عبارت (۱) ، (۲) ، (۳) یا (۴) را که هر جمله را به بهترین حالت کامل می‌کند انتخاب کنید.***

**۱- هنگامی که همایش به پایان رسید، حضار ..... .**

۱) دلالت بر چیزی داشتند. ۲) تغییر شکل دادند. ۳) توصیف کردند. ۴) پراکنده شدند.

گزینه ۴ صحیح است.

**۲- کشورهای بسیاری (برای) کشتن مردم بی‌گناه ..... .**

۱) اعطا کردند. ۲) اظهار تأسف کردند. ۳) بر زمین گذاشتند. ۴) بازداشت کردند.

گزینه ۲ صحیح است.

**۳- مقررات ..... که همه‌چیز باید برطبق استانداردهای ایمنی باشد.**

۱) دوباره ملحق می‌کند. ۲) مشخص می‌کند. ۳) عملی می‌کند. ۴ متوجه می‌شود.

گزینه ۲ صحیح است.

**۴- مأموران سازمان ملل متحد** (United Nations) **بین شورشگران و هیئت دولت ..... .**

۱) وساطت کردند. ۲) گفت‌وگو کردند. ۳) مذاکره کردند. ۴) راضی کردند.

گزینه ۱ صحیح است.

**۵- این کامپیوتر برای کل ماه در ..... مان است.**

۱) جای خالی ۲) اختیار ۳) نگهداری ۴) معالجه

گزینه ۲ صحیح است.

**۶- ..... بحران اقتصادی این بود که بسیاری از کارخانه‌ها تعطیل شدند.**

۱) نتیجهٔ نهایی ۲) زوال ۳) شرایط ۴) مدیریت غلط

گزینه ۱ صحیح است.

**۷- بسیاری از پناهندگان از ..... بین ایران و ترکیه عبور کردند.**

۱) خراش ۲) مرز ۳) آستانه ۴) مانع

گزینه ۲ صحیح است.

**۸- تمامی خودروها قبل از ترخیص از کارخانه برای ..... ممکن آزمایش می‌شدند.**

۱) نقص‌های ۲) دسته‌بندی‌های کوچک ۳) تضادهای ۴) اجزای تشکیل‌دهنده

گزینه ۱ صحیح است.

**۹- تأمین خدمت خوب برای یک تجارت موفق (یک امر) ..... است.**

۱) قابل رؤیت ۲) شدید ۳) ساده‌لوح ۴) ذاتی

گزینه ۴ صحیح است.

**۱۰- این عقیده قدیمی که یادگیری زبان (یک) مسئلهٔ تکراری نیست (با تکرار ممکن نیست) دیگر ..... نیست.**

۱) مجرب ۲) مشابه ۳) قابل حمایت ۴) مداوم

گزینه ۳ صحیح است.

***بخش B : آزمون جاگذاری کلمات***

***دستورالعمل: متن زیر را بخوانید و تصمیم بگیرید که کدام گزینه (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) بهتر جاهای خالی را پر می‌کند.***

بوم‌شناسی مطالعهٔ رابطهٔ گیاهان و حیوانات با محیط زیست‌شان و با یکدیگر است. کلمه بوم‌شناسی از کلمه یونانی oikos به معنی خانه یا مکان زندگی و کلمه logos به معنی علم یا مطالعه .....(۱۱) ..... این کلمه اولین بار توسط طبیعت‌گرای آلمانی ارنست هَکل در سال ۱۸۶۹ ارائه شد و توسط چارلز داروین .....(۱۲) ..... استفاده شد، با این حال، این‌طور که شواهد نشان می‌دهند این کلمه در نوشته‌های شاعر و طبیعت‌گرای آمریکایی هنری دیوید تورو، حتی از قبل‌تر هم مختصراً استفاده شده بود.

انسان هوایی که استنشاق می‌کند و آبی که می‌نوشد را آلوده می‌کند. توجه انسان به مشکل آلودگی ممکن است کاملاً یک موضوع زیست‌محیطی باشد، .....(۱۳)..... یک موضوع بوم‌شناختی که در آن هوا و آبی پاکیزه و غیر خورنده می‌خواهد و بیشتر نگران کیفیت محیط زیست فیزیکی است. .....(۱۴)..... بخش اصلی نگرانی انسان گیاهان و حیواناتی شوند که آلوده شده‌اند، پس موضوعی که .....(۱۵) ..... دست و پنجه نرم می‌کند بوم‌شناختی خواهد شد. برخی از مشکلات کنونی ما، در اصل زیست‌محیطی هستند اما اکثریت و پیچیده‌ترین مشکلات ما یک طبیعت بوم‌شناختی است.

**۱۱-** ۱) نشأت می‌دهد (اما با حرف اضافه of). ۲) منشأ می‌گیرد از (of).
۳) منشأ می‌گیرد از (from). ۴) منشأ گرفته از (from).

گزینه ۴ صحیح است. derive به معنی منشأ گرفتن است و حرف اضافه آن from است. با توجه به اینکه جمله مجهول است.

**۱۲-** ۱) بزودی تا دیرگاه ۲) کوتاه اخیراً ۳) کمی بعداً ۴) کمی بعد از آن

گزینه ۳ صحیح است. قیدی که برای توصیف صفت می‌آید باید قبل از صفت به‌کار رود.

**۱۳-** ۱) نسبتاً ۲) از این که هست ۳) نسبتاً وجود دارد. ۴) تا

گزینه ۴ صحیح است. rather به معنی ترجیحاً هست و با حروف اضافه than به کار می‌رود.

**۱۴-** ۱) گرچه ۲) به هر صورت اگر ۳) با این وجود ۴) در مقابل

گزینه ۲ صحیح است.

**۱۵-** ۱) در آن ۲) برای آنکه ۳) که با آن ۴) از آن

گزینه ۳ صحیح است.

***بخش C : درک‌مطلب***

***دستورالعمل: چهار متن زیر را بخوانید سپس بهترین گزینه (۱) ، (۲) ، (۳) و (۴) را انتخاب کنید.***

***متن ۱***

یک نوع از بارگذاری که ممکن است به شکستگی ترد فلزات شکل‌پذیر منتج شود به دلیل بارگذاری متناوب است. برای مثال یک میله با بارگذاری تک‌محوره و سطحی صیقلی تحت اثر سیکل پیاپی نیروهای کششی و فشاری که با اندازه‌ای مساوی به طور متناوب اعمال می‌شوند، ممکن است در یک سطح تنشی به طور قابل ملاحظه‌ای کمتر از بزرگی تنشی که تحت اثر یک بارگذاری استاتیکی غیر متناوب باعث گسیختگی آن توسط پدیده شکست می‌شود، توسط پدیده شکست گسیخته شود (معمولاً به نحو ترد شکن در خستگی با چرخه بالا). معمولاً شکست یک عضو سازه‌ای تحت اثر بارگذاری متناوب، شکستگی یا گسیختگی ناشی از خستگی نام دارد. شکستگی ناشی از خستگی ممکن است با (آغاز) یک یا چند ترک کوچک، معمولاً در محل تنش بحرانی ماکزیمم در عضو شروع شود. دورهٔ مکرر بار باعث می‌شود ترک یا ترک‌هایی منتشر شوند تا زمانی که عضو سازه‌ای دیگر نتواند بار را در ناحیهٔ ترک خورده تحمل کند و عضو بشکند.

**۱۶- ممکن است یک فلز شکل‌پذیر توسط ..... به نحوی ترد بشکند.**

۱) بارهای استاتیکی ۲) بارهای متناوب ۳) بارهای ناگهانی ۴) بارهایی با بزرگی متفاوت

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

One type of loading that may result in brittle fracture of ductile metals is that of repeated loads.

**۱۷- شکست اعضای سازه‌ای تحت اثر بارگذاری دوره‌ای (متناوب) ..... نام دارد.**

۱) شکست ترد ۲) شکست متناوب ۳) شکست نرم ۴) شکست ناشی از خستگی

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

Fracture of a structural member under repeated loads is commonly called fatigue fracture or failure.

**۱۸- هنگامی که یک عضو سازه‌ای به دلیل خستگی گسیخته می‌شود، سطح تنش در این عضو ..... .**

۱) همیشه بیشتر از حد تنش گسیختگی ماده است.
۲) به طور قابل ملاحظه‌ای کمتر از بزرگی تنشی است که باعث گسیختگی توسط پدیده شکست می‌شود.
۳) همیشه کمتر از سطح تنشی است که گسیختگی توسط پدیده شکست (در آن) اتفاق می‌افتد.
۴) به طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر از بزرگی تنشی است که باعث گسیختگی توسط پدیده شکست می‌شود.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

… it may fail by fracture …… at a stress level considerably below the magnitude of stress that causes failure by fracture under a noncyclic static load.

**۱۹- گسیختگی یک عضو سازه‌ای ممکن است با ..... شروع شود.**

۱) تمایز ترک‌ها در ناحیه ترک خورده
۲) آغاز ترک‌هایی در پیرامون ناحیه تنش بحرانی ماکزیمم در عضو
۳) پیشرفت ترک‌ها بعد از شکستگی عضو سازه‌ای
۴) انتشار ترک‌ها در محل تنش بحرانی مینیمم در عضو

با توجه به عبارت زیر گزینه ۲ صحیح است.

Fracture by fatigue may start by the initiation of one or more small cracks, usually in the neighborhood of the maximum critical stress in the member.

**۲۰- چه عاملی باعث می‌شود ترک‌ها در عضو سازه‌ای منتشر شوند؟**

۱) بار استاتیکی غیر متناوب ۲) گسیختگی عضو سازه‌ای ۳) بار متناوب ۴) شکست عضو سازه‌ای

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

Repeated cycling of the load causes the crack or cracks to propagate until ……

**متن ۲**

انواع مختلفی از مجاری آب شامل کانال قابل کشتیرانی (کانال)، کانال باز، کاریز (مجرا)، خطوط لوله و تونل می‌توانند برای انتقال آب به کار گرفته شوند. انتخاب نهایی بر چنین فاکتورهایی مثل توپوگرافی، امکان دستیابی به بار آبی، شیوه‌های ساخت و ساز، ملاحظات اقتصادی و کیفیت آب استوار است. درکانال‌های باز آب، گرادیان هیدرولیکی و سطح آزاد آب بر هم منطبق‌اند. اگر کانال رو یا بالای سطح زمین قرار داشته باشد به عنوان کاریز دسته‌بندی می‌شود. کاریزها ممکن است پوشیده یا باز باشند که به عنوان وسیله انتقال در موقعیت‌های توپوگرافی مناسب تعبیه شده است که امکان جریان ثقلی را با کمترین خاک‌برداری و خاکریزی می‌دهد. اگر که کانال بدون پوشش باشد، تراوایی خاک باید در مورد افت‌های تراوشی در نظر گرفته شود. بررسی مهم دیگر خطر آلودگی احتمالی و افت‌های تبخیری است.

**۲۱- کاریز یک ..... بلند (مرتفع) است.**

۱) کانال ۲) منبع آب ۳) خط لوله ۴) مخزن ذخیره

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

If the channel is supported on or above the ground, it is classified as a flume.

**۲۲- چرا کاریزها باید در شرایط توپوگرافی مناسب ساخته شوند؟**

۱) تا آب در کاریز جریان ثقلی داشته باشد. ۲) زیرا آنها منطبقند.
۳) زیرا آنها کاملاً خاک‌برداری شده‌اند. ۴) زیر آنها بدون پوشش هستند.

گزینه ۱ صحیح است.

**۲۳- در کانال‌های باز بدون پوشش، چه عواملی مهم‌ترین ملاحظات هستند؟**

۱) خاک‌برداری و خاک‌ریزی ۲) گرادیان هیدرولیکی و سطح آزاد آب
۳) بررسی اقتصادی و کیفیت آب ۴) تراوایی خاک و آلودگی بالقوه

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

If the channel is unlined, the perviousness of the soil must be considered relative to seepage losses. Other considerations of importance are the potential pollution hazard and evaporative losses.

**۲۴- معنی امکان دسترسی به بار آبی چیست؟**

۱) افت‌های تراوشی ۲) هزینه‌های انتقال آب
۳) شیب کافی هیدرولیکی ۴) عوامل مؤثر در کم کردن سرعت جریان

عامل حرکت آب تغییر هد است. بنابراین برای آن که آب داخل کانال حرکت کند باید تغییرات هد (بار آبی) در مبدأ و مقصد یا همان شیب هیدرولیکی وجود داشته باشد. با توجه به آنچه گفته شد گزینه ۳ صحیح است.

**۲۵- برای جلوگیری از افت‌های تبخیری، سیستم انتقال آب (کانال باز) باید ..... .**

۱) خاک‌برداری شود. ۲) به طور قابل ملاحظه‌ای در آن تزریق دوغاب سیمان شود.
۳) با بتن پوشانده شود. ۴) با بررسی‌های اقتصادی پوشش داده شود.

عامل تبخیر کانال باز و در معرض مستقیم هوا بودن است لذا باید کانال باز با وسیله‌ای ارزان پوشانده شود. پس گزینه ۴ صحیح است.

## متن ۳

حفاری حفره‌هایی در سنگ‌های غیر تحکیم یافته مانند رسوبات آبرفتی اخیر، ترکیبی از رس، لای، ماسه، شن و رس یخچالی ملزم به کوبیدن دیوارهای حائل است که به الوارها و پایه‌هایی برای نگهداشتن سقف تکیه کرده‌اند. هر چه (نیاز به) خاکبرداری بیشتر باشد روی سطحی که شیب آن به قدری است که وسایل بتوانند ثابت بمانند این دیوارها بیشتر کوبیده می‌شوند که در پشت از قاب و در جلو از خاک نگهداری می‌کنند. یک تکیه‌گاه جدید زیر انتهای پیش‌روندهٔ دیوار حائل قرار داده می‌شود و فرایند (دوباره) تکرار می‌شود. اگر نیاز باشد کناره‌های حفره با دیوارهایی که به پایه‌هایی تکیه داده‌اند نگه داشته می‌شوند.

**۲۶- برای حفاری حفره‌ها در خاک‌های سست، ..... باید کوبیده شوند.**

۱) تخته‌های حائل ۲) پایه و سقف ۳) الوارهای عرضی ۴) پشت و جلو

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

Mining of headings in unconsolidated rocks …… requires the driving of polling boards ……

**۲۷- پشت و جلوی دیوارهای کوبیده شده به ترتیب با ..... نگه داشته شده‌اند.**

۱) تخته‌های حائل ۲) قاب و الوار ۳) قاب و خاک ۴) خاک و قاب

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

… these boards are driven further, with the rear supported by the frame, the front by the soil.

**۲۸- کناره‌های حفره‌ها چگونه نگه‌داشته می‌شوند؟**

۱) با تخته‌ها ۲) با قاب‌ها ۳) با پایه‌ها ۴) با خاک

با توجه به عبارت زیر گزینه ۱ صحیح است.

The sides of the heading <u>are held by boards</u> supported by the posts.

## متن ۴

در هر دوی روش‌های پورتال و کانتیلور، فرض می‌شود کل بارهای باد توسط قاب‌های ساختمان بدون هیچ کمک سخت‌شوندگی (تقویت) از طرف کف‌ها، دیوارها و (دیوارهای) جداکننده تحمل می‌شوند. تغییرات در طول تیرهای اصلی و ستون‌ها در ساختمان‌های بلند لاغر که بلندایشان ۵ برابر یا بیشتر از کوچکترین بعد افقی (آنهاست) قابل چشم‌پوشی نیست. در این مورد، یک روش دقیق‌تر مثل «روش دقیق» باید به جای روش‌های پورتال یا کانتیلور استفاده شود.

**۲۹- در روش های پورتال، فرض می‌شود که کل بار باد توسط ..... تحمل می‌شود.**

۱) کف‌ها ۲) جداکننده‌ها ۳) قاب‌ها ۴) دیوارها

با توجه به عبارت زیر گزینه ۳ صحیح است.

… In both the portal and cantilever methods, the entire wind loads are assumed to be resisted by the building frames …

**۳۰- روش کانتیلور در ساختمانی که ..... جواب نمی‌دهد.**

۱) تمام قاب‌ها از فولاد ساخته شده باشند.

۲) نسبت ارتفاع ساختمان به کوچکترین بعد جانبی (افقی) آن کمتر از ۵ باشد.

۳) تمام قاب‌ها از بتن ساخته شده باشند.

۴) نسبت ارتفاع ساختمان به کوچکترین بعد جانبی (افقی) آن بیشتر از ۵ باشد.

با توجه به عبارت زیر گزینه ۴ صحیح است.

Changes in length of girders and columns are not negligible in tall slender buildings the height of which is five or more times the least horizontal dimension. In this case, a more precise method of analysis such as "exact method" should be used than the portal or cantilever methods.

## ریاضیات

**۳۱- (۳)**

**روش اول:** می‌دانیم $\int_{1}^{1} \frac{e^{at}}{t} dt = 0$ پس، از آنجا که فقط گزینه (۳) $(F(a) - F(a) = 0)$ به ازای $x = 1$ برابر صفر می‌شود، گزینه درست همین است.

**روش دوم:** با تغییر متغیر $t = \frac{u}{a}$ در انتگرال خواسته شده د ر سؤال داریم: $dt = \frac{1}{a} du$

$$I = \int_{1}^{x} \frac{e^{at}}{t} dt = \int_{a}^{ax} \frac{e^{u}}{u} du = \int_{1}^{ax} \frac{e^{u}}{u} du - \int_{1}^{a} \frac{e^{u}}{u} du = F(ax) - F(a)$$

**۳۲- (۲)**

با استفاده از فرم دکارتی $z = x + iy$ نتیجه می‌شود:

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \Rightarrow |z-3| = 2|z+3| \xrightarrow{z=x+iy}$$ (دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم)

$$(x-3)^2 + y^2 = 4(x+3)^2 + 4y^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x + 9 + y^2 = 0 \Rightarrow (x+5)^2 + y^2 = 16$$ (دایره‌ای به شعاع ۴ و به مرکز $(-5, 0)$)

از بین گزینه‌ها، آن که در رابطهٔ $(x+5)^2 + y^2 < 16$ صدق کند؛ جواب سؤال است. واضح است که فقط گزینه (۲) $(-3+i)$ در این نامساوی صدق می‌کند.

**۳۳- (۴)**

پاسخ تست ۳۸ سال ۸۴ را ملاحظه نمایید.

**۳۴- (۱)**

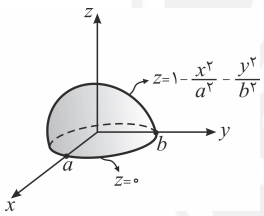
پاسخ تست ۳۹ سال ۸۴ را ملاحظه نمایید.

**۳۵- (۳)**

**روش اول:** قاعده سهمی‌گون یک بیضی است. بنابراین، با توجه به رابطه حجم سهمی‌گون می‌توان نوشت:

$$\text{حجم سهمی‌گون} = \frac{1}{2}\ (\text{مساحت قاعده})\ (\text{ارتفاع}) = \frac{1}{2} \times \pi ab \times 1 = \frac{\pi ab}{2}$$

**روش دوم:** صفحه $xy$، همان صفحه $z = 0$ است.




$$V = \iiint_V dv = \iint_D \int_{z=0}^{z=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dz\,dx\,dy = \iint_D \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) dx\,dy$$

با استفاده از تغییر متغیر شبه‌قطبی خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{matrix} \Rightarrow |J| = abr \ ;\ 0 \le r \le 1\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\Rightarrow V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (1-r^2)\, abr\, dr\, d\theta = 2\pi ab \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi ab}{2}$$

**۳۶- (۱)**

معادله مورد نظر یک معادله برنولی با $n = 4$ است.

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (n = 4)$$

می‌دانیم تغییر متغیر مناسب برای تبدیل معادله برنولی به معادله خطی $z = y^{1-n}$ می‌باشد که برای $n = 4$ به‌دست می‌آید:

$$z = y^{1-4} \Rightarrow z = y^{-3}$$

**۳۷- (۲)**

زمانی که طرف دوم $\sin(u)$ یا $\cos(u)$ تنها وجود دارد، بهترین روش برای یافتن جواب خصوصی عملگر معکوس است:

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\{3\cos 2x\} = 3\frac{1}{D^2+4}\{\cos 2x\} = 3x \cdot \frac{1}{2D}\{\cos 2x\}$$ (می‌دانیم که $\frac{1}{D}$ متناظر با $\int dx$ می‌باشد.)

$$\Rightarrow y_P = \frac{3}{2}x \int \cos 2x\, dx = \frac{3}{4}x \sin 2x$$

**۳۸- (۳)**

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم $(L(y) = Y)$:

$$L = \left\{(1-t^2)y''\right\} - 2L\{ty'\} + 6L\{y\} = 0 \Rightarrow L\{y''\} - L\left\{t^2y''\right\} - 2L\{ty'\} + 6L\{y\} = 0$$

$$\Rightarrow s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0) - \frac{d^2}{ds^2}\left\{s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0)\right\} + 2\frac{d}{ds}\left\{sL\{y\} - y(0)\right\} + 6L\{y\} = 0$$

با اعمال شرایط اولیه نتیجه می‌شود: $s^2Y - 1 - s^2Y'' - 4sY' - 2Y + 2sY' + 2Y + 6Y = 0 \Rightarrow s^2Y' + 2sY' - (s^2+6)Y = -1$

**۳۹- (۲)**

ابتدا $y'$ و $y''$ را برحسب متغیر جدید $z$ پیدا می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\dot{y}x \qquad (\frac{dy}{dz}=\dot{y}\ ,\ \frac{dz}{dx}=x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\dot{y}x)=\dot{y}+x\frac{d\dot{y}}{dx}=\dot{y}+x\frac{d\dot{y}}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\dot{y}+x^2\ddot{y}$$

جایگذاری در معادله: $xy''+(x^2-1)y'+x^3y=0 \Rightarrow x(\dot{y}+x^2\ddot{y})+(x^2-1)\dot{y}x+x^3y=0$

$$x^3\ddot{y}+x\dot{y}+x^3\dot{y}-x\dot{y}+x^3y=0 \Rightarrow x^3(\ddot{y}+\dot{y}+y)=0 \Rightarrow \ddot{y}+\dot{y}+y=0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}+y=0$$

**۴۰- (۲)**

ابتدا معادله دیفرانسیل حاکم بر مسیرهای اصلی را می‌یابیم:

$$y=kx^2 \Rightarrow y'=2kx$$

از تقسیم دو رابطه فوق، معادله دیفرانسیل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{y'}{y}=\frac{2kx}{kx^2} \Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{2}{x} \Rightarrow y'=2\frac{y}{x}$$

حال با تبدیل $y'\to\frac{-1}{y'}$ معادله دیفرانسیل حاکم بر مسیرهای قائم به‌دست می‌آید:

$$\frac{-1}{y'}=2\frac{y}{x} \Rightarrow 2y\,dy=-x\,dx \Rightarrow y^2=-\frac{x^2}{2}+k \Rightarrow x^2+2y^2=k$$

**۴۱- (۱)**

با ضرب صورت و مخرج کسر در عبارت $(\sqrt{x^2+5}+3)$ داریم:

$$\text{حد}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x(x-2)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{x(x-2)(\sqrt{4+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{6x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{6x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{6x}=\frac{1}{3}$$

**۴۲- (۱)**

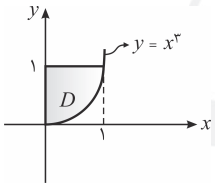
می‌دانیم یک چندجمله‌ای در بی‌نهایت با جمله شامل بزرگترین توان خود هم‌ارز است، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-1}{3x^2+2}\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{3x^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{4}{3}$$

(توجه کنید که وقتی $x\to\infty$؛ $\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$)

**۴۳- (۴)**

ناحیه مورد نظر در شکل زیر رسم شده است. دوران آن حول محور $x$، حجمی حاصل می‌کند که از روش دیسک محاسبه می‌شود:




$$V=\pi\int_0^1(1^2-(x^3)^2)\,dx=\pi\int_0^1(1-x^6)\,dx=\frac{6\pi}{7}$$

**۴۴- (۱)**

با تفکیک کسر خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4})$$

که این سری حالت تعمیم‌یافته سری تلسکوپی است و چون اختلاف اندیس‌ها ۴ واحد است، ۴ جمله از اول و ۴ جمله از آخر نوشته می‌شود:

$$=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-4\times\frac{1}{\infty})=\frac{25}{48}$$

**۴۵- (۱)**

ابتدا $z$ را به صورت تابعی از $x$ و $y$ می‌نویسیم:

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \;;\; \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1+x^2-y^2}}$$

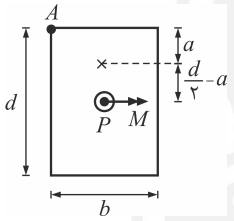
با جایگذاری این روابط در عبارت مورد نظر نتیجه می‌شود:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{-(x^2+y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{z^2-1}{z}=z-\frac{1}{z}$$

## مقاومت مصالح و تحلیل سازه‌ها

**۴۶- (۳)**

بار $P$ را به مرکز مقطع منتقل می‌کنیم. در این صورت مقطع تحت بار $P$ و لنگر $M$ قرار خواهد گرفت:




$$M=P\left(\frac{d}{2}-a\right)$$

$$\sigma_A=\frac{P}{A}+\frac{M}{S}=\frac{P}{bd}+\frac{P\left(\frac{d}{2}-a\right)}{\frac{bd^2}{6}}=\frac{P}{bd}+\frac{P(3d-6a)}{bd^2}=\frac{4P}{bd}-\frac{6Pa}{bd^2}$$

برای آنکه تنش در $A$ حداکثر باشد، باید مشتق عبارت فوق نسبت به $d$ برابر صفر شود:

$$-\frac{4P}{bd^2}+\frac{12Pa}{bd^3}=0 \Rightarrow -\frac{4Pa}{bd^3}(d-3a)=0 \Rightarrow d-3a=0 \Rightarrow d=3a$$

**۴۷- (۴)**

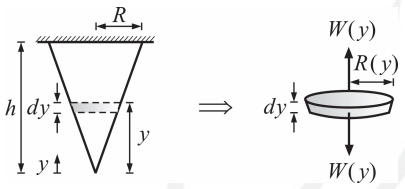
$$\kappa=\frac{M}{EI}=\frac{M}{E\times\frac{a^4}{12}}=\frac{12M}{Ea^4}$$

**۴۸- (۲)**

می‌دانیم تنش برشی ماکزیمم در مقطع مثلثی، در وسط ارتفاع مقطع، یعنی در فاصله $\frac{h}{2}$ از نقطه $A$ ایجاد می‌شود.

**۴۹- (۳)**

یک المان کوچک از مخروط را مطابق شکل در نظر می‌گیریم. تغییر طول این المان برابر است با:




$$d\Delta=\frac{W(y)\,dy}{EA(y)}\;,\; W(y)=\gamma V(y)$$

در رابطه اخیر، $V(y)$ حجم قسمتی از مخروط است که در زیر المان مشخص شده قرار دارد و برابر است با:

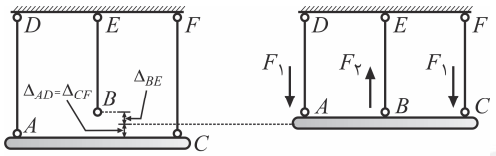
$$V(y)=\frac{1}{3}A(y)\times y \Rightarrow d\Delta=\frac{\frac{\gamma}{3}A(y)\times y\,dy}{EA(y)}=\frac{\gamma y\,dy}{3E}$$

بنابراین تغییر طول کل مخروط برابر است با:

$$\Delta_{\text{کل}}=\int_0^h d\Delta=\int_0^h\frac{\gamma y dy}{3E}=\left.\frac{\gamma y^2}{6E}\right]_0^h=\frac{\gamma h^2}{6E}$$

**۵۰- (۱)**

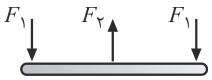
سازه داده شده متقارن است. لذا میله صلب بعد از تغییر شکل کماکان به صورت افقی خواهد بود. بنابراین می‌توان رابطه سازگاری زیر را میان تغییر طول میله‌ها نوشت:




(قبل از تغییرشکل) (پس از تغییرشکل)

$$\Delta_{BE}+\Delta_{AD}=0/3\ cm$$

از طرفی با توجه به روابط تعادل استاتیکی برای میله صلب، رابطه بین نیروهای $F_2$ و $F_1$ به‌دست می‌آید:




$$\sum F_y=0 \Rightarrow 2F_1=F_2$$

$$\begin{cases}\Delta_{AD}=\Delta_{CF}=\dfrac{F_1L}{EA}\\ \Delta_{BE}=\dfrac{F_2L}{EA}=\dfrac{2F_1L}{EA}\end{cases} \Rightarrow \frac{F_1L}{EA}+\frac{2F_1L}{EA}=0/3 \Rightarrow \frac{3F_1\times 50}{4\times 10^5\times 5}=0/3 \Rightarrow F_1=4000kg\ ,\ F_2=2F_1=8000\ kg$$

**۵۱- (۲)**

در مقاطع جدار نازک باز، تنش برشی ماکزیمم تحت لنگر پیچشی برابر است با:

$$\tau_{max}=\frac{Tt_{max}}{J}\ ,\ J=\frac{1}{3}\sum a_i\,t_i^3$$

$J$ و $t_{max}$ در هر دو مقطع یکسان است. لذا ظرفیت پیچشی مقاطع با هم برابر است.

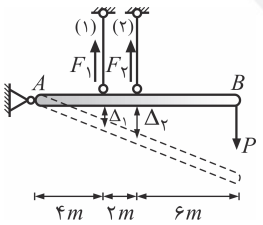
**۵۲- (۴)**

اعضای $AB$ و $BC$ مانند فنرهای موازی عمل کرده و لنگر پیچشی $T$ به نسبت سختی پیچشی بین آن‌ها توزیع می‌شود.

$$T_A=T_{AB}=T\times\frac{K_{AB}}{K_{AB}+K_{BC}}=T\times\frac{\frac{GJ}{3L}}{\frac{GJ}{3L}+\frac{3GJ}{L}}=\frac{T}{10}\qquad T_C=T-T_A=\frac{9T}{10}$$

**۵۳- (۲)**

ابتدا نیروی ایجاد شده در هر یک از میله‌ها را در اثر اعمال بار $P$ می‌یابیم. تغییر شکل سازه به صورت زیر خواهد بود. با توجه به قضیه تالس داریم:




$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{\frac{F_1L}{EA}}{\frac{F_2L}{EA}}=\frac{2}{3}\Rightarrow F_1=\frac{2}{3}F_2$$

$$\sum M_A=0\Rightarrow F_1\times 4+F_2\times 6=P\times 12\Rightarrow \frac{2}{3}F_2\times 4+F_2\times 6=P\times 12$$

$$\Rightarrow F_2=\frac{18}{13}P\ ,\ F_1=\frac{12}{13}P$$

از آنجایی که $F_2>F_1$ است، نیروی ایجاد شده در میله (۲) حداکثر مقدار $P$ را تعیین می‌کند:

$$P_{all}=\frac{13}{18}F_{all}=\frac{13}{18}\times\sigma_{all}\times A=\frac{13}{18}\times 36\times 20=520\ kg$$

**۵۴- (۴)**

اعضای $AB$ و $AC$ و نیز $BD$ و $CD$ به صورت فنرهای موازی عمل می‌کنند که سختی هر یک برابر است با:

$$K_{AB}=K_{BD}=K_{AC}=K_{CD}=\frac{EA}{L}\times cos^2 45=\frac{EA}{2L}$$

همچنین قسمت‌های $ABC$ و $BCD$ با هم مثل فنرهای سری عمل می‌کنند. بنابراین سختی کل سازه در راستای قائم برابر است با:

$$\begin{cases}K_{tot}=\dfrac{K_{BCD}\times K_{ABC}}{K_{BCD}+K_{ABC}}\\ K_{ABC}=K_{BCD}=2(\dfrac{EA}{2L})=\dfrac{EA}{L}\end{cases}\Rightarrow K_{tot}=\frac{EA}{2L}$$

و در نهایت جابه‌جایی گره $D$ برابر است با:

$$\Delta_D=\frac{P}{K_{tot}}=\frac{P}{\frac{EA}{2L}}=\frac{2PL}{EA}$$

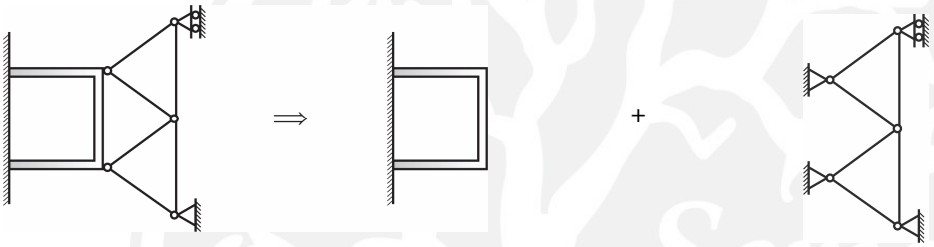
**۵۵- (۲)**

برای صفر شدن انحناء در $B$ بایستی لنگری در خلاف جهت انحنای اولیه بر تیر اعمال شود و داریم:

$$\begin{cases} M=\dfrac{EI}{R_۱}=\dfrac{E\times\dfrac{bh^۳}{۱۲}}{R_۱}=\dfrac{Ebh^۳}{۱۲R_۱} \\ M=\dfrac{PL}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{PL}{۲}=\frac{Ebh^۳}{۱۲R_۱} \Rightarrow P=\frac{Ebh^۳}{۶LR_۱}$$

**۵۶- (۴)**

میله‌های قطری قرار گرفته در قسمت قاب سازه، دو درجه نامعینی برای سازه ایجاد می‌کنند. آن‌ها را حذف کرده و برای باقی‌مانده سازه به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$n_۱=۳k+r-(C+۳)=۳\times۰+۶-(۰+۳)=۳$$

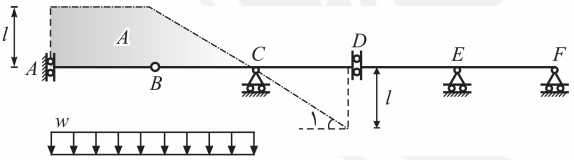
$$n_۲=m+r-۲j=۶+۷-۲\times۵=۳$$

بنابراین درجهٔ نامعینی کل سازه برابر است با:

$$n=n_۱+n_۲+\underbrace{۲}_{\text{مربوط به میله‌های قطری}}=۳+۳+۲=۸$$

**۵۷- (۲)**

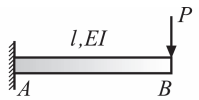
نمودار خط تأثیر لنگر خمشی در محل مفصل برشی $D$ به صورت زیر خواهد بود:



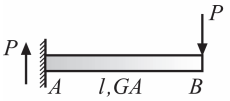

$$M_{max_D}=wA=w\left(\frac{۲l+l}{۲}\right)\times l=\frac{۳wL^۲}{۲}$$

**۵۸- (۴)**

در حالت اول فقط تغییر شکل ناشی از انرژی خمشی را در نظر می‌گیریم.

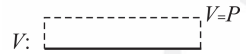



$$\Delta_{B_b}=\frac{Pl^۳}{۳EI}=\frac{Pl^۳}{۳E\times\dfrac{bh^۳}{۱۲}}=\frac{۴P}{Eb}\left(\frac{l}{h}\right)^۳=\frac{۴P}{Eb}\times۱۰^۳=\frac{۴۰۰۰P}{Eb}$$




در حالت دوم تغییر شکل ناشی از انرژی‌های برشی را نیز لحاظ می‌کنیم. با استفاده از روش بارواحد خواهیم داشت:

$$\Delta_{B_s}=f_s\frac{Pl\times۱}{GA}=\frac{۱/۲\,Pl}{GA}$$




توجه شود که سازه واحد و نمودار نیروی برشی در آن مشابه سازه اصلی بوده و تنها به جای $P$، مقدار واحد (۱) قرار می‌گیرد.

$$G=\frac{E}{۲/۴}\ ,\ A=bh=b\times\frac{l}{۱۰}=\frac{bl}{۱۰}$$

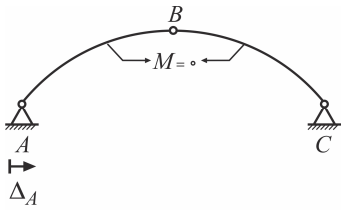
$$\Delta_{B_s}=\frac{۱/۲\,Pl}{\dfrac{E}{۲/۴}\times\dfrac{bl}{۱۰}}=\frac{۲۸/۸P}{bE}$$

بنابراین درصد افزایش تغییر مکان $B$ با در نظر گرفتن اثرات برش، برابر است با:

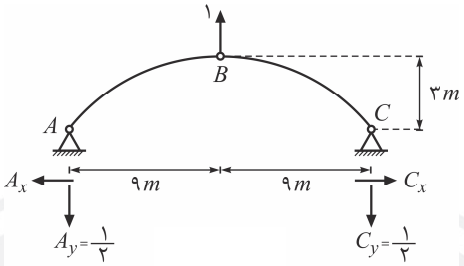
$$\frac{\Delta_{B_s}}{\Delta_{B_b}}=\frac{\dfrac{۲۸/۸P}{bE}}{\dfrac{۴۰۰۰P}{bE}}=۷/۲\times۱۰^{-۳} \Rightarrow \text{درصد افزایش}=۷/۲\times۱۰^{-۳}\times۱۰۰=۰/۷۲٪$$

**۵۹- (۳)**

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم.




سازه تحت اثر بارگذاری حقیقی




سازه تحت اثر بارگذاری واحد مجازی

در سازهٔ واحد : $\sum M_{B_L} = ۰ \Rightarrow A_x \times ۳ = \frac{۱}{۲} \times ۹ \Rightarrow A_x = \frac{۳}{۲}$

می‌خواهیم گره $B$ به اندازه $۳\,cm$ به سمت بالا جابه‌جا شود تا $۳\,cm$ نشست ذکر شده به سمت پایین خنثی شده و در نهایت این گره هیچ جابه‌جایی نداشته باشد. بنابراین در فرمول بار واحد $\Delta_B = ۰/۰۳\,m$ قرار می‌دهیم.

$$\Delta_B \times ۱ + \Delta_A \times A_x = ۰ \Rightarrow ۰/۰۳ \times ۱ - \Delta_A \times \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow \Delta_A = ۰/۰۲\,m = ۲\,cm$$

**۶۰- (۱)**

اگر تغییرمکان زیر بار $P$ برابر $\Delta_۱$ و زیر بار $۲P$ برابر $\Delta_۲$ باشد در یک سازهٔ خطی داریم:

$$(۱): U = \frac{۱}{۲} P \Delta_۱ + \frac{۱}{۲}(۲P)\Delta_۲ \ , \ \Delta_۱ = \frac{P}{k_۱} \ , \ \Delta_۲ = \frac{۲P}{k_۲}$$

$$(۲): U = \frac{P^۲}{۲k_۱} + \frac{۲P^۲}{k_۲}$$

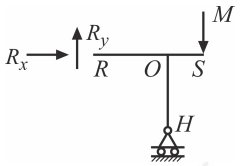
$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{۲P}{۲k_۱} + \frac{۴P}{k_۲} = \frac{P}{k_۱} + ۲\left(\frac{۲P}{k_۲}\right) = \Delta_۱ + ۲\Delta_۲$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = ۰/۰۸\,m$$

**تذکر:** با توجه به این‌که پارامترهای $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ به $P$ وابسته می‌باشند، نمی‌توان از طرفین رابطهٔ (۱) به صورت مستقیم نسبت به $P$ مشتق‌گیری کرد. با قرار دادن $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ برحسب $P$، رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آید. با توجه به این‌که $k_۱$ و $k_۲$ (سختی در راستاهای (۱) و (۲)) از $P$ مستقل می‌باشند، از طرفین رابطهٔ (۲) می‌توان به صورت مستقیم نسبت به $P$ مشتق‌گیری کرد.

**۶۱- (۲)**

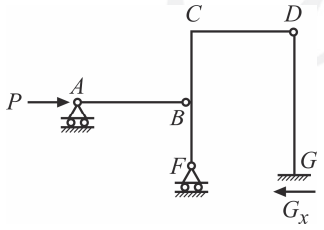
ابتدا قسمت $ROSH$ را به صورت جداگانه در نظر می‌گیریم:




$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow R_x = ۰$$

بنابراین در اثر اعمال $M$، هیچ نیرویی به صورت افقی از این قسمت به ستون $GD$ منتقل نمی‌شود.

حال باقی‌مانده سازه را در نظر گرفته، داریم:

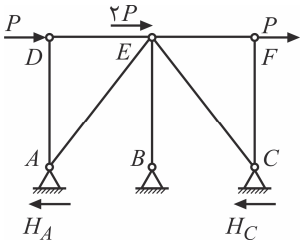



$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow G_x = P \Rightarrow V_D = G_x = P$$

$$\begin{cases} \Delta_{D_x} = \dfrac{V_D (۲L)^۳}{۳EI} = \dfrac{۸V_D L^۳}{۳EI} = \dfrac{۸PL^۳}{۳EI} \\ \Delta_{D_x} = \dfrac{۹ML^۳}{EI} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۸PL^۳}{۳EI} = \frac{۹ML^۳}{EI} \Rightarrow \frac{M}{P} = \frac{۸}{۲۷}$$

**۶۲- (۳)**




ستون $BE$ دو سرفصل است. بنابراین $B_x = ۰$ می‌باشد. با توجه بـه پادمتقـارن بـودن بارگـذاری و تقـارن سازه می‌توان گفت:

$$H_A = H_C = \frac{۱}{۲}(P + P + ۲P) = ۲P$$

**۶۳- (۱)**

$$U_A = \frac{۱}{۲}P_A\,\Delta_A = \frac{۱}{۲}P_A\,\frac{P_A L^۳}{۳EI} = \frac{P_A^۲ L^۳}{۶EI}$$

$$U_B = \frac{۱}{۲}P_B\,\Delta_B = \frac{۱}{۲}P_B\,\frac{P_B(۲L)^۳}{۳(۲EI)} = \frac{۲P_B^۲ L^۳}{۳EI}$$

$$U_A = U_B \;\Rightarrow\; \frac{P_A^۲ L^۳}{۶EI} = \frac{۲P_B^۲ L^۳}{۳EI} \;\Rightarrow\; \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^۲ = ۴ \;\Rightarrow\; \frac{P_A}{P_B} = ۲$$

**۶۴- (۳)**

برای آنکه عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه‌ها با هم برابر شود، باید سختی خمشی تیرها یکسان باشد. داریم:

$$K_{AB} = K_{CD} \;\Rightarrow\; \frac{۴۸EI_{AB}}{L_{AB}^۳} = \frac{۴۸EI_{CD}}{L_{CD}^۳} \;\Rightarrow\; \frac{\frac{bt_{AB}^۳}{۱۲}}{L_{AB}^۳} = \frac{\frac{bt_{CD}^۳}{۱۲}}{L_{CD}^۳} \;\Rightarrow\; \frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}}$$

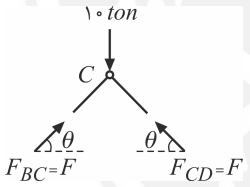
**۶۵- (۲)**

ابتدا درجه نامعینی سازه را می‌یابیم.

$$n = m + r - ۲j = ۱۳ + ۴ - ۲\times ۸ = ۱$$

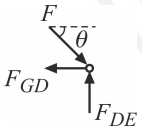
بنابراین سازه یک درجه نامعین است. اما این درجه نامعینی خارجی بوده و با توجه به تقارن خرپا، در اثر تغییر درجه حرارت، هیچ نیروی اضافی در اعضای خرپا ایجاد نخواهد شد. حال از بررسی تعادل نیروها در گره $C$ و $D$، $F_{DG}$ به دست می‌آید.

گره $C$:



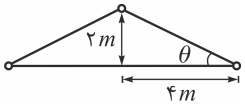

$$\sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; ۱۰ = ۲F\sin\theta \;\Rightarrow\; F = \frac{۵}{\sin\theta}$$

گره $D$:




$$\sum F_x = ۰ \;\Rightarrow\; F\cos\theta = F_{GD} \;\Rightarrow\; \frac{۵}{\sin\theta}\times\cos\theta = F_{GD} \;\Rightarrow\; F_{GD} = ۵\times\cot\theta$$

$\cot\theta$ از هندسه خرپا به‌دست می‌آید:




$$\cot\theta = \frac{۴}{۲} = ۲ \;\Rightarrow\; F_{GD} = ۵\times ۲ = ۱۰\,ton$$

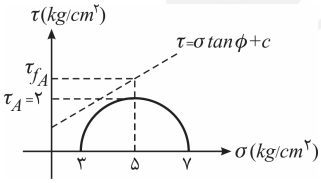
## مکانیک خاک و پی

**۶۶- (۲)**

ابتدا با استفاده از آزمایش برش مستقیم، پارامترهای مقاومت برشی خاک را براساس رابطهٔ مور-کولمب به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\tau_۱ = \sigma_۱\tan\phi + c\\ \tau_۲ = \sigma_۲\tan\phi + c\end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases}۲ = ۳\tan\phi + c\\ ۲/۶ = ۴\tan\phi + c\end{cases} \;\Rightarrow\; \tan\phi = ۰/۶\;,\; c = ۰/۲\,kg/cm^۲$$

حال مقادیر تنش‌های قائم و برشی را در صفحه‌ای که با زاویه $۴۵^\circ$ نسبت به افق از نقطهٔ $A$ می‌گذرد، محاسبه می‌کنیم:




$$\sigma_A = \left(\frac{\sigma_۱ + \sigma_۳}{۲}\right) + \left(\frac{\sigma_۱ - \sigma_۳}{۲}\right)\cos ۲\alpha = \left(\frac{۷+۳}{۲}\right) + \left(\frac{۷-۳}{۲}\right)\cos ۹۰ = ۵\,kg/cm^۲$$

$$\tau_A = \left(\frac{\sigma_۱ - \sigma_۳}{۲}\right)\sin ۲\alpha = \left(\frac{۷-۳}{۲}\right)\sin ۹۰ = ۲\,kg/cm^۲$$

و در نهایت ضریب اطمینان در مقابل گسیختگی برشی در صفحهٔ ۴۵ درجه را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$FS = \frac{\tau_{f_A}}{\tau_A} = \frac{\sigma_A\tan\phi + c}{\tau_A} = \frac{۵\times ۰/۶ + ۰/۲}{۲} = ۱/۶$$

**تذکر:** تنش‌های برشی و عمودی در صفحه مورد نظر را می‌توانستیم به‌راحتی از روی دایره مور مطابق شکل فوق به‌دست آوریم. در ضمن توجه کنید که دایرهٔ فوق مربوط به حالت گسیختگی نیست و خط مور - کولمب بر آن مماس نمی‌باشد.

**۶۷- (۱)**

تنش کل در نقطهٔ $A$ برابر است با:

$$\sigma_A = \gamma_{sat} H + \gamma_w H_w = ۲۰\times ۳/۴ + ۱۰\times ۰/۵ = ۷۳\ kN/m^۲$$

برای محاسبه فشار آب حفره‌ای در نقطهٔ $A$، باتوجه به سطح مبنای مشخص شده در شکل خواهیم داشت:

$$u_A = \gamma_w \left[\Delta H - (N_d)_A \Delta h - (h_z)_A\right] \quad , \quad \Delta h = \frac{\Delta H}{N_d} \quad , \quad (N_d)_A = A \ \text{تعداد افت‌ها تا}$$

حال با افزایش سطح آب در بالادست، $\Delta H$ جدید برابر خواهد شد با $\Delta H + x$، بنابراین فشار آب حفره‌ای در این حالت برابر است با:

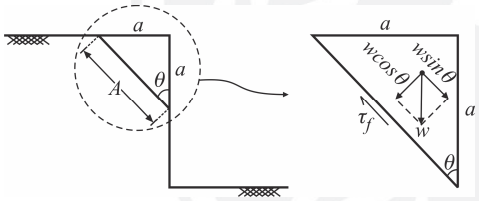
$$u_A = \gamma_w \left[(\Delta H + x) - (N_d)_A \left(\frac{\Delta H + x}{N_d}\right) - (h_z)_A\right]$$

$$= ۱۰\left[(\Delta H + x) - ۱۰\left(\frac{\Delta H + x}{۱۲}\right) - (-۳/۴ - ۰/۵)\right] = \frac{۱۰}{۶}x + ۴۵/۷$$

برای صفرشدن تنش مؤثر در نقطهٔ $A$، براساس اصل تنش مؤثر خواهیم داشت:

$$\sigma'_A = \sigma_A - u_A = ۰ \Rightarrow \sigma_A = u_A \Rightarrow ۷۳ = \frac{۱۰}{۶}x + ۴۵/۷ \Rightarrow x = ۱۶/۴m$$

**۶۸- (۴)**




$$\begin{cases} FS = \dfrac{\text{تنش برشی مقاوم حداکثر}}{\text{تنش برشی محرک}} = \dfrac{\tau_f}{\tau_d} = \dfrac{\sigma \tan\phi + c}{\tau_d} = \dfrac{\left(\dfrac{W\cos\theta}{A}\right)\tan\phi + c}{\left(\dfrac{W\sin\theta}{A}\right)} \\ W = \left(\dfrac{a\times a}{۲}\right)\gamma = ۰/۵a^۲\gamma \quad , \quad \theta = ۴۵ \quad , \quad A = \sqrt{۲}a \end{cases}$$

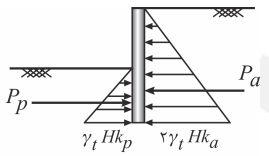
$\tau_f$: تنش برشی مقاوم حداکثر (مقاومت برشی) در سطح لغزش ناشی از اصطکاک و چسبندگی

$\tau_d$: تنش برشی محرک ناشی از مؤلفه $(W\sin\alpha)$ از وزن

$$\Rightarrow FS = \frac{\left(\dfrac{۰/۵a^۲\gamma\times\cos ۴۵}{\sqrt{۲}a}\right)\tan\phi + c}{\left(\dfrac{۰/۵a^۲\gamma\times\sin ۴۵}{\sqrt{۲}a}\right)} = \tan\phi + \frac{۴c}{\gamma a}$$

**۶۹- (۴)**

تنش‌ها و نیروهای وارد بر دیوار حائل در وضعیت موجود به صورت زیر می‌باشند:



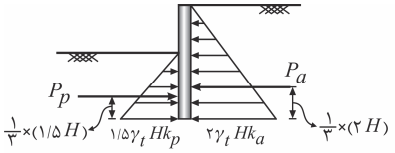

$$F_a = \frac{۱}{۲}K_a\gamma(۲H)^۲ = ۲K_a\gamma H^۲$$

$$F_p = \frac{۱}{۲}K_P\gamma(H)^۲ = \frac{۱}{۲}K_p\gamma H^۲$$

در صورت سؤال گفته شده که $F_a$ و $F_p$ باهم برابرند، بنابراین خواهیم داشت:

$$F_a = F_p \Rightarrow ۲K_a\gamma H^۲ = \frac{۱}{۲}K_p\gamma H^۲ \Rightarrow K_p = ۴K_a$$

حال با ۱/۵ برابر شدن ارتفاع خاک سمت چپ نسبت لنگر مقاوم به محرک نسبت به پایین دیوار را به‌دست می‌آوریم:




$$\frac{M_p}{M_a} = \frac{\frac{۱}{۲}K_p\gamma(۱/۵H)^۲\times\frac{۱/۵H}{۳}}{\frac{۱}{۲}K_a\gamma(۲H)^۲\times\frac{۲H}{۳}} = \left(\frac{K_p}{K_a}\right)\left(\frac{۲۷}{۶۴}\right) = (۴)\left(\frac{۲۷}{۶۴}\right) = \frac{۲۷}{۱۶}$$

**۷۰- (۳)**

تست ۱۰۷ سال ۸۷ را ملاحظه نمایید.

**۷۱- (۱)**

درصد تحکیم هر دو لایه از ٪۶۰ کمتر است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$T_v = \frac{\pi}{۴} U^۲$$

از طرفی می‌دانیم $T_v = \frac{C_v t}{H_{dr}^۲}$ است، بنابراین خواهیم داشت:

لایه اول از یک طرف زهکشی شده

$$\frac{\pi}{۴} U^۲ = \frac{C_v t}{H_{dr}^۲} \Rightarrow \frac{C_{v_۱}}{C_{v_۲}} = (\frac{U_۱}{U_۲})^۲ (\frac{H_{dr_۱}}{H_{dr_۲}})^۲ (\frac{t_۲}{t_۱}) = (\frac{۵۰}{۴۰})^۲ (\frac{۴}{۱۰ \times \frac{۱}{۲}})^۲ (\frac{۱۰}{۲۰}) = \frac{۱}{۲}$$

لایه از دو طرف زهکشی شده

**۷۲- (۴)**

با استفاده از روش اصلاحی ترزاقی (به‌کارگیری زمان اصلاح شده $t_m$ در محاسبه نشست)، بارگذاری تدریجی را می‌توان به بارگذاری آنی تبدیل کرد. در این حالت بایستی از زمان اصلاح شده $(t_m)$ در محاسبات تحکیم استفاده نمود.

در این سؤال چون منحنی زمان - نشست برای بارگذاری آنی ترسیم شده، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که زمان متناظر با هر درجهٔ تحکیم، زمان اصلاح شده $(t_m)$ می‌باشد. از این‌رو می‌نویسیم:

$$U = ۸۰٪ \xrightarrow{\text{نمودار}} t_m = ۲/۵ \text{ سال}$$

$$t_m = t - \frac{t_c}{۲} \; (t \geq t_c) \Rightarrow ۲/۵ = t - \frac{۳}{۲} \Rightarrow t = ۴ \text{ سال}$$

یعنی ۴ سال بعد از شروع بارگذاری و ۱ سال پس از اتمام بارگذاری، ٪۸۰ نشست نهایی لایه رسی انجام می‌شود.

**۷۳- (۳)**

در ابتدای تحکیم، تمام تنش جدید وارده به آب منتقل می‌شود و اضافه فشار آب حفره‌ای ماکزیمم بوده و برابر اضافه تنش وارده است ولی اضافه تنش مؤثر می‌نیمم و برابر صفر می‌باشد. به عبارت دیگر در ابتدای تحکیم فشار آب حفره‌ای به اندازه بار وارده افزایش می‌یابد و تنش مؤثر تغییر نمی‌کند.

**۷۴- (۲)**

$$\sigma_۱ = \sigma_۳ \tan^۲\theta + ۲c \tan\theta \quad , \quad c = ۰ \text{ (خاک ماسه‌ای)}$$

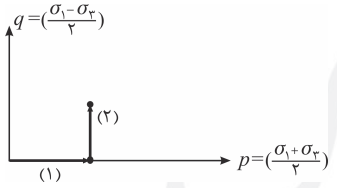
در آزمایش اول داریم:

$$(\sigma_۳ + \Delta\sigma_{d_۱}) = \sigma_۳ \tan^۲\theta \quad , \quad \Delta\sigma_{d_۱} = \sigma_۳ \Rightarrow (\sigma_۳ + \sigma_۳) = (\sigma_۳) \tan^۲\theta \Rightarrow \tan^۲\theta = ۲$$

در آزمایش دوم، باتوجه به یکسان بودن نوع خاک، $\theta$ همان مقدار آزمایش اول را خواهد داشت. بنابراین برای آزمایش دوم می‌توان نوشت:

$$(۲\sigma_۳ + \Delta\sigma_{d_۲}) = (۲\sigma_۳)(۲) \Rightarrow \Delta\sigma_{d_۲} = ۲\sigma_۳ = ۲\Delta\sigma_{d_۱}$$

**۷۵- (۳)**




اگر فرض کنیم، منظور طراح سؤال فضای $(p, q)$ بوده است، در آن‌صورت خواهیم داشت:

مرحله (۱) افزایش تنش همه‌جانبه تا مقدار $\sigma_۳$ را نشان می‌دهد که طی آن $\sigma_۱ = \sigma_۳$ و $q = ۰$ است.

در مرحله (۲) مقدار $p$ ثابت مانده است که نشان‌دهنده تغییرات مساوی و مخالف در تنش‌های $\sigma_۱$ و $\sigma_۳$ است:

$$\Delta p = ۰ \Rightarrow (\sigma_۱ + \Delta\sigma_۱) + (\sigma_۳ + \Delta\sigma_۳) = \sigma_۱ + \sigma_۳ \Rightarrow \Delta\sigma_۱ + \Delta\sigma_۳ = ۰ \Rightarrow \Delta\sigma_۱ = -\Delta\sigma_۳$$

بنابراین در صورتی که $\Delta p = ۰$ باشد، $\Delta\sigma_۱ = -\Delta\sigma_۳$ بوده و برای تغییرات $q$ داریم:

$$\Delta q = \frac{(\sigma_۱ + \Delta\sigma_۱) - (\sigma_۳ + \Delta\sigma_۳)}{۲} - \frac{\sigma_۱ - \sigma_۳}{۲} = \Delta\sigma_۱$$

**۷۶- (۴)**

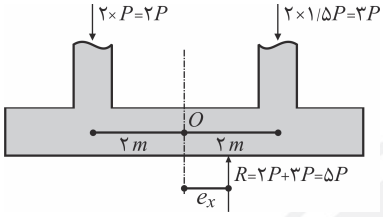
از آزمایش برش پره برای تعیین مقاومت برشی زهکشی نشدهٔ خاک‌های رسی نرم استفاده می‌شود. بنابراین می‌توان گفت این آزمایش میدانی (صحرایی)، نتایج به‌دست آمده از آزمایش $UU$ (تحکیم نیافته زهکشی نشده) را در اختیار ما قرار می‌دهد.

**۷۷- (۲)**

تست ۱۰۹ سال ۸۷ را ملاحظه نمایید.

**۷۸- (۲)**

درحالت اول بارگذاری متقارن است و خروج از مرکزیت کلی بارها صفر است، اما در حالت دوم با افزایش ۵۰ درصدی بار دو ستونِ سمت راست، خروج از مرکزیت ایجاد می‌شود. با نوشتن رابطهٔ تعادل لنگرها حول مرکز پی، مقدار این خروج از مرکزی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:




$$\sum M_o = ۰ \Rightarrow ۳P\times ۲ - ۵P\times e_x - ۲P\times ۲ = ۰ \Rightarrow e_x = \frac{۲}{۵} = ۰/۴\,m$$

حال با استفاده از روش هانسن برای محاسبه ظرفیت باربری پی‌های سطحی، خواهیم داشت:

$$\frac{(q_{ult})_۲}{(q_{ult})_۱} = \frac{۰/۵B_۲\gamma_۲N_{\gamma_۲}S_{\gamma_۲}}{۰/۵B_۱\gamma_۱N_{\gamma_۱}S_{\gamma_۱}} = \frac{B_۲S_{\gamma_۲}}{B_۱S_{\gamma_۱}}$$

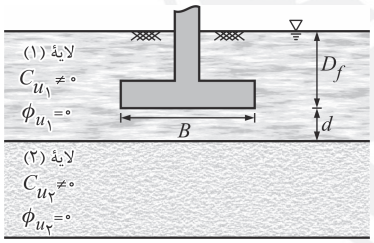
($\gamma$ و $N_\gamma$ به نوع خاک بستگی دارد و در هر دو حالت یکسان است)

اگر از ضریب شکل صرف‌نظر کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{(q_{ult})_۲}{(q_{ult})_۱} \simeq \dfrac{B_۲}{B_۱} = \dfrac{B'}{B} \\ B' = B - ۲e_x = ۶ - ۲\times ۰/۴ = ۵/۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{(q_{ult})_۲}{(q_{ult})_۱} = \frac{۵/۲}{۶} = \frac{۱۳}{۱۵}$$

**۷۹- (۳)**

اگر مطابق شکل زیر پی بر روی دو لایه خاک کاملاً چسبنده (شرایط $\phi = ۰$) قرار گیرد، در آن صورت ظرفیت باربری نهایی کوتاه‌مدت آن براساس ظرفیت باربری لایه اول تعیین می‌گردد ولی بستگی به مقدار نسبت مقاومت برشی زهکشی نشدهٔ دو خاک و همچنین نسبت $\frac{d}{B}$ دارد. برای یک نسبت $\frac{d}{B}$ ثابت می‌توان گفت:



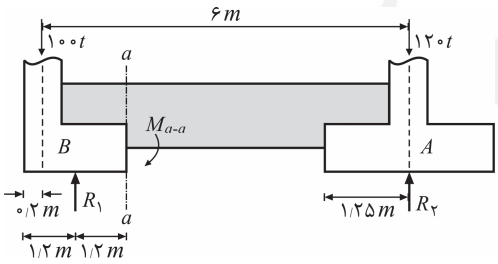

$$\begin{cases} \dfrac{C_{u_۲}}{C_{u_۱}} > ۱ \Rightarrow \text{ظرفیت باربری نهایی پی، بزرگتر از ظرفیت باربری لایهٔ اول است.} \\ \dfrac{C_{u_۲}}{C_{u_۱}} = ۱ \Rightarrow \text{یک لایه خاک داریم و ظرفیت باربری نهایی پی، برابر ظرفیت باربری لایهٔ اول است.} \\ \dfrac{C_{u_۲}}{C_{u_۱}} < ۱ \Rightarrow \text{ظرفیت باربری نهایی پی، کوچکتر از ظرفیت باربری لایهٔ اول است.} \end{cases}$$

در حل این سؤال داریم:

$$\frac{C_{u_۲}}{C_{u_۱}} = \frac{۰/۴}{۰/۶} = \frac{۲}{۳} < ۱ \Rightarrow \frac{q_۲}{q_۱} < ۱ \Rightarrow \text{گزینه (۳)}$$

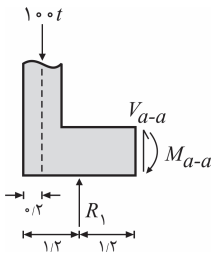
**۸۰- (۳)**

مطابق شکل مقابل عکس‌العمل وارده از جانب خاک به پی‌های سمت چپ و راست را با $R_۱$ و $R_۲$ نشان داده و با نوشتن روابط تعادل، آنها را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:



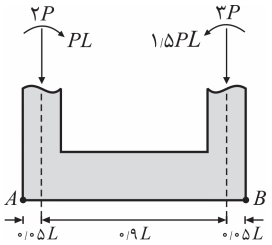

$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow ۱۰۰\times ۶ = R_۱\times(۶/۲ - ۱/۲) \Rightarrow R_۱ = ۱۲۰\,ton$$
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۱۰۰ + ۱۲۰ = ۱۲۰ + R_۲ \Rightarrow R_۲ = ۱۰۰\,ton$$

حال دیاگرام آزاد پی سمت چپ را رسم کرده و با نوشتن معادله تعادل لنگر برای این قطعه، مقدار لنگر در مقطع $(a-a)$ را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:




$$M_{a-a} = ۱۰۰\times ۲/۲ - ۱۲۰\times ۱/۲ = ۷۶\,ton.m$$

**۸۱- (۲)**



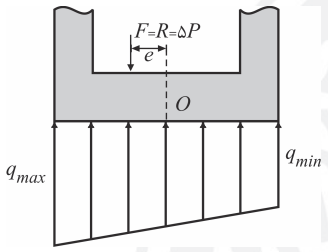

مطابق شکل مقابل عکس‌العمل وارده از جانب خاک به پی را با $R$ و خروج از مرکزیت آن را بـا $e$ نـشان داده و با استفاده از معادلات تعادل آنها را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow R = ۲P + ۳P = ۵P$$

$$\sum M_o = ۰ \Rightarrow PL - ۲P \times ۰/۴۵L + R \times e - ۱/۵PL + ۳P \times ۰/۴۵L = ۰$$

$$\Rightarrow e = \frac{۰/۰۵PL}{R} = \frac{۰/۰۵PL}{۵P} = ۰/۰۱L$$

پی نواری تحت بارگذاری فوق را می‌توان با پیِ شکل زیر معادل کرد. بدین صورت که نیروی $F$ به جای نیروهای $۲p$ و $۳p$ وارد می‌شود و خـروج از مرکزیت ایجاد شده نیز، نماینده ممان‌های $pL$ و $۱/۵pL$ است.

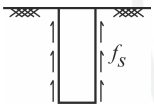



$$\begin{cases} q_{max} = \frac{F}{BL}(۱+\frac{۶e}{L}) = \frac{۵P}{\frac{L}{۲}\times L}(۱+\frac{۶\times ۰/۰۱L}{L}) = ۱۰/۶\frac{P}{L^۲} \\ q_{min} = \frac{F}{BL}(۱-\frac{۶e}{L}) = \frac{۵P}{\frac{L}{۲}\times L}(۱-\frac{۶\times ۰/۰۱L}{L}) = ۹/۴\frac{P}{L^۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_{max} - q_{min} = ۱۰/۶\frac{P}{L^۲} - ۹/۴\frac{P}{L^۲} = \frac{۱/۲P}{L^۲}$$

**۸۲- (۱)**

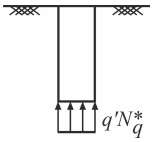
**الف:** مقاومت جانبی شمع:




$$Q_s = f_s A_s = (q' K \tan\delta)(\pi DH) \quad \text{و} \quad q' = \gamma_t H$$

$$\Rightarrow Q_s \propto DH^۲ \Rightarrow \frac{Q_{s_۲}}{Q_{s_۱}} = (\frac{D_۲}{D_۱})(\frac{H_۲}{H_۱})^۲ = (۲)\times(\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲}$$

**ب:** مقاومت انتهایی شمع:




$$Q_p = q' N_q^* A_p \quad , \quad q' = \gamma_t H \quad , \quad A_p = \frac{\pi}{۴}D^۲$$

$$\Rightarrow Q_p \propto HD^۲ \Rightarrow \frac{Q_{p_۲}}{Q_{p_۱}} = (\frac{H_۲}{H_۱})(\frac{D_۲}{D_۱})^۲ = (\frac{۱}{۲})\times(۲)^۲ = ۲$$

**۸۳- (۴)**

در خاکهای رسی چسبنده، ظرفیت به‌دست آمده از آزمایش بارگذاری صفحه با ظرفیت باربری واقعی خاک برابر است:

$$(q_u)_F = (q_u)_P = ۴۵۰\ kPa$$

**۸۴- (۱)**

اضافه تنش ایجاد شده در وسط لایه رسی، با استفاده از روش تقریبی (۲ به ۱) برابر است با:

$$\Delta\sigma' = \frac{P}{(B+z)^۲} = \frac{۸۰۰}{(B+۳)^۲}$$

همچنین برای محاسبه نشست تحکیمی با استفاده از ضریب تغییرحجم $(m_v)$ داریم:

$$\Delta H = H_\circ m_v \Delta\sigma' \Rightarrow ۷ = (۲۰۰)(۰/۷\times ۱۰^{-۳})(\Delta\sigma') \Rightarrow \Delta\sigma' = ۵۰\ kN/m^۲$$

$\Delta\sigma'$، ماکزیمم تنشی است که بایستی در وسط لایه رسی ایجاد شود و تنش‌های بیش‌تر از ایـن مقـدار، نشـست تحکیمـی را در وسـط لایـه رس از $۷cm$ بیشتر خواهد کرد. بر همین اساس حداقل بعد پی به‌صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\Delta\sigma'_{max} = \frac{۸۰۰}{(B_{min}+۳)^۲} \Rightarrow ۵۰ = \frac{۸۰۰}{(B_{min}+۳)^۲} \Rightarrow B_{min} = ۱m$$

**۸۵- (۴)**

در حالتی که نشست خاک اطراف شمع بیشتر از نشست شمع گردد، اصطکاک بین شمع و خاک باعث می‌شـود تـا خـاک اطـراف شـمع، شمع را به پایین (در جهت نشست خود) بکشد. بنابراین نیرویی در جهت پایین و به صورت اصطکاکی به شمع وارد مـی‌شـود کـه بـه آن پدیده اصطکاک منفی گویند. براین اساس می‌گوییم؛ اصطکاک منفی باعث می‌شود تا نیروی محوری شمع افزایش یافته و ظرفیت بـاربری محـوری (فشاری) آن کاهش یابد.

## مکانیک سیالات و هیدرولیک

**۸۶- (۲)**

پخش سیلاب در یک دشت، یک جریان غیردائمی است. از طرفی با توجه به هموار بودن دشت، می‌توان جریان را دو بعدی در نظر گرفت. همچنین در اغلب موارد، سیلاب یک جریان آشفته را ایجاد می‌کند.

**۸۷- (۴)**

همان‌طور که در تست (۱۱۸) از آزمون (۸۷) ملاحظه شد، برای جریان آرام، دائمی و تراکم‌ناپذیر سیال بین دو صفحهٔ موازی، پروفیل سرعت به صورت مقابل است:

$$u = u_t\left(\frac{y}{H}\right) - \frac{1}{2\mu}\frac{d(P+\gamma h)}{ds}(Hy - y^2)$$

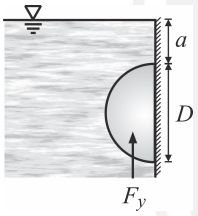
حال اگر توزیع فشار هیدرواستاتیکی باشد، $P+\gamma h$ ثابت بوده و پروفیل سرعت، خطی خواهد شد:

$$P+\gamma h = const \;\Rightarrow\; \frac{d(P+\gamma h)}{ds} = 0 \;\Rightarrow\; u = u_t\left(\frac{y}{H}\right)$$

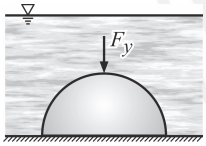
ایجاد شرایطی که باعث صفر شدن $\frac{d(P+\gamma h)}{ds}$ شود، در گزینهٔ (۴) آمده است:

$$\begin{cases} \text{صفحات افقی باشند} \Rightarrow \dfrac{dh}{ds} = 0 \\ \text{گرادیان فشار صفر باشد} \Rightarrow \dfrac{dP}{ds} = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma\frac{dh}{ds} + \frac{dP}{ds} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(\gamma h + P)}{ds} = 0 \;\Rightarrow\; \text{خطی شدن پروفیل سرعت}$$

**۸۸- (۱)**




اگر نیم‌کره را مطابق شکل مقابل به صورت قائم در نظر بگیریم ($\theta = 90°$)، نیروی قائم وارد بر آن (از طرف سیال) به سمت بالا خواهد بود.




حال اگر نیم‌کره را مطابق شکل به صورت افقی قرار دهیم ($\theta = 0°$)، نیروی وارد بر نیم‌کره (از طرف سیال) به سمت پایین است.

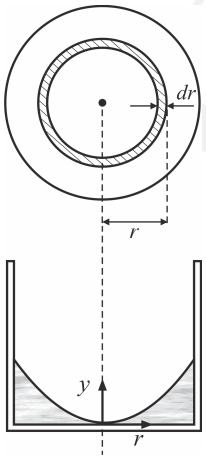
این نشان می‌دهد که با تغییرات $\theta$، جهت نیرو تغییر خواهد کرد. بنابراین در محدودهٔ بین $\theta = 0°$ و $\theta = 90°$، می‌توان زاویه‌ای را یافت که به ازاء آن نیروی قائم وارد بر نیم‌کره برابر با صفر باشد ($\theta^*$). به ازاء $\theta < \theta^*$، نیروی قائم وارد بر نیم‌کره به سمت پایین و به ازاء $\theta > \theta^*$، نیروی قائم به سمت بالا است.

**۸۹- (۱)**

**روش اول:** اگر ظرف سربسته نباشد، نیروی وارد بر کف ظرف برابر وزن مایع داخل ظرف خواهد بود. بنابراین در حل این مسئله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F = W = \gamma V \\ V = \frac{1}{2}\,(\text{حجم استوانهٔ محیط بر سهمی‌گون سطحِ مایع}) = \frac{1}{2}(\pi R^2 h_p) = \frac{1}{2}\left(\pi R^2 \times \frac{\omega_0^2 R^2}{2g}\right) = \frac{\pi R^4 \omega_0^2}{4g} \end{cases} \Rightarrow F = \gamma \times \frac{\pi R^4 \omega_0^2}{4g} = \frac{\rho \pi R^4 \omega_0^2}{4}$$

**روش دوم:**




کف ظرف را به صورت مجموعه‌ای از المان‌های حلقوی مطابق شکل روبرو در نظر می‌گیریم. در این حالت مساحت هر المان برابر است با:

$$dA = 2\pi r dr$$

فشار وارد بر هر یک از این المان‌ها که به فاصلهٔ $r$ از مرکز ظرف قرار گرفته‌اند، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(y = 0)\ \text{در کف ظرف} \Rightarrow P(r) = \rho\frac{\omega_0^2 r^2}{2}$$

بنابراین نیروی وارد بر این المان برابر خواهد بود با:

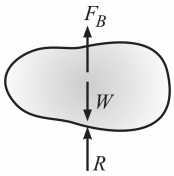
$$dF = P(r)dA = \rho\frac{\omega_0^2 r^2}{2} \times 2\pi r dr = \pi\rho\omega_0^2 r^3 dr$$

حال با انتگرال‌گیری روی کل سطح (کف)، خواهیم داشت:

$$F = \int_0^R dF = \int_0^R \pi\rho\omega_0^2 r^3 dr = \frac{\rho\pi R^4\omega_0^2}{4}$$

**۹۰- (۲)**

این تست مشابه تست ۱۱۵ از آزمون ۸۷ است. بنابراین با ترسیم دیاگرام آزاد جسم، به طریق مشابه می‌نویسیم:




حالت اول (سکون):

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_۱ = W - F_{B_۱} = \gamma_s V - \gamma_f V_d \xrightarrow{V_d = V} R_۱ = (\gamma_s - \gamma_f) V$$

حالت دوم (حرکت):

$$\begin{cases} \sum F_y = ma_y \Rightarrow R_۲ + F_{B_۲} - W = ma_y \Rightarrow R_۲ = W\left(۱ + \frac{a_y}{g}\right) - F_{B_۲} \\ F_B = \frac{\gamma_f V_d}{\cos\theta}\left(۱ + \frac{a_y}{g}\right) \xrightarrow{V_d = V} F_{B_۲} = \frac{\gamma_f V}{\cos\theta}\left(۱ + \frac{a_y}{g}\right) \\ a_x = ۰ \Rightarrow \theta = ۰ \Rightarrow \cos\theta = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_۲ = \gamma_s V\left(۱ + \frac{a_y}{g}\right) - \gamma_f V\left(۱ + \frac{a_y}{g}\right) = (\gamma_s - \gamma_f) V\left(۱ + \frac{a_y}{g}\right)$$

بنابراین نسبت $\frac{R_۲}{R_۱}$ برابر است با:

$$\frac{R_۲}{R_۱} = ۱ + \frac{a_y}{g} = ۱ + \frac{-\frac{g}{۳}}{g} = \frac{۲}{۳}$$

**۹۱- (۳)**

همان‌طور که در تست (۸۷) گفته شد، برای جریان آرام بین دو صفحهٔ موازی داریم:

$$u(y) = -\frac{۱}{۲\mu}\frac{dP}{ds}(Hy - y^۲) + U_t\frac{y}{H}$$

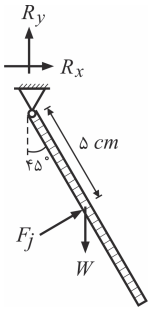
از طرفی تنش برشی در سیال برابر است با $\tau = \mu\frac{du}{dy}$، بنابراین با فرض ثابت بودن گرادیان فشار در امتداد قائم خواهیم داشت:

$$\tau = ۰ \Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{۱}{۲\mu}\times\left[۰ + \frac{dP}{ds}\times(H - ۲y)\right] + \frac{U_t}{H} = ۰ \Rightarrow \frac{dP}{ds}(H - ۲y) = \frac{۲\mu U_t}{H}$$

$$\Rightarrow H - ۲y = \frac{۲\mu U_t}{H \times \frac{dP}{ds}} \Rightarrow y = \frac{H}{۲} - \frac{\mu}{\frac{dP}{ds}}\frac{U_t}{H}$$

**۹۲- (۴)**

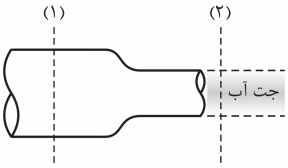
اگر نیروی ناشی از برخورد جت با صفحه را $F_j$ بنامیم، می‌توان مطابق شکل زیر، رابطهٔ تعادل نیروها را برای صفحه در نظر گرفت:




$$\sum M_O = ۰ \Rightarrow F_j \times ۵ = W \times ۵\sin ۴۵ \Rightarrow F_j = W\sin ۴۵$$

$$\begin{cases} F_j = \rho V_۲^۲ A_۲ \sin ۴۵ \\ W = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow ۱۰۰۰ \times V_۲^۲ \times ۰/۰۱ \sin ۴۵ = ۱۰ \sin ۴۵ \Rightarrow V_۲ = ۱\ m/s$$

حال با بکارگیری رابطه پیوستگی بین مقاطع (۱) و (۲) و نوشتن معادله برنولی بین نقاطع واقع بر محور مرکزی لوله در این دو مقطع، خواهیم داشت:



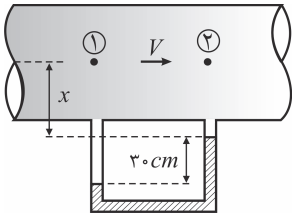

پیوستگی: $V_۱ A_۱ = V_۲ A_۲ \Rightarrow V_۱ = \frac{A_۲}{A_۱}V_۲ = \left(\frac{D_۲}{D_۱}\right)^۲ V_۲ = \left(\frac{D}{۲D}\right)^۲ \times ۱ = ۰/۲۵\ m/s$

برنولی: $\frac{P_۱}{\gamma} + \frac{V_۱^۲}{۲g} = \frac{P_۲}{\gamma} + \frac{V_۲^۲}{۲g} \xrightarrow{P_۲ = ۰} \frac{P_۱}{\gamma} + \frac{(۱)^۲}{۲۰} = \frac{(۰/۲۵)^۲}{۲۰} \Rightarrow P_۱ = \frac{۱۸۷۵}{۴}\ N/m^۲$

**۹۳- (۱)**

رابطهٔ داده شده، معادلهٔ برنولی است که برای جریان دائمی یک سیال ایده‌آل (تراکم‌ناپذیر و بدون اصطکاک) روی خط جریان مطرح شده و معتبر است.

**۹۴- (۳)**




رابطهٔ برنولی را بین نقاط (۱) و (۲) که درست بالای لولهٔ مانومتر قرار دارند، می‌نویسیم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+h_f \xrightarrow[V_1=V_2]{A=const} \frac{P_1-P_2}{\gamma}=h_f$$

حال با استفاده از رابطه مانومتری محاسبه فشار خواهیم داشت:

$$P_1+\gamma(x+0/3)-0/3\times 2\gamma-x\gamma=P_2 \Rightarrow \frac{P_1-P_2}{\gamma}=0/3\,m$$

و در نهایت به‌دست می‌آید:

$$\frac{P_1-P_2}{\gamma}=h_f=f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \Rightarrow 0/3=0/01\times\frac{6}{0/1}\times\frac{V^2}{2g} \Rightarrow V=\sqrt{g}\ m/s$$

**۹۵- (۲)**

در حالت اول، با توجه به موازی بودن لوله‌ها و یکسان بودن مشخصات آنها، دبی عبوری از هر سه لوله با هم برابر بوده و خواهیم داشت:

$$Q_1+Q_2+Q_3=Q$$

$$Q_1=Q_2=Q_3 \Rightarrow Q_1=Q_2=Q_3=\frac{Q}{3}$$

حال با استفاده از رابطهٔ دارسی ـ ویسباخ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} h_{f_1}=h=\dfrac{8fL(\frac{Q}{3})^2}{\pi^2 gD^5} \\ h_{f_2}=\dfrac{8fL(Q)^2}{\pi^2 g(2D)^5} \end{cases} \Rightarrow \frac{h}{h_{f_2}}=\frac{\frac{Q^2}{9}}{\frac{D^5}{Q^2}}=\frac{32}{9} \Rightarrow h_{f_2}=\frac{9}{32}h \Rightarrow h_2=\frac{9}{32}h$$

**توجه**: دبی کل در حالت اول با دبی در حالت دوم برابر بوده و آنها را با $Q$ نشان دادیم.

**۹۶- (۴)**

با بکارگیری تشابه فرود بین مدل و نمونه اصلی، می‌نویسیم:

$$(Fr)_m=(Fr)_p \Rightarrow \left(\frac{V}{\sqrt{gl}}\right)_m=\left(\frac{V}{\sqrt{gl}}\right)_p \Rightarrow V_r=\sqrt{L_r}$$

$$Q_r=L_r^2\times V_r=L_r^2\times\sqrt{L_r}=L_r^{2/5} \Rightarrow \frac{Q_m}{Q_p}=\left(\frac{H_m}{H_p}\right)^{2/5}=\left(\frac{1}{25}\right)^{2/5}=\frac{1}{5^5} \Rightarrow \frac{Q_m}{125}=\frac{1}{5^5} \Rightarrow Q_m=40\ lit/s$$

همچنین برای سرعت و ارتفاع آب در نقطهٔ موردنظر از نمونهٔ واقعی، داریم:

$$V_r=\sqrt{L_r} \Rightarrow \frac{V_m}{V_p}=\sqrt{\frac{y_m}{y_p}}=\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{0/2}{V_p}=\frac{1}{5} \Rightarrow V_p=1\ m/s$$

$$\frac{H_m}{H_p}=\frac{1}{25} \Rightarrow \frac{40\times 10^{-3}}{H_p}=\frac{1}{25} \Rightarrow H_p=1m$$

**۹۷- (۴)**

می‌دانیم اگر $\psi(x,y)$ تابع جریان باشد، داریم:

$$q_{B-A}=\psi_A-\psi_B$$

که $\psi_A$ و $\psi_B$، تابع جریان در نقاط $A$ و $B$ و $q_{B-A}$، دبی عبوری (از واحد عرض) بین این دو نقطه است. برای حل این سؤال بایستی $\psi(x,y)$ را بیابیم:

$$\begin{cases} \vec{V}=u\hat{i}+v\hat{j}=3\vec{i}+2\vec{j} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y}=-u \Rightarrow \dfrac{\partial\psi}{\partial y}=-3 \Rightarrow \psi=-3y+f(x) \Rightarrow \psi=-3y+2x+k \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}=+v=2=0+f'(x) \Rightarrow f(x)=2x+k \end{cases}$$

حال می‌توان دبی عبوری بین نقاط $A$ و $B$ را به دست آورد.

$$q_{B-A}=\psi_A-\psi_B=(-3\times 3+2\times 2+k)-(-3\times 5+2\times 1+k)=8\ \ m^3/s.m$$

**توجه**: به نظر می‌رسد منظور طراح، محاسبهٔ دبی حجمی $(q)$ بوده است نه دبی جرمی $(\dot{m})$. دبی جرمی در این سؤال برابر است با:

$$\dot{m}=\rho q=8\rho\ kgr/sec$$

**۹۸- (۳)**

در حل این تست، عمق بحرانی ( $y_c$ ) و عمق نرمال ( $y_\circ$ ) را محاسبه کرده و با عمق جریان ( $y$ ) مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_c = (\frac{q^۲}{g})^{\frac{۱}{۳}} = (\frac{۱}{۱۰})^{\frac{۱}{۳}} \simeq (\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۳}} = ۰/۵\, m \\ \text{کانال مستطیلی عریض}: q = \frac{۱}{n} y^{\frac{۵}{۳}} S^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۱ = \frac{۱}{۰/۰۲} \times y_\circ^{\frac{۵}{۳}} \times \sqrt{۰/۰۰۰۴} \Rightarrow y_\circ = ۱m \end{cases}$$

$\Rightarrow y_c < y < y_\circ \Rightarrow$ نیمرخ تشکیل شده $M_۲$ می‌باشد.

**۹۹- (۴)**

انرژی مخصوص در یک مقطع مثلثی (که $A = zy^۲$ می‌باشد) برابر است با:

$$E = y + \frac{V^۲}{۲g} = y + \frac{Q^۲}{۲gA^۲} = y + \frac{Q^۲}{۲gy^۴z^۲}$$

$$\frac{dE}{dy} = ۰ \Rightarrow ۱ + \frac{Q^۲}{۲gz^۲}(\frac{-۴}{y^۵}) = ۰ \Rightarrow y = (\frac{۲Q^۲}{gz^۲})^{\frac{۱}{۵}} = y_c$$

یعنی به‌ازای $y = y_c$ ، انرژی مخصوص مینیمم شده و $E_{min} = E_c$ است. از طرفی در کلیه مقاطع می‌توان $E_c$ را به صورت زیر به‌دست آورد:

$$E_c = y_c + \frac{۱}{۲} D_c \quad (D = \text{عمق هیدرولیکی})$$

پس در مقطع مثلثی که $D = \frac{y}{۲}$ است، خواهیم داشت:

$$E_{min} = E_c = y_c + \frac{۱}{۲}(\frac{y_c}{۲}) = \frac{۵}{۴} y_c$$

**۱۰۰- (۲)**

شیب بحرانی شیبی است که به ازاء آن، جریان وضعیت بحرانی داشته باشد ($Fr = ۱$)، لذا می‌نویسیم:

$$Fr = \frac{V_c}{\sqrt{g\, y_c}} = ۱ \Rightarrow V_c = \sqrt{g\, y_c}$$

حال با استفاده از رابطه شزی خواهیم داشت:

$$V = C\sqrt{RS} \xrightarrow[R \simeq y]{\text{کانال مستطیلی عریض}} \sqrt{g\, y_c} = C\sqrt{y_c S_c} \Rightarrow S_c = (\frac{\sqrt{g}}{C})^۲ = \frac{g}{C^۲}$$

**۱۰۱- (۲)**

در کانال مستطیلی نیروی مخصوص در واحد عرض کانال برابر است با:

$$f = \frac{F}{b} = \frac{q^۲}{g\, y} + \frac{y^۲}{۲}$$

که در حالت بحرانی، داریم:

$$f_c = \frac{q^۲}{g\, y_c} + \frac{y_c^۲}{۲} = y_c(\frac{q^۲}{g\, y_c^۲} + \frac{۱}{۲} y_c) = y_c \underbrace{(y_c + \frac{۱}{۲} y_c)}_{E_c} = E_c y_c$$

**توجه:** $\frac{q^۲}{g} = y_c^۳ \Leftarrow y_c = (\frac{q^۲}{g})^{\frac{۱}{۳}}$

**۱۰۲- (۳)**

عرض کانال ذوزنقه‌ای در حالت بهینه، برابر است با:

$$b_{opt} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} y \;,\; y = ۱/۵m \Rightarrow b_{opt} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \times ۱/۵ = \sqrt{۳}\, m = \frac{۳}{\sqrt{۳}}\, m$$

**۱۰۳- (۲)**

منظور از ظرفیت انتقال مقاطع، دبی آنها می‌باشد که با استفاده از رابطهٔ مانینگ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{\frac{1}{n_1}A_1R_1^{\frac{2}{3}}S_1^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{n_2}A_2R_2^{\frac{2}{3}}S_2^{\frac{1}{2}}}=\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{A_1R_1^{\frac{2}{3}}}{A_2R_2^{\frac{2}{3}}}\right)=k\,\frac{n_2}{n_1}$$

ضریب $k$ ، همان کسر داخل پرانتز می‌باشد که می‌توان آن را نیز محاسبه کرد:

$$A_1=(2a)^2=4a^2\ ,\ R_1=\frac{A_1}{P_1}=\frac{4a^2}{4\times 2a}=\frac{a}{2}$$

$$A_2=(2a)^2-\frac{a^2}{2}=\frac{7a^2}{2}\ ,\ R_2=\frac{A_2}{P_2}=\frac{\frac{7a^2}{2}}{(2a+2a+a+a)}=\frac{7a}{12}$$

$$\Rightarrow k=\frac{4a^2\times(\frac{a}{2})^{\frac{2}{3}}}{\frac{7a^2}{2}\times(\frac{7a}{12})^{\frac{2}{3}}}=\frac{8}{7}\times(\frac{6}{7})^{\frac{2}{3}}$$ (عددی ثابت است.)

**توجه:** از همان ابتدا می‌توانستیم گزینه صحیح را بدون محاسبه بیابیم. زیرا نسبت ظرفیت کانال‌ها $(\frac{Q_1}{Q_2})$ باید بدون بعد باشد و تنها عبارت داده شده در گزینه (۲) بدون بعد است!

**۱۰۴- (۲)**

ابتدا انرژی تلف شده را می‌یابیم:

$$E_j=\frac{(y_2-y_1)^3}{4y_1y_2}=\frac{(3-1)^3}{4\times 3\times 1}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}m$$

و از آنجا توان تلف شده برابر خواهد بود با:

$$P_j=\gamma E_jQ=10\times\frac{2}{3}\times 120=800\ kW$$

**۱۰۵- (۱)**

سرعت برشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u*=\sqrt{gRS}\ \Rightarrow\ \sqrt{RS}=\frac{u*}{\sqrt{g}}$$

از طرفی با استفاده از رابطهٔ شزی خواهیم داشت:

$$V=C\sqrt{RS}\ \Rightarrow V=C\times\frac{u*}{\sqrt{g}}$$

## سازه‌های فولادی و بتنی

**۱۰۶- (۳)**

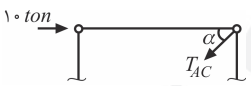
با توجه به مفاهیم روش طراحی $ASD$ ، می‌توان نوشت:

$$R-\Delta R\geq L+\Delta L\ \xrightarrow{\text{بدترین حالت}}\ R-0/2R=L+0/2L\ \Rightarrow\ 0/8R=1/2L$$

$$F.S.=\frac{R}{L}=\frac{1/2}{0/8}=\frac{3}{2}=1/5$$

**۱۰۷- (۲)**

نیروی محوری بادبند $AC$ عبارت است از:




$$\sum F_x=0\ \Rightarrow\ T_{AC}\cos\alpha=10\ \Rightarrow\ T_{AC}\times\frac{4}{5}=10\ \Rightarrow\ T_{AC}=12/5\,ton$$

در ادامه با توجه به کنترل گسیختگی، سطح‌مقطع ناخالص عبارت است از:

$$\frac{T_{AC}}{A'}\leq\frac{F_u}{F.S.}\ \Rightarrow\ \frac{12500}{A'}\leq\frac{5000}{2}\ \Rightarrow\ A'_{min}=5\,cm^2$$

و در نهایت سطح‌مقطع هر میلگرد عبارت است از:

$$A'=2A\times\left(1-\frac{37/5}{100}\right)\ \Rightarrow\ 5=2A\times 0/625\ \Rightarrow\ A=4cm^2$$

**تذکر:** در صورتی که بخواهیم تسلیم میلگرد را کنترل کنیم، داریم:

$$\frac{T_{AC}}{A_g}\leq\frac{F_y}{F.S.}$$

ضریب اطمینان در مقابل تسلیم معمولاً برابر ۱/۶۷ در نظر گرفته می‌شود ولی با توجه به اینکه در این تست این ضریب اطمینان در صورت تست داده نشده است، احتمالاً این کنترل مدنظر طراح نبوده است.

**۱۰۸- (۱)**

هر چه دوران انتهای $A$ سخت‌تر انجام شود، سختی دورانی عضو $AB$ بیشتر بوده و ضریب طول مؤثر ستون $BC$ کمتر می‌شود. در بین سه سازه، دوران $A$ در سازهٔ (۱) بیشتر از دو سازه دیگر بوده و در سازهٔ (۲) کمترین مقدار در بین سه سازه است.

سازهٔ (۳) حالتی بین سازهٔ (۱) و سازهٔ (۲) محسوب می‌شود و در مقایسهٔ ضریب طول موثر سه سازه می‌توان نوشت:

$$(AB \text{ سختی})_۲ > (AB \text{ سختی})_۳ > (AB \text{ سختی})_۱ \quad \Rightarrow \quad (K_{BC})_۱ > (K_{BC})_۳ > (K_{BC})_۲$$

**۱۰۹- (۱)**

در تیر ($A$) وضعیت انحنای مضاعف به وجود آمده و با توجه به مفاهیم کمانش پیچشی- جانبی، در بین سه گزینه کمترین احتمال رخ دادن کمانش پیچشی - جانبی را دارد. با محاسبهٔ ضریب $C_b$ نیز می‌توان این موضوع را نشان داد.

**۱۱۰- (۴)**

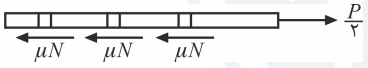
در مقاطع جعبه‌ای و فشرده، با تقارن دوبل، تمام محورها اصلی محسوب شده و با توجه به مفاهیم کمانش پیچشی- جانبی، کمانش پیچشی - جانبی حائز اهمیت نبوده و تقویت هر دو بال، به یک اندازه مقاومت خمشی تیر را افزایش می‌دهد.

**۱۱۱- (۳)**

با کمک سخت‌کنندهٔ عرضی، می‌توان مانع از کمانش برشی جان شد و همچنین مقاومت تیرورق در مقابل کمانش پیچشی - جانبی را افزایش داد. با کمک سخت‌کنندهٔ طولی می‌توان جلوی کمانش خمشی جان را گرفت. اما در تیر ورق، کمانش قائم جان به هیچ وجه نباید رخ دهد و مقدار $\frac{h}{t_w}$ به دست آمده از این نوع کمانش، به هیچ وجه قابل افزایش نمی‌باشد.

**۱۱۲- (۴)**

با بررسی تعادل ورق فوقانی می‌توان نوشت:

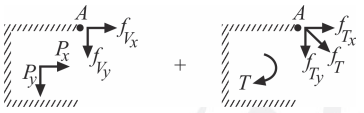



$$\text{در آستانهٔ لغزش}: \sum F_x = ۰ \Rightarrow \frac{P}{۲} = ۳\mu N$$

$$P_{max} = ۶\mu N = ۶ \times ۰/۳۳۳ \times ۱۴۰۰۰ = ۶ \times \frac{۱}{۳} \times ۱۴۰۰۰ = ۲۸۰۰۰\, kg = ۲۸\, ton$$

**۱۱۳- (۱)**

تنها در نقطهٔ $A$، تنش‌های $f_{T_x}$ و $f_{V_x}$ و همچنین تنش‌های $f_{T_y}$ و $f_{V_y}$ با یکدیگر هم‌جهت بوده و از طرفی این نقطه بیشترین فاصلهٔ را از مرکز سطح جوش‌ها داشته و بیشترین تنش‌های برشی ناشی از پیچش را دارد. بنابراین این نقطه از جوش، بحرانی‌ترین نقطه برای طراحی اتصال جوشی می‌باشد.




$$f_{V_x} = \frac{P_x}{A}\ ,\ f_{V_y} = \frac{P_y}{A}\ ,\ f_{T_x} = \frac{Ty}{J}\ ,\ f_{T_y} = \frac{Tx}{J}$$

**تذکر**: نیروی $P$ به مرکز سطح جوش‌ها منتقل شده است و این اتصال تحت اثر نیروی برشی و لنگر پیچشی قرار دارد.

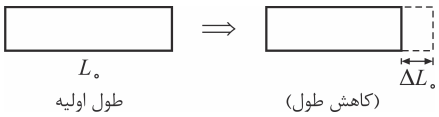
**۱۱۴- (۲)**

مقاومت برشی مقاطع از رابطه $V_r = ۰/۲\phi_c \sqrt{f_c}\, b_w\, d + \phi_s A_{sv} f_{yv} \frac{d}{S}$ محاسبه می‌شود. پارامترهای متغیر در مقطع در رابطهٔ بالا $b_w$، $A_{sv}$ و $S$ می‌باشند. با توجه به برابر بودن $b_w$ کل و $S$ برای خاموت‌ها، تنها $A_{sv}$ متفاوت است. این مساحت برای مقطع $A$ برابر ۲Φ ۱۲ و برای مقطع $B$ برابر ۳Φ ۱۰ می‌باشد که تقریباً با هم برابر می‌باشند. پس ظرفیت برشی مقاطع تقریباً برابر است.

$$(A_{sv})_A = ۲ \times \frac{\pi \times ۱۲^۲}{۴} = ۷۲\pi\, mm^۲\ ,\ (A_{sv})_B = ۳ \times \frac{\pi \times ۱۰^۲}{۴} = ۷۵\pi\, mm^۲$$

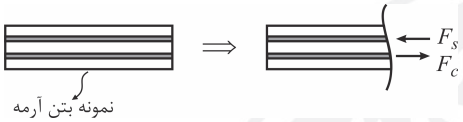
**۱۱۵- (۳)**

نمونهٔ بتنی و بدون میلگرد مقابل را در نظر بگیرید. بدون حضور میلگرد، بتن در اثر جمع‌شدگی می‌تواند جمع شود که کرنش آن برابر $\varepsilon_{sh} = ۲۰۰\times۱۰^{-۶}$ خواهد بود.




$$\Delta L_\circ = \varepsilon_{sh} L_\circ$$

حال اگر در نمونه میلگرد را قرار دهیم، مقطع کمتر جمع شده و تغییر طول نمونه دیگر برابر $\Delta L_\circ$ نخواهد بود. در این حالت میلگرد تحت فشار و بتن تحت کشش خواهد بود و می‌توان نوشت:




$$\text{معادله (۱)}: F_s = F_c \Rightarrow \sigma_s A_s = \sigma_c A_c \Rightarrow \frac{\sigma_s}{\sigma_c} = \frac{A_s}{A_c} = ۱۰۰ \qquad (۱)$$

با توجه به این که در مقطع، یک درصد فولاد موجود است، نسبت $\frac{A_s}{A_c}$ به طور تقریبی برابر ۱۰۰ خواهد بود (از مساحت آرماتورها در برابر مساحت کل صرف‌نظر شده و مساحت بتن برابر مساحت کل در نظر گرفته شده است). با توجه به نسبت به دست آمده برای تنش، تنها گزینهٔ (۳) صحیح خواهد بود. در ادامه برای تکمیل حل، مقادیر $\sigma_c$ و $\sigma_s$ را محاسبه می‌کنیم:

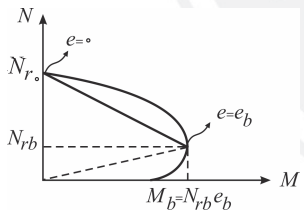
$$\text{معادله (۲)}: \Delta L = \Delta L_s \Rightarrow \Delta L_\circ - \frac{F_c L_\circ}{E_c A_c} = \frac{F_s L_\circ}{E_s A_s}$$

$$\varepsilon_{sh} L_\circ - \left(\frac{F_c}{A_c}\right)\frac{L_\circ}{E_c} = \left(\frac{F_s}{A_s}\right)\frac{L_\circ}{E_s}$$

$$\varepsilon_{sh} = \frac{\sigma_c}{E_c} + \frac{\sigma_s}{E_s} \Rightarrow \frac{\sigma_c}{۱۵\times۱۰^۳} + \frac{\sigma_s}{۲۰۰\times۱۰^۳} = ۲۰۰\times۱۰^{-۶} \qquad (۲)$$

از حل هم‌زمان معادلات (۱) و (۲)، گزینهٔ (۳) به‌دست می‌آید.

**۱۱۶- (۴)**




ناحیه کنترل فشار، ناحیه بالایی در نمودار اندرکنش ستون است که یک سر آن نقطهٔ فشار خالص با خروج از مرکزیت صفر و سر دیگر آن نقطه بالانس ستون با خروج از محوری $e_b$ است. با جایگذاری $e$ برای این دو نقطه در گزینه‌ها، تنها گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد.

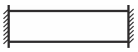
$$N_r = \frac{N_{r\circ}}{۱+\left(\frac{N_{r\circ}}{N_{rb}}-۱\right)\frac{e}{e_b}} \begin{cases} e = \circ \Rightarrow N_r = N_{r\circ} \\ e = e_b \Rightarrow N_r = N_{rb} \end{cases}$$

**۱۱۷- (۳)**

در اغلب آئین‌نامه‌ها رابطه‌ای به‌صورت $k_t = \sum \frac{۹E_{cs}C}{L_۲(۱-\frac{c_۲}{L_۲})^۳}$ برای محاسبه سختی اعضای پیچشی متعامد بر قاب معادل ارائه شده است. در حالتی که دال دارای تیر در بین تکیه‌گاه‌ها بوده و بنابراین در امتداد قاب معادل تیر وجود داشته باشد، برای در نظر گرفتن لنگر مستقیم ناشی از تیر، سختی اعضای پیچشی قاب معادل با ضرب نسبت $\frac{I_{sb}}{I_s}$ در رابطهٔ بالا تعدیل می‌شود.

**۱۱۸- (۲)**

با توجه به این که $\alpha$ برای فولاد و بتن برابر است، در اثر تغییر درجه حرارت هر دو با هم تغییر طول داده و تنش‌های به‌وجود آمده در آنها به دلیل تفاوت در مدول یانگ مصالح، متفاوت خواهد بود. ترک‌خوردگی در بتن هنگامی ایجاد می‌شود که تنش به مقاومت کششی بتن برسد.




$$\Delta L = \circ \Rightarrow \frac{F_c L_c}{E_c A_c} - \alpha L_c \Delta T = \circ \Rightarrow \sigma_c = \frac{F_c}{A_c} = E_c \alpha \Delta T$$

و شرط ترک خوردن قطعهٔ بتنی عبارت است از:

$$\sigma_c = f_t \Rightarrow f_t = E_c \alpha \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{f_t}{E_c \alpha} = \frac{۲}{(۱۶\times۱۰^۳)\times(۱۰\times۱۰^{-۶})} = ۱۲/۵^\circ C$$

**۱۱۹- (۱)**

درصد فولاد متوازن در مقاطع مستطیلی از رابطهٔ $0.85\beta_1 \frac{\phi_c}{\phi_s}\frac{f_c}{f_y}\frac{600}{600+f_y}$ به‌دست می‌آید که تنها تابع خصوصیات مصالح به‌کار رفته می‌باشد و مستقل از هندسه مقطع $(b\ ,d)$ است. بنابراین برای دو مقطع داده شده، $\rho_b$ برابر است.

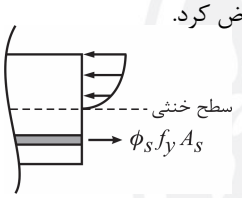
**۱۲۰- (۲)**

بر اساس رابطهٔ طول مهاری $L_d = \frac{f_y\, d_b}{4u}$، با استفاده از آرماتورهای با $f_y$ کمتر می‌توان $L_d$ را کاهش داد. توجه کنید که استفاده از بتن با مقاومت فشاری کمتر، $u$ را کاهش می‌دهد که باعث افزایش طول مهاری مورد نیاز می‌شود. همچنین استفاده از قلاب برای فولادهای فشاری مؤثر نمی‌باشد.

**۱۲۱- (۲)**

در صورتی که تیر با فولاد حداقل طرح شده باشد $(\rho = \rho_{min})$، پس از تسلیم فولادهای کششی، انحنا به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد، بدون این که افزایش قابل توجهی در میزان لنگر ایجاد شود.

به عبارتی در این حالت، مدت زمان کوتاهی پس از ترک خوردگی، فولادها جاری شده و با توجه به ثابت بودن نیروی ناحیهٔ کششی و فشاری، افزایش لنگر قابل تحمل مقطع تنها به خاطر افزایش بازوی لنگر بوده که چندان زیاد نمی‌باشد و می‌توان لنگر را ثابت فرض کرد.




$\Rightarrow$ با افزایش لنگر، محور خنثی کمی به سمت بالا می‌رود

## راهسازی و روسازی راه

**۱۲۲- (۳)**

با استفاده از مفهوم شیب می‌توان نوشت:

$$\text{شیب} = \frac{\Delta h}{L} \Rightarrow 0.08 = \frac{5}{L} \Rightarrow L = 62.5\ m$$

حال باید این طول روی زمین را به کمک مقیاس به طول روی نقشه تبدیل کنیم:

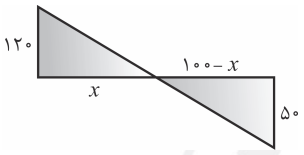
$$\text{مقیاس} = \frac{\text{طول روی نقشه}}{\text{طول روی زمین}} \Rightarrow \frac{1}{5000} = \frac{L'}{62.5} \Rightarrow L' = 0.0125\ m = 1.25\ cm$$

**۱۲۳- (۱)**

ابتدا حجم خاکبرداری را محاسبه می‌کنیم:

$$V_C = \frac{C_1+C_2}{2}\times L = \frac{120+80}{2}\times 100 = 10000\ m^3$$

حال حجم خاکریزی را به‌دست می‌آوریم:




$$\frac{x}{120} = \frac{100-x}{50} \Rightarrow 5x = 1200 - 12x$$

$$\Rightarrow 17x = 1200 \Rightarrow x = 70.6\ m$$

$$\Rightarrow V_f = \frac{50\times(100-70.6)}{2} = 735\ m^3$$

**۱۲۴- (۲)**

$$\alpha = \Delta - 2\theta_s \le 0 \Rightarrow 2\theta_s \ge \Delta$$

البته طراحی اصولی قوس کلوتوئید مرکب دوبل در حالت $2\theta_s = \Delta$ صورت می‌گیرد.

**۱۲۵- (۳)**

از رابطه زیر مقدار $e$ را محاسبه می‌کنیم:

$$R_{min} = \frac{V^2}{127(e+f)} \Rightarrow e = \frac{V^2}{127R} - f \Rightarrow e = \frac{80^2}{127(240)} - 0.14$$

$$e = 0.069 = 7\%$$

**۱۲۶- (۴)**

طول قوس قائم برابر است با:

$$L = KA = ۵۰ \times \left| ۸ - (-۴) \right| = ۶۰۰\ m$$

**۱۲۷- (۳)**

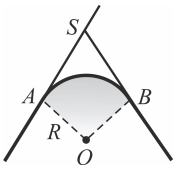
از رابطه درجه قوس می‌توان دریافت که:

$$\text{افزایش} \uparrow D = \frac{۵۷۳}{R \downarrow \text{کاهش}}$$

با افزایش درجه قوس، شعاع قوس کاهش می‌یابد.

**۱۲۸- (۴)**

زاویه انحراف قوس برابر با زاویه مرکزی قوس می‌باشد.




$$\Delta = ۹۰^\circ$$
$$KM_S = ۱۰۰۰\ m$$
$$R = ۴۰۰\ m$$
$$KM_B = ?$$

با توجه به رابطه کیلومتراژ بین ابتدا، انتها و رأس قوس به‌دست می‌آید:

$$KM_A = KM_S - T$$
$$KM_B = KM_A + L$$
$$L = R\Delta \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۴۰۰ \times ۹۰ \times \frac{۳/۱۴}{۱۸۰} = ۶۲۸\ m$$
$$T = R\ tan\frac{\Delta}{۲} \Rightarrow T = R = ۴۰۰\ m$$
$$KM_A = ۱۰۰۰ - ۴۰۰ = ۶۰۰\ m$$
$$KM_B = ۶۰۰ + ۶۲۸ = ۱۲۲۸ = ۱ + ۲۲۸\ m$$

**۱۲۹- (۲)**

کرنش قائم سطح سابگرید را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\varepsilon_{zi} = \frac{۱}{E_i}(\sigma_{zi} - \sigma_{ri})$$
$$\varepsilon_{zi} = \frac{۱}{۱۰ \times ۱۰^۶}(۴۰ \times ۱۰^۳ - (-۱۰ \times ۱۰^۳))$$
$$\varepsilon_{zi} = +۵ \times ۱۰^{-۳}$$

که چون علامت کرنش مثبت است، فشاری خواهد بود.

**۱۳۰- (۳)**

$$SN = \frac{۱}{۲/۵}(a_۱ m_۱ D_۱ + a_۲ m_۲ D_۲ + a_۳ m_۳ D_۳)$$
$$۴/۵ = \frac{۱}{۲/۵}(۰/۴۵ \times ۱ \times ۱۴ + ۰/۱۵ \times ۰/۹ \times ۱۵ + ۰/۱ \times ۰/۸ \times D_۳) \Rightarrow D_۳ = ۳۶/۵ \simeq ۳۷\ cm$$

**۱۳۱- (۲)**

آزمایش $CBR$ از دو مرحله اصلی تشکیل می‌شود. در مرحله اول نمونه را اشباع می‌کنند (معمولاً به مدت ۹۶ ساعت) تا وضعیت خاک یا مصالح را در بدترین شرایط (بیش‌ترین قابلیت اطمینان) اندازه‌گیری کرده باشند. سپس نمونه بارگذاری می‌شود که قسمت اصلی آزمایش است. چه در مرحله اشباع شدن و چه در مرحله بارگذاری، می‌توان از سربار نیز استفاده کرد. استفاده از سربار برای خاک‌های ریزدانه در مرحله اشباع کردن نمونه اهمیت دارد و در مرحله بارگذاری بی‌اهمیت است. در مورد خاک‌های درشت‌دانه استفاده از سربار در مرحله اشباع کردن بی‌اهمیت است، در حالی که در مرحله بارگذاری اهمیت دارد. در مورد این تست چون خاک بستر رسی (ریزدانه) است، باید از داده‌های مربوط به نمونه اشباع شده در حضور سربار استفاده کنیم.

$$CBR = max\left\{\frac{P_{۲/۵}}{P_{s_{۲/۵}}} \times ۱۰۰\ ,\ \frac{P_۵}{P_{s_۵}} \times ۱۰۰\right\}$$
$$CBR = max\left\{\frac{۳/۵}{۷۰} \times ۱۰۰\ ,\ \frac{۱۰/۵}{۱۰۵} \times ۱۰۰\right\} = ۱۰$$
$$CBR = ۱۰$$

**۱۳۲- (۳)**

$$SN = \frac{۱}{۲/۵}(a_۱ m_۱ D_۱ + a_۲ m_۲ D_۲ + a_۳ m_۳ D_۳ + a_۴ m_۴ D_۴)$$

$$۴ = \frac{۱}{۲/۵}(۰/۴D_۱ + ۰/۲۲\times۱۵ + ۰/۱\times۱۵ + ۰/۰۸\times۱۵)$$

$$۰/۴D_۱ = ۴ \Rightarrow D_۱ = ۱۰\,cm$$

**۱۳۳- (۲)**

$$M = \frac{d\log P}{dt} = \frac{\log ۸۰۰ - \log P}{T_{RB} - t} = \frac{۱}{۵۰}\left(\frac{۲۰ - PI}{۱۰ + PI}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\log ۸۰۰ - \log ۱۵}{۹۰ - ۳۰} = \frac{۱}{۵۰}\left(\frac{۲۰ - PI}{۱۰ + PI}\right)$$

$$\Rightarrow PI = ۲/۲ \simeq ۲$$

**۱۳۴- (۴)**

با توجه به آزمایش مارشال درصد فضای خالی مصالح سنگی با افزایش درصد وزنی قیر در ابتدا کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابد.

**۱۳۵- (۱)**

هر قدر آب و هوای منطقه‌ای گرم‌تر و میزان آمد و شد در آن منطقه بیشتر باشد، باید از قیر با درجه نفوذ کمتری برای راهسازی استفاده شود.