فهرست

سری عمومی ارشد

فـصــل دوم:

معادلات مرتبهٔ دوم و بالاتر

مروری بر آنچه خواهیم خواند:

در این فصل می‌خواهیم روش حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم را به شما دانشجویان گرامی یاد دهیم و در ادامه آن را به معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر تعمیم دهیم. همان‌طور که در فصل اول نیز اشاره کردیم، یک معادلهٔ دیفرانسیل به فرم کلی $F(x, y, y', y'') = g(x)$ را یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم می‌نامیم و اگر تابع F به صورت زیر تعریف شود، آن را معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی می‌نامیم:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = g(x)$$

در این تابع اگر $g(x)$ برابر صفر باشد، معادله را معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم همگن می‌نامیم:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x) = 0$$

روش حل این دسته از معادلات نسبت به فصل اول دارای ساختاری منسجم‌تر و همراه با ابتکار کمتری است و هرساله سؤالات زیادی را به خود اختصاص می‌دهد. برای درک بهتر شما دانشجویان عزیز، مطالب این فصل را در قسمت‌های زیر ارائه می‌کنیم:

معادلات مرتبهٔ دوم و بالاتر

- A - حل معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت
- B - یافتن جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب ثابت
- C - معادلهٔ کوشی‌اویلر
- D - معادله‌های دیفرانسیل مرتبهٔ دوم غیرخطی
- E - استقلال خطی توابع

A-۱- معادلهٔ دیفرانسیل خطی و همگن مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت

یک معادلهٔ دیفرانسیل به فرم کلی $ay''+by'+cy=0$ که در آن a، b و c اعداد حقیقی و ثابت هستند را **معادلهٔ دیفرانسیل خطی و همگن مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت** می‌نامیم. برای شناسایی بهتر این دسته از معادلات، به جدول زیر دقت کنید:

مثال‌هایی برای درک بهتر

توضیحات	معادلهٔ دیفرانسیل
این معادله، یک معادلهٔ خطی و همگن با ضرایب ثابت است.	$2y''+3y'+4y=0$
این معادله، یک معادلهٔ خطی و همگن است، ولی دارای ضرایب ثابت نیست (به ضرایب y'' و y' توجه کنید).	$x^2y''+2xy'+3y=0$
این معادله، یک معادلهٔ همگن با ضرایب ثابت است، ولی خطی نیست (به توان دوم y'' توجه کنید).	$2y''^2+3y'+4y=0$
این معادله، یک معادلهٔ خطی با ضرایب ثابت است، ولی همگن نیست (سمت راست معادله، مخالف صفر است).	$3y''+y'+5y=e^x+1$
این معادله، یک معادلهٔ خطی با ضرایب ثابت است، ولی به دلیل حضور تابع $\sin x$ ، همگن نیست.	$y''+2y'+y-\sin x=0$

دقت: در بعضی از مثال‌ها، معادله را به‌صورت اپراتوری نیز نمایش می‌دهند، که در آن اپراتور D، معادل با مشتق است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D=\frac{d}{dx} \Rightarrow Dx^2=(x^2)'=2x$$

$$D^2x^2=(x^2)''=2 \quad \text{(دو بار از } x^2 \text{ مشتق می‌گیریم)}$$

با توجه به این موضوع، می‌توان y'' را به‌صورت D^2y و y' را به‌صورت Dy نمایش داد و در نتیجه معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت، به فرم اپراتوری زیر نیز قابل نمایش است:

$$ay''+by'+cy=0 \xrightarrow{\text{فرم اپراتوری}} aD^2y+bDy+cy=0$$

$$\Rightarrow (aD^2+bD+c)y=0$$

استراتژی یافتن جواب عمومی معادلهٔ همگن مرتبهٔ دوم

برای به‌دست آوردن جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خطی و همگن مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت زیر، گام‌های ارائه شده را طی می‌کنیم:

معادلهٔ موردنظر : $ay''+by'+cy=0$

گام اول (تشکیل معادلهٔ مشخصه): اگر در معادلهٔ دیفرانسیل خطی و همگن فوق به جای y''، m^2، به جای y'، m و به جای y، عدد یک را جایگذاری کنیم، معادلهٔ مشخصهٔ متناظر با آن به‌دست می‌آید:

معادلهٔ دیفرانسیل : $ay''+by'+cy=0 \xrightarrow{\begin{cases} y\to 1 \\ y'\to m \\ y''\to m^2 \end{cases}}$ معادلهٔ مشخصه : $am^2+bm+c=0$

یک نتیجه ساده

معادلهٔ مشخصهٔ متناظر با یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم، یک چند جمله‌ای از درجهٔ دو خواهد بود.

گام دوم (محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخصه): در این مرحله با حل معادلهٔ مشخصه، ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که تعداد ریشه‌های معادلهٔ مشخصه برابر مرتبهٔ معادله است. به عبارتی در این حالت که معادلهٔ مورد نظر مرتبهٔ دوم است، معادلهٔ مشخصه ۲ ریشه دارد.

گام سوم (تعیین جواب‌های پایه): برای تعیین جواب‌های پایهٔ معادلهٔ دیفرانسیل، بر حسب نوع و تعداد ریشه‌های معادلهٔ مشخصه، سه حالت زیر رخ می‌دهد:

۱) **حالت اول:** اگر معادلهٔ مشخصه دو ریشهٔ حقیقی m_1 و m_2 داشته باشد، جواب‌های پایهٔ معادلهٔ دیفرانسیل عبارت‌اند از:

$$\boxed{y_1=e^{m_1x} \ , \ y_2=e^{m_2x}}$$

۲) **حالت دوم:** اگر معادلهٔ مشخصه ریشهٔ مضاعف m_1 داشته باشد (یعنی دو ریشهٔ برابر m_1 و m_1)، جواب‌های پایهٔ معادلهٔ دیفرانسیل عبارت‌اند از:

$$\boxed{y_1=e^{m_1x} \ , \ y_2=xe^{m_1x}}$$

۳) **حالت سوم:** اگر معادلهٔ مشخصه، دو ریشهٔ مختلط به صورت $m_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ داشته باشد، جواب‌های پایهٔ معادلهٔ دیفرانسیل عبارت‌اند از:

$$\boxed{y_1=e^{\alpha x}\sin\beta x \ , \ y_2=e^{\alpha x}\cos\beta x}$$

قابل ذکر است که پس از محاسبهٔ جواب‌های پایهٔ معادله به صورت y_1 و y_2، جواب عمومی معادلهٔ همگن به صورت زیر به‌دست می‌آید:

جواب عمومی معادلهٔ همگن : $\boxed{y=c_1y_1+c_2y_2}$

● **دقت:** اگر معادله به فرم اپراتوری داده شود، به‌سادگی با جایگذاری m به جای D در معادلهٔ داده شده، معادلهٔ مشخصه را به‌دست می‌آوریم و به‌کمک آن جواب‌های معادله را محاسبه می‌کنیم.

همانطور که مشاهده کردید، تعیین جواب عمومی معادله در این حالت کار راحتی است. در ادامه برای درک بهتر چند تمرین آموزشی را با هم بررسی می‌کنیم.

تمرین ۱: جواب عمومی معادله‌های دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

۱) $2y''-5y'-3y=0$ (عمران - آزاد ۸۲) ۲) $y''-10y'+25y=0$ ۳) $y''+4y'+7y=0$

حل: ابتدا دقت کنید که هر سه معادلهٔ فوق، از نوع معادلات دیفرانسیل خطی و همگن مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت هستند، بنابراین برای محاسبهٔ جواب عمومی آنها، کافیست مطابق روند ارائه شده عمل کنیم، در ادامه بـرای هـر یک از سه معادله به‌صورت جداگانه این روند را طی می‌کنیم:

۱ **گام اول (تشکیل معادلهٔ مشخصه):**

$$\text{معادلهٔ دیفرانسیل}: 2y''-5y'-3y=0 \xrightarrow{\begin{cases} y\to 1 \\ y'\to m \\ y''\to m^2\end{cases}} \text{معادلهٔ مشخصه}: 2m^2-5m-3=0$$

گام دوم (محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخصه):

$$\text{معادلهٔ مشخصه}: 2m^2-5m-3=0$$

$$\text{روش دلتا}: \Delta=b^2-4ac \ , \ m_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{روش دلتا}} m=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times(2)(-3)}}{2\times 2}\Rightarrow m_1=-\frac{1}{2} \ , \ m_2=3$$

گام سوم (تعیین جواب‌های پایه):

از آنجا که m_1 و m_2 هر دو حقیقی و متمایزند، می‌توان فهمید که جواب‌های پایهٔ معادلهٔ دیفرانسیل عبارت‌اند از:

$$y_1=\underbrace{\boxed{e^{-\frac{1}{2}x}}}_{e^{m_1x}} \ , \ y_2=\underbrace{\boxed{e^{3x}}}_{e^{m_2x}} \xrightarrow{\text{تعیین جواب عمومی}} y=c_1y_1+c_2y_2 \Rightarrow y=c_1e^{-\frac{x}{2}}+c_2e^{3x}$$

کمی توجه

با تجزیهٔ عبارت $2m^2-5m-3$ به حاصل‌ضرب $(2m+1)(m-3)$ نیز به‌سادگی می‌توان ریشه‌هـای معادلـهٔ درجهٔ ۲ داده شده را به‌دست آورد:

$$2m^2-5m-3=0 \Rightarrow (2m+1)(m-3)=0 \Rightarrow m_1=-\frac{1}{2} \ , \ m_2=3$$

۲ **گام اول (تشکیل معادلهٔ مشخصه):**

$$\text{معادلهٔ دیفرانسیل}: y''-10y'+25y=0 \xrightarrow{\begin{cases} y\to 1 \\ y'\to m \\ y''\to m^2\end{cases}} \text{معادلهٔ مشخصه}: m^2-10m+25=0$$

گام دوم (محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخصه):

$$\text{معادلهٔ مشخصه}: m^2-10m+25=0 \Rightarrow (m-5)^2=0 \Rightarrow m_1=5 \ , \ m_2=5 \quad (\text{ریشهٔ مضاعف})$$

گام سوم (تعیین جواب‌های پایه):

از آنجا که m_1 و m_2 حقیقی و برابرند، پس ریشهٔ مضاعف داریم و جواب‌های پایهٔ معادلهٔ دیفرانسیل عبارت‌اند از:

$$y_1=\underbrace{\boxed{e^{5x}}}_{e^{m_1x}} \ , \ y_2=\underbrace{\boxed{xe^{5x}}}_{xe^{m_1x}} \xrightarrow{\text{تعیین جواب عمومی}} y=c_1y_1+c_2y_2 \Rightarrow y=c_1e^{5x}+c_2xe^{5x}$$

۳ **گام اول (تشکیل معادلهٔ مشخصه):**

$$\text{معادلهٔ دیفرانسیل}: y''+۴y'+۷y=۰ \xrightarrow{\begin{cases} y\to ۱\\ y'\to m\\ y''\to m^۲\end{cases}} m^۲+۴m+۷=۰$$

گام دوم (محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخصه):

$$\text{معادلهٔ مشخصه}: m^۲+۴m+۷=۰ \xrightarrow{\text{روش دلتا}} \begin{cases}\Delta=b^۲-۴ac=(۴)^۲-۴\times۱\times۷=-۱۲\\ m_{۱,۲}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-۴\pm\sqrt{-۱۲}}{۲}=-۲\pm\sqrt{۳}i\end{cases}$$

دقت: $\sqrt{-۱۲}=\sqrt{۱۲}\times\underbrace{\boxed{\sqrt{-۱}}}_{i}=۲\sqrt{۳}\,i$

گام سوم (تعیین جواب‌های پایه):

با توجه به اینکه جواب‌های معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ دیفرانسیل داده شده دو عدد مختلط است، پـس جـواب‌هـای پایهٔ معادلهٔ دیفرانسیل عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} m_{۱,۲}=-۲\pm\sqrt{۳}\,i\\ m_{۱,۲}=\alpha\pm\beta i\end{cases} \xrightarrow[\beta=\sqrt{۳}]{\alpha=-۲} y_۱=\underbrace{\boxed{e^{-۲x}\cos\sqrt{۳}x}}_{e^{\alpha x}\cos\beta x}\quad,\quad y_۲=\underbrace{\boxed{e^{-۲x}\sin\sqrt{۳}x}}_{e^{\alpha x}\sin\beta x}$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین جواب عمومی}} y=c_۱y_۱+c_۲y_۲ \Rightarrow y=c_۱e^{-۲x}\cos\sqrt{۳}x+c_۲e^{-۲x}\sin\sqrt{۳}x$$

$$\text{ساده کردن بیشتر جواب} \Rightarrow y=e^{-۲x}(c_۱\cos\sqrt{۳}x+c_۲\sin\sqrt{۳}x)$$

همانطور که مشاهده کردید، در این تمرین با انواع حالت‌های ممکن برای یک معادلهٔ مرتبهٔ دوم آشـنا شـدیم. در تمرین بعد می‌خواهیم مسئلهٔ کامل‌تری را از این بحث، برای شما عزیزان بررسی کنیم.

تمرین ۲: اگر y جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $۴y''+۴y'+۱۷y=۰$، $y(۰)=-۱$ و $y'(۰)=۲$ باشد، $y(\pi)$ کدام است؟

۱) $-e^{-\pi}$ ۲) $e^{-\pi}$ ۳) $-e^{-\frac{\pi}{۲}}$ ۴) $e^{-\frac{\pi}{۲}}$ (مواد - ۸۱)

حل: ابتدا با یک نگاه متوجه می‌شویم که معادلهٔ فوق یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی و همگن با ضرایب ثابت است. همانطور که یاد گرفتیم برای پیدا کردن جواب عمومی این معادلـه ابتـدا معادلـهٔ مشخـصهٔ آن را تـشکیل داده و ریشه‌هایش را به‌دست می‌آوریم:

$$۴y''+۴y'+۱۷y=۰ \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} ۴m^۲+۴m+۱۷=۰$$

$$\text{حل معادلهٔ مشخصه}: ۴m^۲+۴m+۱۷=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=(۴)^۲-۴(۴)(۱۷)=-۲۵۶$$

$$\Rightarrow m_{۱,۲}=\frac{-۴\pm\overbrace{\boxed{\sqrt{-۲۵۶}}}^{۱۶\sqrt{-۱}=۱۶i}}{۸}=-\frac{۱}{۲}\pm۲i \xrightarrow[\alpha\pm\beta i]{\text{مطابقت با فرم کلی}} \begin{cases}\alpha=-\dfrac{۱}{۲}\\ \beta=۲\end{cases}$$

در ادامه با توجه به ریشه‌های مختلط معادلهٔ مشخصه، جواب‌های پایهٔ این معادله و جواب عمومی آن عبارت‌اند از:

$$y_۱=e^{\alpha x}\cos\beta x=e^{-\frac{۱}{۲}x}\cos۲x \;،\; y_۲=e^{\alpha x}\sin\beta x=e^{-\frac{۱}{۲}x}\sin۲x$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین جواب عمومی}} y=c_۱y_۱+c_۲y_۲ \Rightarrow y=e^{-\frac{۱}{۲}x}(c_۱\cos۲x+c_۲\sin۲x)$$

از آنجاکه در صورت سؤال دو شرط اولیهٔ $y'(\circ)=۲$ و $y(\circ)=-۱$ داده شده است، می‌توانیم ضـرایب مجهـول $c_۱$ و $c_۲$ را در جواب عمومی معادله به‌دست آوریم:

$$y(\circ)=-۱ \Rightarrow y(\circ)=\underbrace{e^{\circ}}_{۱}(c_۱\underbrace{\cos\circ}_{۱}+c_۲\underbrace{\sin\circ}_{\circ}) \Rightarrow c_۱=-۱$$

برای اعمال شرط دیگر داده شده ابتدا y' را محاسبه می‌کنیم:

$$y=e^{-\frac{۱}{۲}x}(c_۱\cos ۲x+c_۲\sin ۲x)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} y'=-\frac{۱}{۲}e^{-\frac{۱}{۲}x}(c_۱\cos ۲x+c_۲\sin ۲x)+e^{-\frac{۱}{۲}x}(-۲c_۱\sin ۲x+۲c_۲\cos ۲x)$$

$$\xrightarrow[y'(\circ)=۲]{x=\circ,\ y'=۲} ۲=-\frac{۱}{۲}e^{\circ}(c_۱\underbrace{\cos\circ}_{۱}+c_۲\underbrace{\sin\circ}_{\circ})+e^{\circ}(-۲c_۱\underbrace{\sin\circ}_{\circ}+۲c_۲\underbrace{\cos\circ}_{۱})$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}c_۱+۲c_۲=۲ \xrightarrow{c_۱=-۱} ۲c_۲=۲-\frac{۱}{۲} \Rightarrow c_۲=\frac{۳}{۴}$$

پس از محاسبهٔ $c_۱$ و $c_۲$ ، جواب معادلهٔ همگن داده شده برابر است با:

$$y=e^{-\frac{۱}{۲}x}(c_۱\cos ۲x+c_۲\sin ۲x) \xrightarrow{c_۱=-۱,\ c_۲=\frac{۳}{۴}} y=e^{-\frac{۱}{۲}x}(-\cos ۲x+\frac{۳}{۴}\sin ۲x)$$

در آخرین مرحله با جایگذاری $x=\pi$ در رابطهٔ فوق، حاصل $y(\pi)$ که خواستهٔ این تست است را به‌دست می‌آوریم:

$$y(\pi)=e^{-\frac{\pi}{۲}}(\underbrace{-\cos ۲\pi}_{-۱}+\frac{۳}{۴}\underbrace{\sin ۲\pi}_{\circ}) \Rightarrow y(\pi)=-e^{-\frac{\pi}{۲}}$$ (گزینهٔ ۳)

دقت: به‌خاطر داشته باشید که هرگاه به‌همراه یک معادلهٔ دیفرانسیل، شرایط اولیه (یا مرزی) هم داده شود کـه بتوان به‌وسیلهٔ آنها پارامترهای ثابت جواب عمومی مانند $c_۱$ و $c_۲$ را به‌دست آورد، آنگاه جواب به‌دست آمده بـرای معادله را یک **جواب خصوصی (یا خاص)** می‌نامیم.

کمی توجه

در معادلهٔ مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت، اگر ریشه‌های معادلهٔ مشخصه به‌صورت دو عدد حقیقی و قرینه به‌دسـت آیند $(m_۱=\alpha ، m_۲=-\alpha)$، با توجه به روابط $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{۲}$ و $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{۲}$، می‌توان جواب عمومی معادله را به‌صورت هر یک از دو شکل زیر درنظر گرفت:

شکل ۱ : $y=c_۱e^{\alpha x}+c_۲e^{-\alpha x}$ یا شکل ۲ : $y=a_۱\cosh x+a_۲\sinh x$

توجه کنید که $a_۱$ و $a_۲$ نیز دو پارامتر ثابت دلخواه هستند. از این موضوع گاهی در طرح تست‌ها استفاده می‌شود.

تمرین ۳: جواب عمومی معادلهٔ $y''-۴y=\circ$ کدام است؟ (ریاضی - ۸۴)

۱) $y=c_۱e^{-۲x}+c_۲xe^{-۲x}$
۲) $y=c_۱e^{۲x}+c_۲xe^{۲x}$
۳) $y=c_۱\cos ۲x+c_۲\sin ۲x$
۴) $y=c_۱\cosh ۲x+c_۲\sinh ۲x$

حل: همانطور که مشاهده می‌کنید، معادلهٔ داده شده یک معادلهٔ خطی و همگن با ضرایب ثابت است که ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ آن برابرند با: $y''-4y=0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} m^2-4=0 \Rightarrow m_1=-2, m_2=2$
از آنجا که دو جواب معادلهٔ مشخصه قرینهٔ یکدیگر هستند، جواب عمومی معادله دیفرانسیل فوق را می‌توان به یکی از دو شکل زیر نوشت:

شکل ۱ : $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}$ ، شکل ۲ : $y=c_1\cosh 2x+c_2\sinh 2x$

با توجه به مشاهده نشدن شکل ۱ جواب معادله در گزینه‌ها، گزینهٔ (۴) را انتخاب می‌کنیم که در واقع شکل ۲ جواب معادله است.

A-۲- تعمیم روش حل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم همگن به مرتبهٔ n ام

فرم کلی یک معادلهٔ خطی و همگن با ضرایب ثابت از مرتبهٔ n به‌صورت زیر است:

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$$

برای پیدا کردن جواب عمومی این معادله مشابه آنچه در قسمت قبل گفتیم، گام‌های زیر را با هم طی می‌کنیم:

گام اول (تشکیل معادلهٔ مشخصه): مشابه با قبل در معادلات مرتبهٔ nام نیز اگر به‌ازای $i=1,2,\dots,n$ به‌جای $y^{(i)}$، m^i قرار دهیم، معادلهٔ مشخصه تشکیل می‌شود. به طور مثال معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ دیفرانسیل $y^{(4)}+2y''+5y=0$ عبارت است از:

روند تشکیل معادلهٔ مشخصه : $y\to 1$ ، $y'\to m$ ، $y''\to m^2$ ، $y^{(3)}\to m^3$ ، $y^{(4)}\to m^4$

$$y^{(4)}+2y''+5y=0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} m^4+2m^2+5=0$$

گام دوم (پیدا کردن ریشه‌های معادلهٔ مشخصه): همانطور که مشاهده کردید، معادلهٔ مشخصهٔ متناظر با یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه nام، معادله‌ای از درجه n است و حتماً n ریشه دارد که در این مرحله باید ریشه‌های آن را به‌دست آوریم.

گام سوم (تعیین جواب‌های پایه): بعد از پیدا کردن ریشه‌های معادلهٔ مشخصه، برای محاسبهٔ جواب‌های پایه، دو حالت کلی زیر رخ می‌دهد:

حالت اول: اگر جواب به‌دست آمده از معادلهٔ مشخصه، یک عدد حقیقی باشد $(m=a)$ و k بار تکرار شده باشد، جواب‌های پایهٔ متناظر با آن عبارت‌اند از:

$$\underbrace{e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, \dots, x^{k-1}e^{ax}}_{k \text{ تا جواب پایه}}$$

حالت دوم: اگر جواب به‌دست آمده از معادلهٔ مشخصه، یک جفت عدد مختلط باشد $(m=\alpha\pm i\beta)$ و k بار تکرار شده باشد (یعنی در مجموع $2k$ ریشه داریم، زیرا $\alpha\pm i\beta$ در واقع دو ریشه محسوب می‌شود)، جواب‌های پایهٔ متناظر با آن عبارت‌اند از:

$$\underbrace{\begin{cases}e^{\alpha x}\sin\beta x\\ e^{\alpha x}\cos\beta x\end{cases}, \begin{cases}xe^{\alpha x}\sin\beta x\\ xe^{\alpha x}\cos\beta x\end{cases}, \begin{cases}x^2e^{\alpha x}\sin\beta x\\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x\end{cases}, \dots, \begin{cases}x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\end{cases}}_{2k \text{ تا جواب پایه}}$$

توجه شود که در این حالت، جواب‌های سینوسی و کسینوسی همواره با همدیگر ظاهر می‌شوند.

پس از محاسبهٔ جواب‌های پایهٔ متناظر با معادله (یعنی $y_1, y_2, \dots, y_n$)، جواب عمومی معادلهٔ همگن آن به‌صورت مقابل نوشته می‌شود: $y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$

کمی توجه

موضوع مهم و اساسی در یافتن جواب عمومی معادلهٔ همگن با ضرایب ثابت، تشخیص جواب‌های پایـه از روی ریشه‌های معادلهٔ مشخصه است. برای درک هرچه بهتر این موضوع، به سؤال آموزشی زیر توجه کنید:

سؤال: فرض کنید ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ متناظر با معادلـهٔ $a_{11}y^{(11)}+a_{10}y^{(10)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$ برابـر با $-۲\pm۴i$ ، ۳ ، ۳ ، ۳ ، $۳\pm۲i$ ، $۳\pm۲i$ و $۳\pm۲i$ باشند، جواب‌های پایهٔ متناظر با این معادله را به دست آورید.

پاسخ: معادله از مرتبهٔ ۱۱ است. برای پیدا کردن ۱۱ جواب پایهٔ متناظر با آن، به موارد زیر توجه کنید:

۱- جواب $m=۳\pm۲i$ سه بار تکرار شده است، بنابراین جواب‌های پایهٔ متناظر با آن عبارت‌اند از:

$$\begin{cases}e^{۳x}\sin ۲x\\ e^{۳x}\cos ۲x\end{cases},\ \begin{cases}xe^{۳x}\sin ۲x\\ xe^{۳x}\cos ۲x\end{cases},\ \begin{cases}x^۲e^{۳x}\sin ۲x\\ x^۲e^{۳x}\cos ۲x\end{cases}$$

۲- جواب‌های پایهٔ متناظر با ریشهٔ $m=-۲\pm۴i$ که یک بار تکرار شده است عبارت‌اند از:

$$\begin{cases}e^{-۲x}\sin ۴x\\ e^{-۲x}\cos ۴x\end{cases}$$

۳- جواب $m=۳$ نیز سه بار تکرار شده است، بنابراین جواب‌های پایهٔ متناظر با آن عبارت‌اند از:

$$e^{۳x}\ ,\ xe^{۳x}\ ,\ x^۲e^{۳x}$$

درادامه برای درک بهتر، چند تمرین زیر را با هم حل می‌کنیم.

تمرین ۴: جواب عمومی معادله‌های زیر را بیابید.

۱) $\dfrac{d^۴y}{dx^۴}+۲\dfrac{d^۲y}{dx^۲}+y=0$ (ریاضی - ۷۷)

۲) $y'''+۳y''-۴y=0$ (عمران - آزاد ۸۶)

حل:

۱ برای محاسبهٔ جواب عمومی معادلهٔ مورد نظر، مطابق با گام‌بنـدی ارائـه شـده، ابتـدا معادلـهٔ مشخـصهٔ آن‌را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{d^۴y}{dx^۴}+۲\frac{d^۲y}{dx^۲}+y=0 \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} m^۴+۲m^۲+۱=0 \Rightarrow (m^۲+۱)^۲=0$$

از آنجا که معادلهٔ مشخصه از درجهٔ چهارم است، بنابراین چهار ریشه دارد:

$$(\underbrace{m^۲+۱}_{m^۲+۱=0\ \Rightarrow\ m^۲=-۱\ \Rightarrow\ m=\pm\sqrt{-۱}=\pm i})^۲=0 \Rightarrow m_{۱,۲}=\pm i\ ,\ m_{۳,۴}=\pm i \xrightarrow{\text{فرم کامل‌تر جواب}} m=\pm i=\underbrace{0}_{\alpha}\pm\underbrace{۱}_{\beta}\times i$$

کمی توجه

ریشه‌های معادلهٔ $m^۲+۱=0$ ، برابر $m=\pm i$ است. از طرفی با توجه به توان ۲ عبارت $m^۲+۱$ ، این ریشه‌ها دو بار تکرار می‌شوند.

$$(m^۲+۱)^۲=0 \Rightarrow (\underbrace{m^۲+۱}_{m_{۱,۲}=\pm i})(\underbrace{m^۲+۱}_{m_{۳,۴}=\pm i})=0$$

از آنجا که ریشهٔ $0 \pm i$ دو بار تکرار شده است، جواب‌های پایهٔ متناظر با آن عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} e^{0x}\sin x = \sin x \\ e^{0x}\cos x = \cos x \end{cases} , \begin{cases} xe^{0x}\sin x = x\sin x \\ xe^{0x}\cos x = x\cos x \end{cases}$$

و در نهایت جواب عمومی این معادله برابر است با: $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 x\sin x + c_4 x\cos x$

۲) برای محاسبهٔ جواب عمومی، ابتدا معادلهٔ مشخصهٔ متناظر با معادلهٔ مورد نظر را تشکیل می‌دهیم:

$$y''' + 3y'' - 4y = 0 \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} m^3 + 3m^2 - 4 = 0$$

با کمی دقت مشاهده می‌شود که $m_1 = 1$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند و در نتیجه برای یافتن سایر ریشه‌های معادلهٔ فوق، آن‌را بر عبارت $m-1$ (عامل ریشهٔ $m=1$) تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} m^3 + 3m^2 - 4 & m-1 \\ \cline{2-2} -(m^3 - m^2) & m^2 + 4m + 4 \\ \cline{1-1} 4m^2 - 4 & \\ -(4m^2 - 4m) & \\ \cline{1-1} 4m - 4 & \\ -(4m - 4) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow m^3 + 3m^2 - 4 = (m-1)(m^2 + 4m + 4) = (m-1)(m+2)^2 = 0$$
$$\Rightarrow m_1 = 1 ، m_2 = -2 ، m_3 = -2$$

بنابراین معادلهٔ مشخصه، سه ریشه دارد. جواب پایهٔ متناظر با $m_1 = 1$ برابر e^x و جواب‌های پایهٔ متناظر با $m_2 = -2$ و $m_3 = -2$ عبارتند از: $e^{-2x} \;, xe^{-2x}$

و در نتیجه جواب عمومی این معادله برابر است با: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 xe^{-2x}$

کمی توجه

در کنکور هنگامی‌که با یک معادلهٔ درجهٔ ۳ برخورد کردید که حلش ساده به‌نظر نمی‌رسید، ابتدا اعداد $\pm 2 ، \pm 1 ، 0$ را در آن امتحان کنید، به احتمال زیاد این اعداد شامل حداقل یکی از جواب‌های معادله هستند و درادامه برای تعیین سایر ریشه‌ها از تکنیک تقسیم کردن استفاده کنید. به‌طور مثال، همانطورکه مشاهده کردید، در معادلهٔ فوق نیز $m=1$ صدق می‌کرد و برای یافتن دو جواب دیگر، عبارت موردنظر را به عامل ریشهٔ به‌دست آمده تقسیم کردیم:

$$m^3 + 3m^2 - 4 = \underbrace{\boxed{(m-1)}}_{m=1 \text{ عامل ریشهٔ}} (\text{عبارت درجهٔ } 2) \Rightarrow \text{عبارت درجهٔ } 2 = \frac{m^3 + 3m^2 - 4}{(m-1)} = m^2 + 4m + 4$$

تمرین ۵: جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $(D^2 - 6D + 13)^2 y = 0$ کدام است؟ (فراوری و انتقال گاز – ۸۲)

۱) $y(x) = e^{3x}((A_1 + A_2 x)\cos 2x + (B_1 + B_2 x)\sin 2x)$

۲) $y(x) = e^{3x}((A_1 x + A_2 x^2)\cos 2x + (B_1 x + B_2 x^2)\sin 2x)$

۳) $y(x) = e^{2x}((A_1 + A_2 x)\cos 3x + (B_1 + B_2 x)\sin 3x)$

۴) $y(x) = e^{2x}((A_1 x + A_2 x^2)\cos 3x + (B_1 x + B_2 x^2)\sin 3x)$

حل: با سؤال جالبی روبرو شده‌ایم. معادلهٔ داده شده یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت بوده که به فرم اپراتوری نمایش داده شده است، بنابراین ابتدا معادلهٔ مشخصهٔ آن را تشکیل داده و ریشه‌هایش را به‌دست می‌آوریم:

$$(D^{۲}-۶D+۱۳)^{۲}y=۰ \xrightarrow[D\to m]{\text{معادلهٔ مشخصه}} (m^{۲}-۶m+۱۳)^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow m^{۲}-۶m+۱۳=۰ \quad (\text{دو بار}) \xrightarrow[\text{معادلهٔ مشخصه}]{\text{یافتن ریشه‌های}} m=\frac{۶\pm\sqrt{۳۶-۵۲}}{۲}=\frac{۶\pm ۴i}{۲}=\underbrace{\boxed{۳}}_{\alpha}\pm\underbrace{\boxed{۲}}_{\beta}i \quad (\text{دو بار})$$

با توجه به اینکه معادلهٔ مشخصهٔ این معادلهٔ دیفرانسیل از درجهٔ چهار است، بنابراین باید چهار ریشه داشته باشد، که دو ریشهٔ دیگر آن هم در واقع همان $۳\pm ۲i$ است که مجدداً تکرار شده‌اند (به توان ۲ در عبارت $m^{۲}-۶m+۱۳$ که با رنگ آبی مشخص شده است، توجه کنید) و درنتیجه جواب‌های پایهٔ متناظر با آن عبارت‌اند از:

$$m_{۱,۲}=۳\pm ۲i \ ، m_{۳,۴}=۳\pm ۲i \ \Rightarrow \begin{cases} e^{۳x}\cos ۲x \\ e^{۳x}\sin ۲x \end{cases} , \begin{cases} xe^{۳x}\cos ۲x \\ xe^{۳x}\sin ۲x \end{cases}$$

و در نهایت جواب عمومی این معادله برابر است با:

$$y=c_{۱}e^{۳x}\cos ۲x+c_{۲}e^{۳x}\sin ۲x+c_{۳}xe^{۳x}\cos ۲x+c_{۴}xe^{۳x}\sin ۲x$$

$$y=e^{۳x}((c_{۱}+c_{۳}x)\cos ۲x+(c_{۲}+c_{۴}x)\sin ۲x) \quad (\text{گزینهٔ ۱})$$

کمی توجه

گاهی از اوقات جواب‌های پایهٔ یک معادلهٔ همگن با ضرایب ثابت و از مرتبهٔ n را داده و از ما معادلهٔ متناظر با آن را می‌پرسند. برای حل اینگونه از سؤالات، ابتدا باید با توجه به جواب‌های پایه، معادلهٔ مشخصه را تشکیل دهیم. برای این منظور ریشه‌های متناسب با جواب ارائه شده را به‌دست آورده و معادله را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\text{مثال}: \begin{cases} m_{۱}=\alpha \xrightarrow{\text{معادلهٔ متناظر}} (m-\alpha)=۰ \\ m_{۲}=\beta \xrightarrow{\text{معادلهٔ متناظر}} (m-\beta)=۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه دارای ریشه‌های } \alpha \text{ و } \beta} (m-\alpha)(m-\beta)=۰$$

در ادامه با حل چند تمرین، این موضوع را بیشتر بررسی می‌کنیم.

تمرین ۶: معادلهٔ دیفرانسیلی که توابع e^{x} و $e^{۲x}$ تشکیل دهندهٔ مجموعهٔ جواب‌های پایهٔ آن باشند، کدام است؟ (عمران - ۸۵)

۱) $y''+۲y=۰$

۲) $y''+۳y'-۲y=۰$

۳) $y''-۳y'+۲y=۰$

۴) $۲y''+y'-y=۰$

حل: با توجه به گزینه‌ها از آنجا که جواب‌های پایهٔ داده شده مشابه با جواب‌های پایهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت است، معادلهٔ مشخصهٔ متناظر با این دو جواب را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} e^{x} \xrightarrow{\text{متناظر با ریشهٔ } m=۱ \text{ است.}} (m-۱)=۰ \\ e^{۲x} \xrightarrow{\text{متناظر با ریشهٔ } m=۲ \text{ است.}} (m-۲)=۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} (m-۱)(m-۲)=۰ \Rightarrow m^{۲}-۳m+۲=۰$$

در ادامه به‌صورت زیر از روی معادلهٔ مشخصه، معادلهٔ اصلی را بازنویسی می‌کنیم:

$$m^{۲}-۳m+۲=۰ \xrightarrow{\begin{cases} m^{۲}\to y'' \\ m\to y' \\ ۲\to ۲y \end{cases}} \text{معادلهٔ دیفرانسیل اولیه}: y''-۳y'+۲y=۰ \quad (\text{گزینهٔ ۳})$$

تمرین ۷: کدام‌یک از معادلات دیفرانسیل زیر، دارای جواب‌های مستقل خطی ۱، x، $e^{۳x}$ و $xe^{۳x}$ است؟

۱) $D^{۲}(D+۳)^{۲}y=۰$ ۲) $D^{۲}(D-۳)^{۲}y=۰$ ۳) $D^{۲}(D^{۲}-۳)y=۰$ ۴) $D^{۲}(D^{۲}+۳)y=۰$

حل: ابتدا ریشه‌های متناظر با هر جواب پایه را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۱ \rightarrow ۱\times e^{۰x} \Rightarrow m=۰ \\ x \rightarrow x\times e^{۰x} \Rightarrow m=۰ \\ e^{۳x} \rightarrow m=۳ \Rightarrow (m-۳)=۰ \\ xe^{۳x} \rightarrow m=۳ \Rightarrow (m-۳)=۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه برابر است با}} m\times m\times(m-۳)\times(m-۳)=۰ \Rightarrow m^{۲}(m-۳)^{۲}=۰$$

و در نهایت با توجه به گزینه‌ها و با جایگذاری D به جای m در معادلهٔ مشخصهٔ به‌دست آمده، معادلهٔ دیفرانسیل موردنظر به فرم اپراتوری برابر است با: (گزینهٔ ۲) $m^{۲}(m-۳)^{۲}=۰ \Rightarrow D^{۲}(D-۳)^{۲}y=۰$

تمرین ۸: اگر ۱، x، $x^{۲}$، $x^{۳}$ و e^{x} جواب‌های یک معادلهٔ مرتبهٔ پنجم با ضرایب ثابت باشند، ریشه‌های متناظر با این جواب‌ها و معادلهٔ مربوط به آنها را به‌دست آورید.

حل: مشابه با تمرین قبل عمل کرده و می‌نویسیم:

$$\left.\begin{cases} ۱ \rightarrow ۱\times e^{۰x} \Rightarrow m_{۱}=۰ \Rightarrow m=۰ \\ x \rightarrow x\times e^{۰x} \Rightarrow m_{۲}=۰ \Rightarrow m=۰ \\ x^{۲} \rightarrow x^{۲}\times e^{۰x} \Rightarrow m_{۳}=۰ \Rightarrow m=۰ \\ x^{۳} \rightarrow x^{۳}\times e^{۰x} \Rightarrow m_{۴}=۰ \Rightarrow m=۰ \\ e^{x} \rightarrow e^{۱x} \Rightarrow m_{۵}=۱ \Rightarrow (m-۱)=۰ \end{cases}\right\} \Rightarrow m^{۴}(m-۱)=۰ \quad (\text{معادلهٔ مشخصه})$$

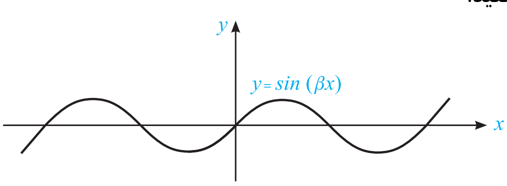
$$m^{۵}-m^{۴}=۰ \xrightarrow{\text{معادلهٔ متناظر}} y^{(۵)}-y^{(۴)}=۰$$

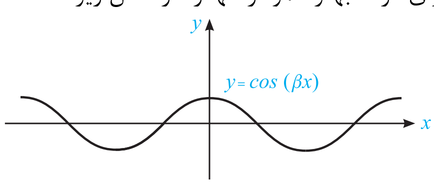
نتیجه: از این دو تمرین می‌توان فهمید که ریشهٔ متناظر با چند جمله‌ای‌های ۱، x، $x^{۲}$ و ... ، برابر $m=۰$ است. در واقع می‌توان گفت اگر به‌طور مثال $x^{۳}$ جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت باشد، ریشهٔ $m=۰$، ۴ بار تکرار شده و $x^{۲}$، x و ۱ نیز لزوماً جواب این معادلهٔ دیفرانسیل هستند.

A-۳- بررسی یک موضوع پر کاربرد در کنکور

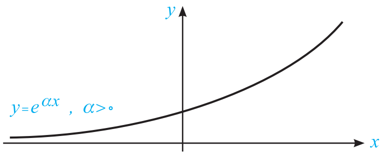
در بعضی از سؤالات کنکور، در مورد نحوهٔ رفتار یا نمودار جواب معادلهٔ دیفرانسیل $ay''+by'+cy=۰$ سؤال می‌شود. در این قسمت می‌خواهیم این موضوع را بررسی کنیم. همانطور که در قسمت‌های قبلی مشاهده شد، در جواب معادلهٔ دیفرانسیل $ay''+by'+cy=۰$، با توجه به ریشه‌های معادلهٔ مشخصه یکی از توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس، تابع نمایی، چندجمله‌ای‌ها و یا حاصل ضربی از آنها ظاهر می‌شوند. بنابراین، ابتدا به‌صورت مختصر به بررسی رفتار این توابع می‌پردازیم:

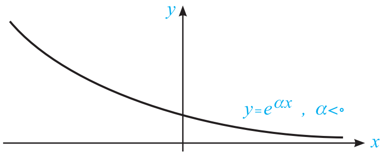
الف) توابع سینوس و کسینوس: واضح است که توابع $sin(\beta x)$ و $cos(\beta x)$ هر دو کراندار و نوسانی هستند. برای درک بهتر، نمودار آنها را در شکل زیر مشاهده کنید.





ب) تابع نمایی: در تابع $y=e^{\alpha x}$، با توجه به علامت α، دو رفتار زیر را مشاهده می‌کنیم. اگر $\alpha>0$، تابع در $+\infty$ نامتناهی می‌شود (یعنی نامیراست) و در $-\infty$ به صفر میل می‌کند و اگر $\alpha<0$، تابع در $+\infty$ به صفر میل می‌کند (یعنی میراست) و در $-\infty$ نامتناهی شود. برای درک بهتر به نمودار آنها توجه کنید.

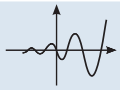
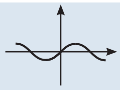
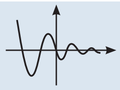
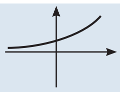
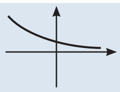
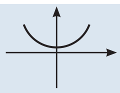
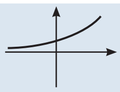
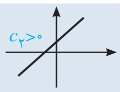
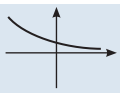




توجه کنید که اگر $\alpha=0$ باشد، آنگاه تابع $y=e^{\alpha x}$ به تابع ثابت $y=1$ تبدیل می‌شود.

ج) توابع چندجمله‌ای: توجه کنید که در جواب معادلهٔ دیفرانسیل $ay''+by'+cy=0$، فقط درصورتی‌که معادلهٔ مشخصه ریشهٔ مضاعف داشته باشد، تابع $y=x$ به‌عنوان ضریب یکی از جواب‌های پایه ظاهر می‌شود. بنابراین، کافی است به رفتار این تابع ($y=x$) و تأثیر آن در رفتار توابع دیگر توجه کنیم.

در ادامه با توجه به آشنایی با رفتار توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس و تابع نمایی، رفتار جواب معادلهٔ دیفرانسیل $ay''+by'+cy=0$ را در حالت‌های مختلف در قالب جدول زیر بررسی می‌کنیم:

	فرم کلی جواب	حالت‌های ممکن	شکل حدودی	توضیحات رفتار جواب
۱	$e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$	$\alpha>0$		نوسانی، نامیرا
		$\alpha=0$		نوسانی، کراندار
		$\alpha<0$		نوسانی، میرا
۲	$c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$	m_1 و m_2 هر دو مثبت یا یکی صفر دیگری مثبت		غیرنوسانی، نامیرا
		m_1 و m_2 هر دو منفی یا یکی صفر و دیگری منفی		غیرنوسانی، میرا
		یکی مثبت، یکی منفی		غیرنوسانی، نامیرا
۳	$c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_1x}$	$m_1>0$		غیرنوسانی، نامیرا
		$m_1=0$		غیرنوسانی، نامیرا
		$m_1<0$		غیرنوسانی، میرا

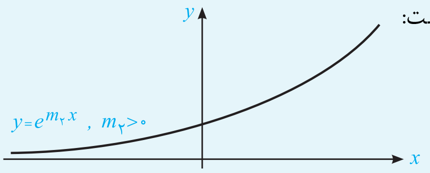
دقت: اگر یک تابع در بی‌نهایت به صفر میل کند آن‌را میرا و در غیراین‌صورت آن‌را نامیرا می‌نامیم.

تذکر: توجه کنید که چون $c_۱$ و $c_۲$ دو پارامتر ثابت دلخواه هستند، تمام شکل‌ها در جدول صفحهٔ قبل با فرض مثبت بودن آنها رسم شده است.

کمی توجه

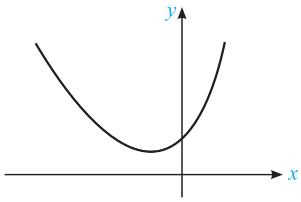
در بررسی رفتار جواب یک معادله، در جدول صفحهٔ قبل، توجه کنید که همواره از قاعدهٔ رشد و یا هم‌ارزی استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال، در ردیف دوم، وقتی $m_۱$ و $m_۲$ هر دو مثبت باشند و یا یکی صفر و دیگری مثبت باشد، آنگاه با فرض $m_۲ \geq m_۱$، در بی‌نهایت داریم: $c_۱e^{m_۱x} + c_۲e^{m_۲x} \sim c_۲e^{m_۲x}$

و چون $m_۲ > ۰$، پس شکل حدودی جواب به‌صورت مقابل است:



در ادامه برای درک بهتر موضوع، چند تمرین را با هم بررسی می‌کنیم.

تمرین ۹: نمودار جواب عمومی کدام‌یک از معادلات زیر، می‌تواند مطابق شکل نشان داده شده باشد؟



۱) $y'' + ۴y = ۰$
۲) $y'' - ۳y' - ۴y = ۰$
۳) $y'' + ۲y' + y = ۰$
۴) $y'' + ۲y' + ۲y = ۰$

حل: با توجه به جدول می‌دانیم که نمودار فوق متناظر با حالتی است که فرم کلی جواب به‌صورت $c_۱e^{m_۱x} + c_۲e^{m_۲x}$ باشد و $m_۱$ و $m_۲$ یکی مثبت و یکی منفی باشند. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $y'' + ۴y = ۰ \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} m^۲ + ۴ = ۰ \Rightarrow m_{۱,۲} = \pm ۲i$ ریشه‌های مختلط

۲) $y'' - ۳y' - ۴y = ۰ \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} m^۲ - ۳m - ۴ = ۰ \xrightarrow{\text{روش دلتا}} m_{۱,۲} = \frac{۳ \pm ۵}{۲} = ۴, -۱$

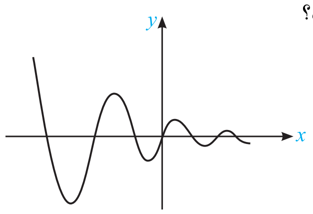
دو ریشهٔ حقیقی با علامت‌های مختلف، بنابراین با توجه به توضیحات ابتدای حل، گزینهٔ (۲) صحیح است. برای ارائهٔ پاسخ کامل، دو گزینهٔ دیگر را نیز بررسی می‌کنیم.

۳) $y'' + ۲y' + y = ۰ \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} m^۲ + ۲m + ۱ = ۰ \Rightarrow m_۱ = m_۲ = -۱$ ریشهٔ مضاعف

۴) $y'' + ۲y' + ۲y = ۰ \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} m^۲ + ۲m + ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{روش دلتا}} m_{۱,۲} = \frac{-۲ \pm ۲i}{۲}$ ریشه‌های مختلط

بنابراین، تنها گزینهٔ (۲) شرایط موردنظر ما را دارد و می‌تواند صحیح باشد.

تمرین ۱۰: نمودار جواب عمومی کدام‌یک از معادلات می‌تواند به صورت زیر باشد؟



۱) $y'' + y = ۰$
۲) $y'' - ۳y' + ۲y = ۰$
۳) $y'' + ۲y' + y = ۰$
۴) $y'' + ۲y' + ۲y = ۰$

توصیه‌نامه

معادلات مرتبه دوم و بالاتر

پس از مطالعهٔ این فصل می‌خواهیم در چهار قسمت کلی زیر، مطالبی که خواندیم را یک‌بار دیگر با هم دوره کنیم:

الف) معادلهٔ دیفرانسیل با ضرایب ثابت: یک معادلهٔ دیفرانسیل به فرم کلی $ay''+by'+cy=0$ یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم و همگن با ضرایب ثابت است و برای حل آن ابتدا باید معادلهٔ مشخصهٔ آن‌را به‌صورت زیر حل کنیم:

$$ay''+by'+cy=0 \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} am^2+bm+c=0$$

$$\xrightarrow{\text{روش دلتا}} \begin{cases} \xrightarrow{\Delta>0} m_1\neq m_2 \Rightarrow y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x} \\ \xrightarrow{\Delta=0} m_1=m_2 \Rightarrow y=c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_2x} \\ \xrightarrow{\Delta<0} m_{1,2}=\alpha\pm i\beta \Rightarrow y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$$

● اگر یک ریشهٔ حقیقی یا یک جفت ریشهٔ مختلط از مرتبهٔ تکرار r داشته باشیم، همان جواب‌های بالا را به‌ترتیب در x، x^2، ...، x^{r-1} ضرب می‌کنیم و جواب معادله برابر است با:

جواب‌های پایهٔ متناظر با ریشهٔ حقیقی m_1 از مرتبهٔ تکرار r در معادلهٔ مشخصه $\Rightarrow \underbrace{\boxed{e^{m_1x}, xe^{m_1x}, \dots, x^{r-1}e^{m_1x}}}_{r \text{ تا}}$

پایهٔ جواب‌های متناظر با جفت ریشهٔ مختلط $m_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ از مرتبهٔ تکرار r در معادلهٔ مشخصه : $\underbrace{\boxed{\begin{cases} e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}, \begin{cases} xe^{\alpha x}\cos\beta x \\ xe^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}, \dots, \begin{cases} x^{r-1}e^{\alpha x}\ \beta x \\ x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}}}_{2r \text{ تا}}$

(تمرین‌های ۱ تا ۶)

برای بررسی رفتار جواب یک معادله، نکته‌های زیر را درنظر بگیرید:

۱) جواب معادله از توابع مثلثاتی، نمایی و چندجمله‌ای تشکیل می‌شود، پس کافی است که با این سه دسته از توابع آشنا باشیم.

۲) اگر ضریب x در توان تابع نمایی منفی باشد (یعنی ریشه‌های حقیقی منفی باشند یا قسمت حقیقی ریشه‌های مختلط منفی باشند)، جواب میراست.

۳) اگر توابع مثلثاتی داشته باشیم (یعنی ریشه‌ها مختلط باشند)، جواب نوسانی است.

نتیجه: پس نوسانی بودن جواب نشان از مختلط بودن ریشه‌ها (دلتای منفی) و میرا بودن جواب نشان از منفی بودن قسمت حقیقی ریشه‌ها دارد (تمرین‌های ۹ تا ۱۲).

اگر معادله همگن نبود یعنی به‌فرم کلی $ay''+by'+cy=g(x)$ بود، آنگاه باید جواب معادله را در دو مرحله به‌دست آوریم:

مرحلهٔ اول: محاسبهٔ جواب معادلهٔ همگن متناظر $(ay''+by'+cy=0)$ که آن‌را y_c می‌نامیم.

مرحلهٔ دوم: محاسبهٔ جواب خصوصی متناظر با $g(x)$ که آن‌را y_p می‌نامیم و درنهایت جواب عمومی معادله برابر با $y = y_c + y_p$ است.

نحوهٔ به‌دست آوردن y_c را که در قبل گفتیم، برای تعیین جواب خصوصی (یا y_p) نیز به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

تعیین جواب خصوصی:

I) اگر $g(x)$ دارای عبارتی غیر از چند جمله‌ای، نمایی و سینوسی و کسینوسی بود (مثلاً شامل توابع کسری بود) فقط می‌توانیم از روش لاگرانژ (تغییر پارامتر) استفاده کنیم که شامل مراحل زیر است:

- **روش لاگرانژ:** این روش شامل مراحل زیر است:

۱) تعیین جواب‌های پایهٔ معادلهٔ همگن متناظر (یعنی y_1 و y_2)

۲) محاسبهٔ رونسکین دو جواب: $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$

۳) محاسبهٔ ضرایب $c_1(x)$ و $c_2(x)$: $c_1(x) = -\int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)} dx \;,\; c_2(x) = \int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)} dx$

۴) جواب خصوصی برابر است با: $y_p = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2$

(تمرین ۲۵)

II) اگر $g(x)$ فقط شامل توابع چندجمله‌ای، نمایی و یا سینوسی و کسینوسی بود، می‌توانیم از هر سه روش (حدس زدن، اپراتور معکوس و یا لاگرانژ) استفاده کنیم. روش لاگرانژ در این حالت توصیه نمی‌شود و بین روش‌های حدس زدن و اپراتور معکوس باید با توجه به نوع گزینه‌ها روش بهتر را انتخاب کنیم:

۱) اگر جواب خصوصی گزینه‌ها شامل ضرایب ثابت (A، B، ...) بود، بهتر است از روش حدس زدن استفاده کنیم.

۲) اگر در جواب خصوصی گزینه‌ها ضرایب ثابت به‌چشم نمی‌خورد، بهتر است از روش اپراتور معکوس استفاده کنیم.

- **روش حدس زدن:** فرم کلی جواب خصوصی در این روش به‌صورت زیر است:

جواب قابل حدس × ضریب اصلاح‌کنندهٔ جواب = y_p : جواب خصوصی

که برای تعیین ضریب اصلاح و جواب قابل حدس مطابق جدول زیر عمل می‌کنیم:

جواب قابل حدس	ضریب اصلاح‌کنندهٔ جواب $= x^r$	$g(x)$
$A_n(x)$	r تعداد دفعات تکرار ریشهٔ صفر در معادلهٔ مشخصه است.	چندجمله‌ای از درجهٔ n
$e^{\alpha x} A_n(x)$	r تعداد دفعات تکرار ریشهٔ $m = \alpha$ در معادلهٔ مشخصه است.	$e^{\alpha x}$ (چندجمله‌ای از درجهٔ n)
$A_n(x) \cos \beta x + B_n(x) \sin \beta x$	r تعداد دفعات تکرار ریشهٔ $m = \pm i\beta$ در معادلهٔ مشخصه است.	$\sin \beta x$ (چندجمله‌ای از درجهٔ n) یا $\cos \beta x$ (چندجمله‌ای از درجهٔ n)
$e^{\alpha x} A_n(x) \cos \beta x + e^{\alpha x} B_n(x) \sin \beta x$	r تعداد دفعات تکرار ریشهٔ $m = \alpha \pm i\beta$ در معادلهٔ مشخصه است.	$e^{\alpha x}$ (چندجمله‌ای) $\sin \beta x$ یا $e^{\alpha x}$ (چندجمله‌ای) $\cos \beta x$

۱۹- کدام گزینه می‌تواند شکل پیشنهادی یک انتگرال خصوصی (y_p) معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ سوم $y''' + y' = xe^x \cos(x) + 4$ باشد؟ (ریاضی - ۹۱)

۱) $y_p = e^x (A\cos x + B\sin x) + Ex$

۲) $y_p = e^x [(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x] + Ex$

۳) $y_p = e^x [(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x]$

۴) $y_p = e^x (Ax+B)\cos x + Ex$

۲۰- یک جواب خاص معادلهٔ $y'' + 4y' = x^2 + 4$ کدام‌یک از موارد زیر است؟ (عمران نقشه‌برداری - ۹۰)

۱) $y_p = Ax + B$

۲) $y_p = Ax^2 + Bx + C$

۳) $y_p = x(Ax^2 + Bx + C)$

۴) $y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C)$

۲۱- جواب خصوصی معادلهٔ $y''' - 4y' = x + 3\cos x$ کدام است؟ (معدن - ۸۶)

۱) $y_p = A_0 x + B\cos x$

۲) $y_p = A_0 x + B\cos x + C\sin x$

۳) $y_p = A_0 + A_1 x + B\cos x + C\sin x$

۴) $y_p = x(A_0 x + A_1) + B\cos x + C\sin x$

۲۲- جواب خاص معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - 2y' + 10y = e^x \cos 3x$ کدام است؟ (ایمنی - ۸۵)

۱) $y = e^{3x}(Ax\cos x + B\sin x)$

۲) $y = e^x(Ax\cos 3x + B\sin 3x)$

۳) $y = e^x(Ax\cos 3x + Bx\sin 3x)$

۴) $y = e^{-x}(Ax\cos 3x + Bx\sin 3x)$

۲۳- جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 2xe^x \sin 2x$ به کدام صورت است؟ (مکانیک - ۸۷)

۱) $(Ax+B)e^x \sin 2x$

۲) $x(Ax+B)e^x \sin 2x$

۳) $e^x((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x)$

۴) $xe^x((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x)$

۲۴- جواب خصوصی برای معادلهٔ دیفرانسیل $(D-4)^3(D^2+1)y = x^2 e^{4x}$ کدام است؟ (نفت - ۸۹)

۱) $(A + Bx + Cx^2)e^{4x}$

۲) $(Ax + Bx^2 + Cx^3)e^{4x}$

۳) $(Ax^2 + Bx^3 + Cx^4)e^{4x}$

۴) $(Ax^3 + Bx^4 + Cx^5)e^{4x}$

۲۵- جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 2y' = 4\sin 2x$ کدام است؟ (عمران - ۸۵)

۱) $y = c_1 + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$

۲) $y = c_1 + c_2 e^{-2x} - 2\sin 2x$

۳) $y = c_1 + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}\sin 2x$

۴) $y = c_1 + c_2 e^{-2x} + 2\cos 2x$

۲۶- یک جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل $y''' - 2y'' + y = \cos x + e^{2x}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک - ۸۴)

۱) $y_p = e^{2x} + \frac{1}{10}(\cos x - 3\sin x)$

۲) $y_p = 2e^{2x} + \frac{1}{10}(3\cos x - 3\sin x)$

۳) $y_p = e^{2x} + \frac{1}{10}(3\cos x - \sin x)$

۴) $y_p = 2e^{2x} + \frac{1}{10}(\cos x - 3\sin x)$

۲۷- یک جواب خصوصی معادلهٔ $y'' - 2y' + y = e^x$ کدام است؟ (عمران نقشه‌برداری - ۸۹)

۱) $\frac{1}{2}xe^x$ ۲) $\frac{1}{2}x^2e^x$ ۳) $\frac{3}{4}x^2e^x$ ۴) $\frac{3}{2}e^x$

۲۸- یک جواب معادلهٔ $y''-3y'-4y=2\sin x$ کدام است؟ (هوافضا – ۹۱)

۱) $y=\frac{3}{17}\cos x-\frac{5}{17}\sin x$
۲) $y=\frac{17}{25}\cos 2x+\frac{3}{17}\sin x$
۳) $y=xe^{(\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{2}})x}\cos x$
۴) $y=e^{(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{17}{2}})x}\cos x+\frac{5}{17}e^{(\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{17}{2}})x}\sin x$

۲۹- جواب خصوصی معادلهٔ $y''-y=e^{-x}$ وقتی $x\to+\infty$ کدام است؟ (معدن – آزاد ۸۳)

۱) صفر
۲) $-\infty$
۳) موجود نیست.
۴) ۳

۳۰- مطلوب است جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{d^2u}{dx^2}+4u=2\sin 2x$: (مواد – ۸۹)

۱) $c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-2x\cos 2x$
۲) $c_1\sin 2x-c_2\cos 2x-2x^2\cos 2x$
۳) $c_1\sin 2x-c_2\cos 2x-\frac{1}{2}x^2\sin 2x$
۴) $c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x$

۳۱- جواب عمومی معادلهٔ همگن نظیر معادلهٔ $3y''+2y'-y=x\cos x$ برابر است با: (نساجی – ۹۰)

۱) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-\frac{1}{3}x}$
۲) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-\frac{1}{3}x}$
۳) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{1}{3}x}$
۴) $y=c_1e^{x}+c_2e^{\frac{1}{3}x}$

۳۲- اگر y_1 و y_2 دو جواب $y''-2y'+y=R(x)$ بوده و $y_1(0)=y_2(0)$ و $y_1'(0)=y_2'(0)+1$ باشد، رابطهٔ بین y_1 و y_2 کدام است؟ (عمران – ۹۱)

۱) $y_1=y_2+xe^{x}$
۲) $y_1=y_2+xe^{-x}$
۳) $y_1=y_2+x^2e^{x}$
۴) $y_1=y_2+x^2e^{-x}$

۳۳- جواب عمومی معادلهٔ $(D-5)^2(D^2+4D+29)y=0$ برابر است با: (نساجی – ۸۷)

۱) $y=(c_1+c_2x)e^{-5x}+e^{2x}(c_3\cos 5x+c_4\sin 5x)$
۲) $y=(c_1+c_2x)e^{5x}+e^{-2x}(c_3\cos 5x+c_4\sin 5x)$
۳) $y=(c_1+c_2x)e^{-5x}+e^{-2x}(c_3\cos 5x+c_4\sin 5x)$
۴) $y=(c_1+c_2x)e^{5x}+e^{2x}(c_3\cos 5x+c_4\sin 5x)$

۳۴- کدام‌یک از معادلات دیفرانسیل دارای جواب‌های مستقل خطی ۱ و x و e^x و xe^x می‌باشد؟ (نساجی – ۸۶)

۱) $D^2(D-1)^2y=0$
۲) $D^2(D^2+1)y=0$
۳) $D^2(D+1)^2y=0$
۴) $D^2(D^2-1)y=0$

۳۵- جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2}$ کدام است؟ (معدن – آزاد ۸۴)

۱) $e^x\ln|x|$
۲) $-e^x\ln|x|$
۳) $e^{-x}\ln|x|$
۴) $-e^{-x}\ln|x|$

۳۶- جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل $y''+9y=\sec 3x$ کدام است؟ (ریاضی – ۸۳)

۱) $y=x\sin x+\cos 3x\ln|\sin 3x|$
۲) $y=\sin x(x+\ln|\cos 3x|)$
۳) $y=\sin 3x+\cos 3x\ln|\cos 3x|$
۴) $y=\frac{1}{9}(3x\sin 3x+\cos 3x\ln|\cos 3x|)$

۳۷- جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $3x^2y''+5xy'-y=0$ کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی - ۹۱)

۱) $y=c_1x^{-1}+c_2x^{-3}$
۲) $y=c_1x^{-1}+c_2x^{-\frac{1}{3}}$
۳) $y=c_1x^{-1}+c_2x^{\frac{1}{3}}$
۴) $y=c_1x^{-1}+c_2x^{3}$

۳۸- کدام گزینه جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $x^2y''+xy'-y=0$ است؟ (معدن - ۸۶)

۱) $y=c_1x+c_2x^{-1}$
۲) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$
۳) $y=c_1e^x+c_2xe^{-x}$
۴) $y=c_1\cos x+c_2x\sin x$

۳۹- ریشه‌های معادلهٔ شاخص $(x^2+1)x^2y''-(x^2+1)xy'+(x^2+1)y=0$ عبارت است از: (معدن - آزاد ۸۵)

۱) ۱ و ۱-
۲) ۲ و ۱
۳) ۱ و ۱
۴) ۱ و $\frac{1}{3}$

۴۰- جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $x^2y''+xy'-5y=0$ عبارت است از: (معدن - آزاد ۸۷)

۱) $c_1x^{\sqrt{5}}+c_2\ln x$
۲) $c_1x+c_2x^{-\sqrt{5}}$
۳) $c_1x^{\sqrt{5}}+c_2x^{-1}$
۴) $c_1x^{\sqrt{5}}+c_2x^{-\sqrt{5}}$

۴۱- معادلهٔ $x^2y''+xy'+y=0$ دارای جوابی به کدام صورت است؟ (مواد - آزاد ۸۶)

۱) $y=e^x$
۲) $y=\ln x$
۳) $y=e^{-x}$
۴) $y=\sin(\ln x)$

۴۲- جواب معادلهٔ دیفرانسیل $x>0$ و $x^2y''+3xy'+10y=0$ کدام گزینه است؟ (مکانیک - آزاد ۸۸)

۱) $y=x(c_1\cos(3\ln x)+c_2\sin(3\ln x))$
۲) $y=x^{-1}(c_1\cos(3\ln x)+c_2\sin(3\ln x))$
۳) $y=c_1x\cos(\ln x)+c_2x\sin(\ln x)$
۴) $y=x^{-2}(c_1\cos(2\ln x)+c_2\sin(2\ln x))$

۴۳- جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $xy''+y'+\frac{4}{x}y=0$ کدام است؟ (نفت - ۸۳)

۱) $y=c_1x^2+c_2x^{-2}$
۲) $y=c_1\cos x+c_2\sin x$
۳) $y=c_1\cos(\ln|x|)+c_2\sin(\ln|x|)$
۴) $y=c_1\cos(2\ln|x|)+c_2\sin(2\ln|x|)$

۴۴- جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $x^2y'''-3xy''+3y'=0$ کدام است؟ (مکانیک - ۹۱)

۱) $y=c_1x^4+c_2x^2+c_3$
۲) $y=c_1x^3+c_2x^4+c_3$
۳) $y=c_1x+c_2x^4+c_3$
۴) $y=c_1x^4+c_2x^2+c_3x$

۴۵- جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $2x^2y''+5xy'+y=0$ عبارت است از: (فراوری - ۸۶)

۱) $y(x)=c_1x+\frac{c_2}{\sqrt{x}}$
۲) $y(x)=\frac{c_1}{x}+c_2\sqrt{x}$
۳) $y(x)=c_1x+c_2\sqrt{x}$
۴) $y(x)=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{\sqrt{x}}$

(۱) -۳۴

معادلهٔ مشخصه را محاسبه و به‌جای m در آن D قرار دهید. توجه کنید که جواب‌های ۱ و x نشانهٔ عامل $m^{۲}$ و جواب‌های e^{x} و xe^{x} نشانهٔ عامل $(m-۱)^{۲}$ در معادلهٔ مشخصه هستند.

(۲) -۳۵

ابتدا جواب خصوصی را با روش لاگرانژ محاسبه کرده $(W(x)=e^{۲x}\ ,\ y_{۲}=xe^{x}\ ,\ y_{۱}=e^{x})$ و سپس توجه کنید که می‌توان هر مضربی جواب‌های پایه را به جواب خصوصی اضافه یا از آن کم کرد.

(۴) -۳۶

ابتدا جواب‌های پایهٔ $y_{۱}$ و $y_{۲}$ و رونسکین آنها را محاسبه کنید و سپس با استفاده از روش لاگرانژ، جواب خصوصی را به‌دست آوید.

(۳) -۳۷

معادلهٔ داده شده یک معادلهٔ کوشی‌اویلر است. معادلهٔ مشخصهٔ آن $(۳m^{۲}+۲m-۱=۰)$ را حل کرده و جواب عمومی را به‌دست آورید.

(۱) -۳۸

معادلهٔ داده شده یک معادلهٔ کوشی‌اویلر است و تنها گزینهٔ (۱) به فرم جواب‌های ممکن در این دسته از معادلات است (البته با حل معادله هم به‌همین جواب می‌رسید).

(۳) -۳۹

ابتدا دو طرف معادله را به $(x^{۲}+۱)$ تقسیم کنید تا به فرم کوشی‌اویلر $x^{۲}y''-xy'+y=۰$ تبدیل شود و سپس ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ آن‌را محاسبه کنید.

(۴) -۴۰

معادلهٔ داده شده کوشی‌اویلر است و کافیست معادلهٔ مشخصهٔ آن‌را $(m^{۲}-۵=۰)$ تشکیل داده و ریشه‌هایش را محاسبه کنید.

(۴) -۴۱

معادلهٔ مشخصهٔ $(m^{۲}+۱=۰)$ معادلهٔ کوشی‌اویلر داده شده را حل کرده و به کمک جواب عمومی آن، گزینهٔ درست را تشخیص دهید (توجه کنید که تنها گزینهٔ (۴) به فرم جواب‌های شناخته شدهٔ معادلهٔ کوشی‌اویلر است).

(۲) -۴۲

کافیست معادلهٔ مشخصهٔ $(m^{۲}+۲m+۱۰=۰)$ معادلهٔ کوشی‌اویلر داده شده را حل و جواب عمومی آن را به‌دست آورید.

(۴) -۴۳

ابتدا دو طرف معادله را در x ضرب کنید تا به فرم کوشی‌اویلر تبدیل شود و سپس جواب آن را به‌دست آورید.

(۱) -۴۴

دو طرف را در x ضرب کنید تا معادلهٔ کوشی‌اویلر مرتبهٔ ۳ به‌دست آید و سپس آن‌را حل کنید (یادآوری می‌کنیم که در تشکیل معادلهٔ مشخصهٔ این معادله داریم:

$(x^{۳}y''' \to m(m-۱)(m-۲)$

(۴) -۴۵

معادلهٔ داده شده کوشی‌اویلر با معادلهٔ مشخصهٔ $۲m^{۲}+۳m+۱=۰$ است.

(۱) -۴۶

چون جواب‌های پایه در گزینه‌ها متفاوت است، کافی است ریشه‌های معادلهٔ مشخصه را به‌دست آورید (توجه کنید که معادلهٔ داده شده کوشی‌اویلر است).

(۴) -۴۷

ابتدا جواب عمومی را محاسبه و سپس شرایط اولیه را اعمال کنید (البته توجه کنید که با امتحان کردن شرایط اولیه روی گزینه‌ها هم می‌توان جواب درست را به‌دست آورد).

(۴) -۴۸

کافی است معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ کوشی‌اویلر داده شده را تشکیل داده و حل کنید.

۴۹- (۴)

مانند تست (۴۳) عمل کنید و در انتها از خاصیت لگاریتم استفاده نمایید ($2\ln x = \ln x^2$).

۵۰- (۱)

معادلهٔ مشخصه را تشکیل داده $((m-1)(m^2+m-2))$ و با تعیین ریشه‌های آن، جواب عمومی را به‌دست آورید.

۵۱- (۱)

توجه کنید که معادلهٔ داده شده، یک معادلهٔ کوشی‌اویلر براساس R (تابع) و r (متغیر) است که ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ آن $m_1=n$ و $m_2=-(n+1)$ است.

۵۲- (۲)

توجه کنید که معادلهٔ کوشی‌اویلر تعمیم یافته $a(\alpha x+\beta)^2 y''+b(\alpha x+\beta)y'+cy=0$ با تغییرمتغیر $\alpha x+\beta=e^t$ به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود.

۵۳- (۱)

موارد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ را به کمک مشتقات زنجیره‌ای برحسب t محاسبه کرده ($\frac{dy}{dx}=-t^2\frac{dy}{dt}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}=t^4\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}$) و در معادله جایگذاری کنید.

۵۴- (۲)

توجه کنید که $x=0$ باید جزء دامنهٔ جواب باشد (پس $y_c=c_1$ جواب معادلهٔ همگن متناظر است) و در تعیین جواب خصوصی، از سری مک‌لورن تابع $\sin x$ (یادآوری: $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$) استفاده کنید.

۵۵- (۴)

ابتدا با استفاده از تغییرمتغیر $t=x+2$ معادله را به فرم کلی کوشی‌اویلر (یعنی $t^2y''-ty'+y=0$) درآورید و بعد از حل آن، دوباره به‌جای t در جواب عبارت $x+2$ قرار دهید و سعی کنید با تعیین مقادیر ثابت c_1 و c_2 گزینهٔ درست را بیابید.

۵۶- (۳)

ابتدا از تغییرمتغیر $t=x+1$ استفاده کنید، سپس معادلهٔ کوشی اویلر به‌دست آمده را حل و در نهایت در جواب به‌دست آمده، به‌جای t عبارت $x+1$ را قرار دهید.

۵۷- (۴)

با توجه به اینکه قسمت جواب معادلهٔ همگن متناظر (y_c) در گزینه‌ها متفاوت است، کافی است معادلهٔ همگن متناظر که یک معادلهٔ کوشی‌اویلر است را حل و گزینهٔ درست را انتخاب کنید.

۵۸- (۱)

روند حل کمی طولانی است. ابتدا دو طرف معادله را بر x تقسیم و y_c و y_p (با نوشتن معادلهٔ متناظر با ضرایب ثابت) را محاسبه کنید. سپس با اعمال شرایط اولیه، ضرایب c_1 و c_2 را به‌دست آورده و درنهایت با جایگذاری $x=e$، مقدار $y(e)$ را بیابید.

۵۹- (۴)

ابتدا معادلهٔ دیفرانسیل با ضرایب ثابت متناظر با معادلهٔ داده شده (با تغییرمتغیر $x=e^t$) را به‌دست آورده و جواب خصوصی آن را محاسبه کنید ($y_p(t)=-2te^{-t}$). سپس با تغییرمتغیر $t=\ln x$ جواب خصوصی را برحسب x به‌دست آورید ($y_p(x)=-\frac{2\ln x}{x}$) و درنهایت سعی کنید با اضافه و کم کردن یکی از جواب‌های پایه به آن، گزینهٔ درست را به‌دست آورید.

۶۰- (۳)

معادلهٔ داده شده کوشی‌اویلر است (دو طرف را در x^2 ضرب کنید)، پس گزینه‌های (۱) و (۴) لزوماً نادرستند (چرا؟). در بین گزینه‌های (۲) و (۳) هم کافی است جواب خصوصی آنها (یعنی x و ۱) را در معادله قرار دهید (هر کدام در معادله صدق کند جواب است).