بسم الله الرحمن الرحیم

به‌نام یکتا مهندس هستی...

مقدمه و راهنمای مطالعهٔ این کتاب:

ده سال پیش در یکی از دانشگاه‌های آمریکا، آزمایشی بسیار جالب و تاریخی انجام شد. در این آزمایش یک آکواریوم بسیار بزرگ ساختند و با قراردادن یک دیوار شیشه‌ای در وسط آکواریوم، آن را به دو بخش تقسیم کردند. در یک بخش از آن یک ماهی گوشتخوار بزرگ و در بخش دیگر آن ماهی‌های کوچکی را قرار دادند که غذای ماهی گوشتخوار محسوب می‌شوند. ماهی گوشتخوار بزرگ بارها و بارها به‌سوی ماهی‌های کوچک حمله می‌کرد ولی هر بار با دیوار شیشه‌ای نامرئی برخورد می‌کرد و به غذای مورد علاقه‌اش نمی‌رسید و ... .
پس از چند روز تلاش، ماهی شکارچی دیگر به سمت ماهی‌های کوچک حمله نمی‌کرد و باور کرده بود که رفتن به آن سوی آکواریوم، محال و غیرممکن است.
اما در پایان آزمایش، روانشناسان دیوار شیشه‌ای نامرئی را برداشتند و نکته جالب این بود که ماهی بزرگ، دیگر به سمت ماهی‌های کوچک حمله نکرد و ... . آیا می‌دانید چرا؟
بله اگرچه دیوار شیشه‌ای دیگر وجود نداشت، اما ماهی بزرگ در ذهنش دیواری ساخته بود که از دیوار واقعی سخت‌تر و بلندتر بود؛ دیوار بلند باور، باوری از جنس محدودیت، باوری از جنس ناتوانی. اگر ما در میان اعتقادات و باورهای خودمان جستجو کنیم، بی‌تردید دیوارهای شیشه‌ای بلند و سختی را خواهیم یافت که نتیجه مشاهدات و تجربیات ماست و بسیاری از آنها وجود خارجی ندارد. نمونه‌ای بارز از این موضوع، باور اکثر دانشجویان به سخت بودن درس ریاضی (۲) در کنکور کارشناسی ارشد است. ما در این کتاب، تصمیم گرفته‌ایم که به شما عزیزان ثابت کنیم که این درس اولاً بسیار قابل فهم و منظم است و ثانیاً پتانسیل بسیار بالایی برای کسب درصدهای خوب و تغییر در سرنوشت آزمون کارشناسی ارشد شما را دارد. به همین منظور با دیدگاهی جدید به این درس پرداخته و بهترین، مطمئن‌ترین و جذاب‌ترین منبع را برای شما عزیزان تولید کرده‌ایم. با اطمینان به شما قول می‌دهیم که با مطالعه کتاب ریاضی (۲)، اولاً از یادگیری آن لذت می‌برید و ثانیاً با کمترین زمان، بهترین نتیجه ممکن را در آن کسب می‌کنید.
نگاه منفی بسیاری از دانشجویان به ریاضی (۲)، به‌دلیل برخورد با مسائل سه بعدی در این درس می‌باشد. در این کتاب که در حدود یک سال نگارش آن زمان برده است، با عشق و علاقه کلیه مراجع و منابع جدید این درس را که در بهترین دانشگاه‌های دنیا تدریس می‌شوند، در کنار تجربیات خود قرار دادیم و تلاش کردیم تا نشان دهیم که مفاهیم ریاضی (۲) در صورت بیان درست، بسیار قابل درک و جذاب می‌باشند. برای استفاده هر چه بهتر از این کتاب، به موارد بیان شده توجه کنید:
۱ در اولین قدم برای بهتر شدن روند یادگیری شما عزیزان، هر فصل را به چند قسمت کوچکتر تقسیم کرده‌ایم تا هم تفکیک مطالب در ذهن شما بهتر انجام شود و هم از مطالعه یک فصل طولانی خسته نشوید. همچنین به‌عنوان یک پیشنهاد در هر بار مطالعه، یک قسمت از هر فصل را به‌خوبی بخوانید.

۲ برای چیدمان تمرین‌ها ساعت‌ها فکر کرده‌ایم و تمرین‌ها را با یک روند آموزشی بسیار منظم آورده‌ایم. همچنین در لابه‌لای تمرین‌ها مطالبی از قبیل کمی خلاقیت، کمی دقت و ... گنجانده‌ایم تا شما را به ریاضی علاقه‌مندتر کنیم.

۳ در دومین قدم، پس از مطالعه دقیق درسنامه‌های هر فصل، بخشی تحت عنوان افزایش مهارت و تسلط بیشتر را در کتاب قرار دادیم که با مطالعه دقیق آن، به جرأت می‌توان گفت هیچ تست استانداردی باقی نمی‌ماند که ایده اصلی آن برای شما آشنا نباشد.

۴ در قدم بعد بخش جذاب توصیه‌نامه را در کتاب قرار داده‌ایم تا بعد از مطالعه کامل هر فصل، یک‌بار دیگر نکات مهم و کاربردی آن را با هم مرور کنیم.

۵ اگر موارد فوق را به‌خوبی انجام دهید، قادر خواهید بود که خودآزمایی‌های هر فصل را خودتان حل کنید. پاسخ تشریحی این خودآزمایی‌ها را می‌توانید در سایت www.serieomomi.com مشاهده نمایید.

۶ تجربه نشان داده است، کسانی‌که ریاضی را با این شیوه نوین یاد می‌گیرند، قادر خواهند بود آن را با کیفیت خوبی تدریس کنند. از اینرو صمیمانه از شما تقاضا داریم بعد از مطالعه این کتاب، مباحث جدیدی که یاد گرفته‌اید را به دوستان خود نیز بیاموزید تا این مفاهیم در سراسر این مرز و بوم، حتی دورترین و محروم‌ترین نقاط کشور نیز انتشار یابد.

در این قسمت ابتدا از خانواده‌های صبورمان که در تمامی مراحل تهیه این کتاب پا به پای ما، فشار این کار را تحمل کردند، نهایت تشکر و قدردانی را داریم. در ادامه از دوست ارجمند، دکتر محمد آهنگر که در لحظه لحظه تألیف این کتاب ما را یاری کرده و از نظرات ارزشمندشان بهره بردیم، تشکر می‌کنیم. لازم است از جناب آقای دکتر شریفیان مدیریت محترم انتشارات، که تمام امکانات لازم جهت هر چه با کیفیت‌تر شدن این پروژه را در اختیار ما گذاشته‌اند و همچنین از ویراستار علمی این اثر، جناب آقای دکتر مجید فرقانی که اینک در خارج از مرزهای کشور عزیزمان ایران به سر برده و مشغول افتخارآفرینی هستند، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشیم.

علیرغم تلاش‌های فراوانی که برای بازبینی این کتاب شده است، وجود اشکال در آن غیرممکن نبوده و از اساتید گرانقدر و دانشجویان عزیز تقاضا می‌شود، پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق ایمیل seriomran@yahoo.com مطرح نمایند.

محمد صادق معتقدی - مسعود مهدیان - عباس تاجیک

فهرست

سری عمومی ارشد

فصل ششم:

انتگرال دوگانه

مروری بر آنچه خواهیم خواند:

در ریاضی (۱) با مفهوم انتگرال آشنا شدیم. در این فصل می‌خواهیم آن مفاهیم را به انتگرال دوگانه تعمیم دهیم و با استفاده از ویژگی‌های انتگرال دوگانه به حل مسائل بپردازیم. برای این منظور بحث را ابتدا با انتگرال‌گیری روی ناحیه مستطیلی شروع می‌کنیم و سپس آن را به نواحی کلی‌تر تعمیم می‌دهیم. دسته‌بندی دقیق این فصل باعث شده که دانشجویان با مطالعهٔ آن دیگر در حل انتگرال دوگانه مشکل خاصی نداشته باشند.

برای درک بهتر شما عزیزان این فصل را مطابق نمودار زیر آموزش می‌دهیم:

انتگرال دوگانه ←

- A - انتگرال دوگانه روی مستطیل
- B - انتگرال دوگانه روی نواحی کلی‌تر
- C - انتگرال دوگانه توابع چند ضابطه‌ای
- D - محاسبه انتگرال‌های دوگانه با تغییرمتغیر قطبی
- E - روش کلی تغییرمتغیر در حل انتگرال دوگانه
- F - بررسی بیشتر انتگرال دوگانه

A-۱- مفاهیم اولیه

در این فصل می‌خواهیم انتگرال‌های دوگانه را حل کنیم، این انتگرال‌ها به فرم کلی زیر مشاهده می‌شوند:

فرم کلی انتگرال دوگانه : $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$

در ادامه با حل یک تمرین سادهٔ آموزشی می‌خواهیم مفهوم پارامترهای dA و R را به شما عزیزان یاد دهیم:

تمرین ۱: انتگرال دوگانه $\int_1^2\int_1^3 x^2y\,dx\,dy$ را با فرم کلی انتگرال دوگانه مقایسه کنید.

حل: در مورد این انتگرال به موارد زیر توجه کنید:

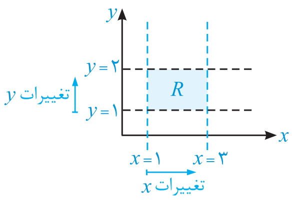
۱) از مقایسه‌ی انتگرال داده شده با فرم کلی، مشخص است که $dx\,dy$ همان dA می‌باشد.

۲) ناحیهٔ R در این انتگرال به صورت اعداد روی انتگرال‌ها نشان داده شده است که بازهٔ ۱ تا ۳، تغییرات x (متغیر مربوط به اولین المان یعنی dx) و بازهٔ ۱ تا ۲، تغییرات y (متغیر مربوط به دومین المان یعنی dy) را نشان می‌دهد.

$$\int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}}\int_{\boxed{1}}^{\boxed{3}} x^2y\,\boxed{dx}\,\boxed{dy}$$

در واقع اعداد نشان داده شده در بالا، همان کران‌های انتگرال هستند.

۳) با توجه به بازه‌های فوق، ناحیهٔ R یک مستطیل به صورت زیر است:



بنابراین انتگرال‌هایی که دارای کران‌هایی به‌صورت عدد ثابت هستند را انتگرال روی ناحیهٔ مستطیلی می‌نامیم.

۴) ترتیب آمدن $dx\,dy$ یعنی ابتدا با فرض ثابت بودن y باید از تابع تحت انتگرال نسبت به x (متغیر مربوط به المان اول) انتگرال بگیریم:

$$\int_1^2\int_1^3 x^2y\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_1^3 x^2y\,dx\right)dy = \int_1^2 \left(y\int_1^3 x^2\,dx\right)dy$$

$$= \int_1^2 y\left(\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3\right)dy = \int_1^2 y\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)dy = \frac{26}{3}\int_1^2 y\,dy$$

۵) در نهایت حاصل انتگرال به‌دست آمده را نسبت به y (متغیر مربوط به المان دوم) محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{26}{3}\int_1^2 y\,dy = \frac{26}{3}\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^2\right) = \frac{26}{3}\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right) = \frac{26}{3}\times\frac{3}{2} = 13$$

نتایج کاربردی

از حل این تمرین آموزشی می‌خواهیم نتایج ساده و کاربردی بگیریم که در این فصل از آنها استفاده می‌شود:

۱) همانطور که مشاهده کردیم ترتیب آمدن $dx\,dy$ یعنی ابتدا باید با فرض ثابت بودن y، از تابع تحت انتگرال نسبت به x انتگرال بگیریم.

۲) احتمالاً حدس می‌زنید که اگر $dy\,dx$ در انتگرال ظاهر شود، ابتدا باید با فرض ثابت بودن x، از تابع تحت انتگرال نسبت به y انتگرال بگیریم.

۳) به‌طور کلی در مثال‌هایی که کران‌های انتگرال دوگانه اعداد ثابتی هستند، ناحیهٔ R یک مستطیل است که این موضوع را در این قسمت به‌طور کامل بررسی می‌کنیم.

۴) در این فصل، دانستن تکنیک‌های انتگرال‌گیری که آنها را در فصل پنجم ریاضی (۱) بررسی کردیم، ضروری است.

در ادامه با بررسی مثال‌های متنوع مهارت شما را در این قسمت افزایش می‌دهیم.

A-۲- بررسی چند مثال متنوع

تمرین ۲: حاصل انتگرال‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $\int_{۰}^{۳}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} x^{۲}\cos y\,dy\,dx$ (ژئوفیزیک – ۸۲) ۲) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{۳} x^{۲}\cos y\,dx\,dy$

حل:

۱- با مشاهدهٔ $dy\,dx$ در انتگرال داده شده می‌توان فهمید ابتدا باید x را ثابت فرض کرده و از تابع تحت انتگرال نسبت به y انتگرال بگیریم:

$$\int_{۰}^{۳}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} x^{۲}\cos y\;dy\,dx=\int_{۰}^{۳}\left(x^{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos y\;dy\right)dx$$

$$=\int_{۰}^{۳}\left(x^{۲}\sin y\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\right)dx=\int_{۰}^{۳}x^{۲}\Big(\overset{۱}{\sin\frac{\pi}{۲}}-\overset{۰}{\sin ۰}\Big)dx=\int_{۰}^{۳}x^{۲}dx$$

در ادامه نسبت به x انتگرال می‌گیریم $\Rightarrow \int_{۰}^{۳}x^{۲}dx=\frac{x^{۳}}{۳}\Big|_{۰}^{۳}=۹$

۲- به‌طور مشابه، با مشاهدهٔ $dx\,dy$ ابتدا y را ثابت فرض کرده و از تابع تحت انتگرال نسبت به x انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{۳} x^{۲}\cos y\;dx\,dy=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\left(\cos y\int_{۰}^{۳}x^{۲}dx\right)dy$$

$$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\left(\cos y\left(\frac{x^{۳}}{۳}\Big|_{۰}^{۳}\right)\right)dy=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos y\left(\frac{۳^{۳}}{۳}-۰\right)dy=۹\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos y\,dy$$

در ادامه نسبت به y انتگرال می‌گیریم $\Rightarrow ۹\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos y\,dy=۹\times\sin y\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=۹\Big(\overset{۱}{\sin\frac{\pi}{۲}}-\overset{۰}{\sin ۰}\Big)=۹$

نتیجه مهم

با توجه به تمرین صفحهٔ قبل، می‌توان فهمید که در انتگرال‌هایی که بازه‌های انتگرال ثابت هستند، اینکه ابتدا نسبت به y انتگرال بگیریم و یا اینکه اول نسبت به x انتگرال بگیریم، در پاسخ نهایی انتگرال تأثیری ندارد.
این موضوع به بیان ریاضی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

جالب است بدانید که این نتیجه مهم در ریاضیات به افتخار گوئیدو فوبینی ریاضیدان ایتالیایی به قضیهٔ فوبینی معروف است.

تمرین ۳: اگر ناحیهٔ D به‌صورت $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}$ باشد، حاصل انتگرال دوگانهٔ $\iint_D (x-3y^2)\,dA$ کدام است؟ (هسته‌ای - ۸۱)

۱) -6 ۲) 6 ۳) 12 ۴) -12

● **حل:** برای حل این انتگرال دوگانه، ابتدا ناحیهٔ D را بر روی کران‌های انتگرال نشان می‌دهیم:

$$\iint_D (x-3y^2)dA=\int_0^2\int_1^2(x-3y^2)\,dy\,dx$$

در ادامه با فرض ثابت بودن x، نسبت به y انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^2(xy-y^3)\Big|_{y=1}^{y=2}dx=\int_0^2((\underbrace{2x-8}_{y=2})-(\underbrace{x-1}_{y=1}))dx=\int_0^2(x-7)dx=(\frac{x^2}{2}-7x)\Big|_0^2=-12$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

کمی تمرین: به عنوان تمرین بیشتر، حاصل $\int_1^2\int_0^2(x-3y^2)dx\,dy$ را خودتان به دست آورید و آن را با پاسخ فوق مقایسه کنید.

تمرین ۴: حاصل انتگرال دوگانهٔ $\int_1^2\int_0^\pi y\sin(xy)\,dy\,dx$ برابر است با: (علوم کامپیوتر - ۸۲)

۱) صفر ۲) π ۳) 2π ۴) $-\frac{3}{2}$

● **حل:**

روش اول: برای محاسبهٔ حاصل انتگرال دوگانهٔ مورد نظر، ابتدا انتگرال درونی یعنی $\int_0^\pi y\sin(xy)dy$ را به کمک تعمیم روش جزء به جزء حل می‌کنیم:

علامت	مشتق	انتگرال
+	y	$\sin(xy)$
−	۱	$\frac{-1}{x}\cos(xy)$
+	۰	$\frac{-1}{x^2}\sin(xy)$

$$\int_1^2\underbrace{\int_0^\pi y\sin(xy)\,dy}_{\text{انتگرال درونی}}\,dx$$

$$\Rightarrow\int_0^\pi y\sin(xy)\,dy=(\frac{-y}{x}\cos(xy)+\frac{1}{x^2}\sin(xy))\Big|_{y=0}^{y=\pi}$$

$$=-\frac{\pi}{x}\cos(\pi x)+\frac{1}{x^2}\sin(\pi x)-0$$

بنابراین حاصل انتگرال دوگانه برابر است با:

$$\int_{1}^{2}\int_{0}^{\pi} y\sin(xy)\,dy\,dx=\int_{1}^{2}\Big(\overbrace{\frac{-\pi}{x}\cos(\pi x)}^{\text{قسمت اول}}+\overbrace{\frac{1}{x^{2}}\sin(\pi x)}^{\text{قسمت دوم}}\Big)dx \qquad (I)$$

در ادامه با کمک روش جزء به جزء حاصل انتگرال قسمت اول را به دست می‌آوریم:

$$\text{قسمت اول}:\int -\frac{\pi}{x}\cos(\pi x)\,dx$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{-1}{x}\xrightarrow{\text{مشتق}} du=\dfrac{dx}{x^{2}}\\[2mm] dv=\pi\cos(\pi x)dx\xrightarrow{\text{انتگرال}} v=\sin\pi x\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\text{روش جزء به جزء}:\int u\,dv=uv-\int v\,du\;\Rightarrow\;\int\Big(-\frac{\pi}{x}\cos(\pi x)\Big)dx=\frac{-\sin(\pi x)}{x}-\overbrace{\int\frac{\sin(\pi x)}{x^{2}}dx}^{\text{قسمت دوم انتگرال}}$$

در ادامه اگر عبارت قرار گرفته در کادر آبی را به سمت چپ ببریم، داریم:

$$\overbrace{\int\Big(-\frac{\pi}{x}\cos(\pi x)\Big)dx}^{\text{قسمت اول انتگرال}}+\overbrace{\int\frac{\sin(\pi x)}{x^{2}}dx}^{\text{قسمت دوم انتگرال}}=-\frac{\sin(\pi x)}{x}\qquad (II)$$

و در نهایت با توجه به (I) و (II) می‌توان نوشت:

$$\int_{1}^{2}\int_{0}^{\pi} y\sin(xy)\,dy\,dx=\left[-\frac{\sin(\pi x)}{x}\right]_{1}^{2}=-\frac{\sin 2\pi}{2}+\sin\pi=0 \qquad \text{(گزینهٔ ۱)}$$

توصیه: همانطور که مشاهده کردید در این سؤال، شروع انتگرال‌گیری نسبت به y باعث شد که حل سؤال نسبتاً طولانی شود. هرگاه با چنین روندی در کنکور روبرو شدید، توصیه می‌شود که انتگرال‌گیری نسبت به x (متغیر دیگر) را امتحان کنید که این موضوع را در روش دوم توضیح داده‌ایم.

روش دوم: در این تمرین اگر ترتیب انتگرال‌گیری را تغییر دهیم، حاصل انتگرال به راحتی به‌دست می‌آید:

$$\int_{1}^{2}\int_{0}^{\pi} y\sin(xy)\,dy\,dx=\int_{0}^{\pi}\Big(\int_{1}^{2} y\sin(xy)\,dx\Big)dy$$

$$=\int_{0}^{\pi}\Big(\underbrace{y}_{\text{مانند عدد ثابت است و بیرون می‌آید } y}\int_{1}^{2}\sin(xy)\,dx\Big)dy=\int_{0}^{\pi}\Big(y\times\frac{-1}{y}\cos(xy)\Big|_{x=1}^{x=2}\Big)dy$$

$$=\int_{0}^{\pi}-(\cos 2y-\cos y)\,dy=\int_{0}^{\pi}(\cos y-\cos 2y)\,dy=\Big(\sin y-\frac{1}{2}\sin 2y\Big)\Big|_{0}^{\pi}=0$$

یادآوری: $\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax\;\Rightarrow\;\int\sin(yx)\,dx=-\frac{1}{y}\cos(xy)$

بررسی یک موضوع پرکاربرد

فرض کنید تابع $f(x,y)$ یک تابع تفکیک‌پذیر است و می‌توان آن را به صورت زیر نشان داد:

$$f(x,y)=g(x)\,h(y)$$

مثال ساده: $f(x,y)=e^{x+3y}=\underbrace{e^{x}}_{g(x)}\,\underbrace{e^{3y}}_{h(y)}$

در این موارد اگر حاصل انتگرال دوگانهٔ تابع را روی ناحیهٔ مستطیلی $[a,b]\times[c,d]$ بخواهند، می‌توان انتگرال دوگانه را به صورت حاصل‌ضرب دو انتگرال یگانه نوشت:

$$\int_a^b \int_c^d \underbrace{f(x,y)}_{g(x)\,h(y)}\,dy\,dx=\int_a^b g(x)\,dx\times\int_c^d h(y)\,dy$$

به عنوان مثال در انتگرال زیر داریم:

$$\overbrace{\int_0^1\int_0^3}^{\text{حدود انتگرال اعداد ثابت هستند}} \underbrace{e^{x+3y}}_{\text{تابع تحت انتگرال تفکیک‌پذیر است}}\,dy\,dx=\int_0^1 e^{x}\,dx\times\int_0^3 e^{3y}\,dy$$

$$=\left(e^{x}\Big|_0^1\right)\left(\frac{1}{3}e^{3y}\Big|_0^3\right)=(e^{1}-e^{0})\times\frac{1}{3}(e^{9}-e^{0})=\frac{1}{3}(e-1)(e^{9}-1)$$

تمرین ۵: مقدار $\iint\limits_R \frac{x}{1+y^2}\,dx\,dy$ که در آن $R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2\,,\,0\le y\le 1\}$ برابر است با: (فلسفه علم – ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi^2}{2}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

حل: با توجه به تفکیک‌پذیر بودن تابع تحت انتگرال و همچنین ثابت بودن حدود انتگرال (ناحیه R یک مستطیل است)، آن را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\iint\limits_R \frac{x}{1+y^2}\,dx\,dy \xlongequal{\text{ناحیه } R} \underbrace{\int_0^1\int_0^2}_{\text{حدود انتگرال اعداد ثابت هستند.}} \underbrace{\frac{x}{1+y^2}}_{\text{تابع تحت انتگرال تفکیک‌پذیر است.}}\,dx\,dy=\left(\int_0^2 x\,dx\right)\left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right)\left(\tan^{-1}y\Big|_0^1\right)=\left(\frac{4}{2}-\frac{0}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{2}$$ (گزینهٔ ۲)

کمی توجه

از ریاضی (۱) به خاطر داریم که اگر تابع $f(x)$ فرد باشد، حاصل $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ برابر با صفر است. مشابه همین بحث در انتگرال دوگانه با کران‌های ثابت نیز داریم. در واقع، اگر تابع تحت انتگرال نسبت به x فرد بوده و در ناحیه‌ای که روی آن انتگرال می‌گیریم، $-a<x<a$ باشد، حاصل انتگرال دوگانه برابر با صفر است.

$f(-x,y)=-f(x,y)$ (شرط فرد بودن تابع نسبت به x)

$$\xrightarrow{\text{مثال برای درک بهتر}} \int_0^1\int_{-3}^{3} y^4\sin(y^2x^3)\,dx\,dy=0$$

بررسی فرد بودن تابع تحت انتگرال نسبت به x:

$$\begin{cases} f(x,y) = y^4 \sin(y^2 x^3) \\ f(-x,y) = y^4 \sin(y^2(-x)^3) = -y^4 \sin(y^2 x^3) \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(-x,y) = -f(x,y)}$$

تابع نسبت به x فرد است.

اگر بخواهید انتگرال فوق را حل کنید، متوجه می‌شوید که امکان حل آن وجود ندارد. بنابراین توصیه ما به شما عزیزان این است که در حل انتگرال‌های دوگانه هنگامی‌که بازهٔ متقارن را مشاهده کردید، ابتدا فرد بودن تابع تحت انتگرال را بررسی کنید تا در صورت امکان، از این نکته بهره‌مند شوید.

تمرین ۶: مقدار انتگرال $\iint_R (x^3y^3 + xy^2)\,dx\,dy$ که در آن R مستطیل $-1 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 1$ می‌باشد، کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ (ریاضی ـ ۸۷)

● حل: ابتدا انتگرال را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} \underbrace{\boxed{(x^3y^3 + xy^2)}}_{f(x,y)}\, dy\, dx$$

با توجه به متقارن بودن بازه نسبت به x، بد نیست که ابتدا فرد بودن تابع نسبت به x را بررسی کنیم:

$$f(-x,y) = (-x)^3y^3 + (-x)y^2 = -x^3y^3 - xy^2 = -(x^3y^3 + xy^2) = -f(x,y)$$

همانطورکه مشاهده می‌کنید تابع f نسبت به x فرد است و بنابراین حاصل انتگرال برابر با صفر می‌باشد.

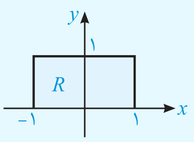
$$\underbrace{\boxed{\int_{-1}^{1}}}_{\text{بازه انتگرال‌گیری نسبت به } x \text{ متقارن است.}} \int_{0}^{1} \underbrace{\boxed{(x^3y^3 + xy^2)}}_{\text{نسبت به } x \text{ فرد}}\, dy\, dx = 0$$

(گزینهٔ ۱)

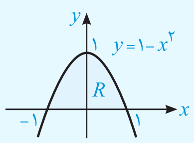
درک بهتر

در تمرین قبل در واقع تابع نسبت به x فرد و ناحیه نسبت به محور y متقارن بود.

شکل ناحیه R:



این نکته قابل تعمیم به ناحیه‌های غیر مستطیلی نیز می‌باشد. به‌طور مثال اگر ناحیه R به‌صورت زیر نیز باشد، مجدداً حاصل انتگرال زیر برابر با صفر است:



$$\Rightarrow \iint_R (x^3y^3 + xy^2)\,dx\,dy = 0$$

همانطورکه مشاهده می‌کنید معادلهٔ ناحیهٔ فوق نسبت به x زوج است، یعنی اگر در آن x را به $-x$ تبدیل کنیم، معادلهٔ ناحیه هیچ تغییری نمی‌کند. به بیان کلی‌تر می‌توان گفت، اگر تابع تحت انتگرال نسبت به یکی از متغیرهای x یا y فرد و ناحیهٔ انتگرال‌گیری نسبت به همان متغیر زوج باشد، حاصل انتگرال برابر با صفر است.

تمرین ۷: حاصل انتگرال $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} e^{x^2}\sin(\pi x^2 y)\,dx\,dy$ را به‌دست آورید. (عمران – آزاد ۸۰)

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{5}e^{25}$ ۴) $\frac{\pi}{25}(e^{25}-1)$

حل: همانطورکه مشاهده می‌کنید، انتگرال بسیار دشواری به‌نظر می‌رسد و احتمالاً نکتهٔ خاصی در حل آن وجود دارد. با توجه به زوج بودن معادلهٔ ناحیه نسبت به x و y، بد نیست فرد بودن تابع تحت انتگرال را نسبت به x و y کنترل کنیم:

$$f(x,y)=e^{x^2}\sin(\pi x^2 y)$$

$$f(x,-y)=e^{x^2}\sin(\pi x^2(-y))=-e^{x^2}\sin(\pi x^2 y)=-f(x,y) \Rightarrow$$ تابع نسبت به y فرد است

از آنجاکه تابع نسبت به y فرد و معادله ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به y زوج است، حاصل انتگرال برابر با صفر است و در نتیجه گزینهٔ (۱) صحیح است.

کمی تمرین: به‌عنوان تمرین خودتان کنترل کنید که تابع نسبت به x فرد نیست.

سوالات خودآزمایی فصل ششم

۱- اگر D ناحیه $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 1$ باشد، مقدار انتگرال دوگانه $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$ کدام است؟ (مدیریت نساجی - ۹۳)

۱) $\ln 2$ ۲) $\ln\frac{7}{3}$ ۳) $\ln\frac{5}{3}$ ۴) $\ln\frac{4}{3}$

۲- اگر D ناحیه محصور بین خطوط $x=0$، $y=\pi$ و $y=x$ باشد، مقدار $\iint_D \cos(x+y)\,dxdy$ کدام است؟ (معدن - ۹۳)

۱) 2 ۲) 1 ۳) -1 ۴) -2

۳- مقدار انتگرال $\iint_D (1-2x-3y)\,dxdy$ کدام است؟ (که در آن D ناحیه $x^2+y^2 \le 4$ می‌باشد.) (نقشه‌برداری - ۹۳)

۱) 0 ۲) π ۳) 2π ۴) 4π

۴- مقدار انتگرال $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{1}{x^4+1}$ برابر کدام مقدار زیر است؟ (MBA - ۹۳)

۱) $\frac{\ln 2}{8}$ ۲) $\frac{\ln 2}{4}$ ۳) $\frac{\ln 2}{2}$ ۴) $\ln 2$

۵- انتگرال دوگانه تابع $f(x,y)=\frac{\sin x}{x}$ در ناحیه محصور به خطهای $y-x=0$، $y+x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) $\frac{\pi}{2}$ (مواد - ۸۴)

۶- انتگرال دوگانه $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$ برابر است با: (فلسفه علم - ۸۴)

۱) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$ ۲) $2\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

۳) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$ ۴) $2\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

۷- حاصل $\iint_R x^2y^2\,dA$ وقتی R ناحیه محدود به خطوط معادله‌های $y=1$، $y=2$، $x=0$ و $x=y$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{7}{5}$ (ژئوفیزیک - ۸۴)

۸- با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری در عبارت $\int_0^1 \int_0^{x\frac{2}{3}} f(x,y)dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)dy\,dx$ کدام گزینه به‌دست می‌آید؟ (معدن - ۹۳)

۱) $\int_0^2 \int_{y\frac{3}{2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$ ۲) $\int_0^1 \int_{y\frac{3}{2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

۳) $\int_0^2 \int_{y\frac{3}{2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$ ۴) $\int_0^1 \int_{y\frac{3}{2}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

۹- اگر $F(x)=\int_0^{\tan x} \left(\int_1^t \sqrt{u^5+1}\,du\right)dt$ باشد، آنگاه $F''(0)$ کدام است؟ (علوم دریایی - ۹۰)

۱) صفر ۲) 1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 2

۱۰- مقدار $\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx$ که در آن D ناحیهٔ محدود به خطوط $y=x$ ، $x=1$ و $y=0$ می‌باشد، کدام است؟ (فیزیک دریا – ۹۳)

۱) $e-1$ ۲) $\frac{e-1}{2}$ ۳) $e+1$ ۴) $\frac{e+1}{2}$

۱۱- مقدار انتگرال $\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx$ برابر با چیست؟ (راهنمایی: می‌توانید از تغییرمتغیر $u=x+y$ و $v=y-2x$ استفاده کنید.) (عمران نقشه‌برداری – ۸۶)

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۲- اگر D ناحیه درون قرص دایره $x^2+y^2\le 1$ باشد، آنگاه مقدار $\iint_D (2-x^3-3y^5)dA$ کدام است؟ (مواد – ۹۱)

۱) -6π ۲) $+4\pi$ ۳) -2π ۴) 2π

۱۳- اگر R ناحیه‌ای در ربع اول محدود به دایرهٔ $x^2+y^2=1$ و خط $x+y=1$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_R y\,dA$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{10}{3}$ (ریاضی – ۹۰)

۱۴- اگر $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0\,,\,y\ge 0\,,\,x^2+y^2\le\pi\}$ ، مقدار انتگرال دوگانهٔ $\iint_D xy\,[\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2-y^2)]\,dxdy$ کدام است؟ (ژئوفیزیک – ۹۳)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۵- مقدار انتگرال دوگانهٔ $\iint_R \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$ روی ناحیهٔ $R=\{(x,y)\,|\,\frac{\pi^2}{16}\le x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{9}\}$ کدام است؟

۱) $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\pi(\sqrt{2}+1)$ ۳) $\pi(\sqrt{2}-1)$ ۴) $\pi(\frac{\sqrt{2}+1}{2})$ (ژئوفیزیک – ۹۳)

۱۶- حاصل $\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3 \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\,dxdy$ کدام است؟ (ریاضی – ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}(e^2+\frac{1}{e})$ ۲) $\frac{1}{2}(e^3-\frac{1}{e})$ ۳) $\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e^2})$ ۴) $\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e^2})$

۱۷- مقدار $\iint_A e^{-2x-3y}\,dxdy$ که در آن $A=\{(x,y):x\ge 0\,,\,y\ge 0\}$ کدام است؟ (آمار – ۸۶)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) 1 ۳) 6 ۴) ∞

۱۸- حاصل $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\phi(x,y)\,dy$ با کدام گزینه برابر است؟ (ژئوفیزیک – ۸۰)

۱) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\phi(x,y)\,dx$ ۲) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}\phi(x,y)\,dx$

۳) $\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\phi(x,y)\,dx$ ۴) $\int_0^1 dy\int_0^{y}\phi(x,y)\,dx$

۴۷- مقدار انتگرال $\int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\; dx\, dy$ کدام است؟ (ریاضی - ۸۸)

۱) $\sqrt{2}-1$ ۲) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ ۳) $\sqrt{2}+1$ ۴) $\frac{4\sqrt{2}+1}{3}$

۴۸- مساحت ناحیه محدود به نمودار معادله $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ کدام است؟ (آمار - ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۹- مساحت قسمتی از رویه $z = x^2 - y^2$ که در داخل استوانه $x^2 + y^2 = 4$ قرار دارد، کدام است؟ (ریاضی - ۸۶)

۱) $\frac{3\pi}{2}(\sqrt{17}-1)$ ۲) $\frac{7\pi}{6}(\sqrt{17}-1)$ ۳) $\frac{17\pi}{6}(\sqrt{17}-1)$ ۴) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$

۵۰- مساحت ناحیهٔ محصور به نمودار منحنی $(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}} + (\frac{y}{a})^{\frac{2}{3}} = 1$ برابر است با: (فیزیک دریا - ۹۳)

۱) $\frac{3}{8}a\pi^2$ ۲) $\frac{3}{8}a^3\pi$ ۳) $\frac{3}{8}a^2\pi$ ۴) $\frac{8}{3}a\pi^2$

۵۱- اگر R ناحیه محدود به بیضی $x = \cos t$، $y = 3\sin t$ و dA عنصر مساحت باشد، حاصل $\iint_R (x^2+y^2)\, dA$، کدام است؟ (MBA - ۸۷)

۱) $\frac{15\pi}{2}$ ۲) $\frac{8\pi}{3}$ ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 5π

۵۲- مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $x = y^3$ و خطوط به معادله $y = 0$ و $x + y = 2$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - ۸۳)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۵۳- مساحت ناحیه محدود به خم‌های $xy = a$، $xy = b$، $y^2 = \alpha x$ و $y^2 = \beta x$ با شروط $0 < a < b$ و $0 < \alpha < \beta$ که در ربع اول مختصات قرار دارند، عبارت است از: (مکانیک - ۸۵)

۱) $\frac{1}{3}(b-a)\ln\frac{\beta}{\alpha}$ ۲) $\frac{1}{6}(a-b)\ln\frac{\alpha}{\beta}$ ۳) $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\ln\frac{a}{b}$ ۴) $\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\ln\frac{b}{a}$

پاسخنامه‌ی کلیدی

-۱	۴	-۹	۲	-۱۷	۱	-۲۵	۴	-۳۳	۴	-۴۱	۴	-۴۹	۴
-۲	۴	-۱۰	۲	-۱۸	۳	-۲۶	۲	-۳۴	۲	-۴۲	۲	-۵۰	۳
-۳	۴	-۱۱	۳	-۱۹	۴	-۲۷	۳	-۳۵	۳	-۴۳	۲	-۵۱	۱
-۴	۲	-۱۲	۴	-۲۰	۳	-۲۸	۳	-۳۶	۱	-۴۴	۲	-۵۲	۲
-۵	۳	-۱۳	۱	-۲۱	۳	-۲۹	۲	-۳۷	۲	-۴۵	۲	-۵۳	۱
-۶	۳	-۱۴	۲	-۲۲	۴	-۳۰	۱	-۳۸	۴	-۴۶	۱		
-۷	۱	-۱۵	۳	-۲۳	۴	-۳۱	۴	-۳۹	۳	-۴۷	۲		
-۸	۴	-۱۶	۲	-۲۴	۲	-۳۲	۴	-۴۰	۲	-۴۸	۲		

پاسخ‌نامهٔ تشریحی سؤالات خودآزمایی را می‌توانید در سایت *www.serieomomi.ir* مشاهده نمایید.