تمرین 47: معادلهٔ $x^2 = x\sin x + \cos x$ چند جواب دارد؟ (عمران - 88)

1) دقیقاً یک جواب دارد.
2) جوابی ندارد.
3) بیش از دو جواب دارد.
4) دقیقاً دو جواب دارد.

حل: ابتدا تابع $f(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$$

با توجه به اینکه توابع چندجمله‌ای و مثلثاتی پیوسته‌اند، می‌توان گفت که تابع $f(x)$ نیز پیوسته است.

$$f'(x) = 2x - \cancel{\sin x} - x\cos x + \cancel{\sin x} = x\underbrace{(2-\cos x)}_{\text{همواره مثبت}}$$

در این رابطه چون $\cos x$ همواره کوچکتر یا مساوی یک است، پس عبارت $2-\cos x$ همواره مثبت بوده و همانطور که مشاهده می‌کنید، علامت $f'(x)$ به علامت x وابسته است. در بازهٔ $(0,+\infty)$، $f'(x)$ همواره مثبت و در بازهٔ $(-\infty,0)$، همواره منفی است و می‌توانیم در دو حالت جداگانه مانند تمرین قبل، تعداد ریشه‌های معادلهٔ داده شده را تحلیل کنیم:

حالت اول: اگر x مثبت باشد $(0,+\infty)$:

$$0 < x < +\infty:\ f'(x) = \underbrace{\boxed{x}}_{0<}\ \underbrace{\boxed{(2-\cos x)}}_{>0} \Rightarrow f'(x) > 0$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ اکیداً صعودی است f $\Rightarrow$ تابع $f(x)$ در این بازه حداکثر یک ریشهٔ مثبت دارد (1)

در ادامه علامت تابع $f(x)$ را در دو سر این بازه (یعنی $0 < x < +\infty$) تعیین می‌کنیم. وقتی x به سمت بی‌نهایت میل کند تابع $f(x)$ با x^2 هم‌ارز است، بنابراین داریم:

$$f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f(+\infty) = +\infty,\ f(0) = -1 \Rightarrow \underbrace{f(0)}_{\text{منفی}}\ \underbrace{f(+\infty)}_{\text{مثبت}} < 0 \quad (2)$$

با استفاده از قضیهٔ بولتزانو می‌توان گفت که $f(x)$ در بازهٔ $(0,+\infty)$، حداقل یک ریشه دارد.

A: از (1) و (2) می‌توان نتیجه گرفت، $f(x)$ در بازهٔ $(0,+\infty)$ دقیقاً یک ریشه دارد.

حالت دوم: اگر x منفی باشد $(-\infty,0)$:

$$-\infty < x < 0 \Rightarrow f'(x) = \underbrace{\boxed{x}}_{0>}\ \underbrace{\boxed{(2-\cos x)}}_{>0} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$$ اکیداً نزولی است $f(x)$

(3) حداکثر یک ریشهٔ منفی دارد.

پس $f(x)$ در این بازه حداکثر یک ریشه منفی دارد و در ادامه مشابه با حالت قبل داریم:

$$\begin{cases} f(x) \overset{x\to-\infty}{\sim} x^2 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-\infty) = +\infty \Rightarrow \underbrace{f(0)}_{\text{منفی}}\ \underbrace{f(-\infty)}_{\text{مثبت}} < 0$$

$\xrightarrow{\text{از قضیهٔ بولتزانو}}$ حداقل یک ریشه دارد $(-\infty,0)$ در بازهٔ $f(x)$ (4)

B: از (3) و (4) می‌توان نتیجه گرفت که f در بازهٔ $(-\infty,0)$ دقیقاً یک ریشه دارد.

در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که تابع $f(x)$ در کل $\mathbb{R}$ دقیقاً دو ریشه دارد و گزینهٔ (4) صحیح است.