سری عمران

پژوهشکده حمل و نقل طراحان پارسه

مجموعه کتاب‌های زیر ذره‌بین سری عمران

حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصول (طراحی هندسی راه‌ها و خیابان)

بر اساس نشریه ۴۱۵ و آشتو ۲۰۱۱

طراحی انواع قوس‌ها و رابط‌ها

طراحی انواع قوس‌های افقی و قائم و سایر اجزای راه بر مبنای نشریه ۴۱۵

آموزش مسیریابی افقی (روش پرگار و تجربی) و مسیریابی قائم (خط پروژه)

آموزش گام به گام پروژه راهسازی (به‌صورت دستی) به همراه مثال‌های متنوع و کاربردی

نگاه اصولی به طراحی تقاطع‌ها و طراحی حرفه‌ای انواع رابط‌ها

دکتر محمود صفارزاده - مهندس محمد شاکری

(استاد دانشگاه تربیت مدرس)

جلد اول

حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصل اول

۱ سفر توسط انسان (راننده و مسافر) و با کمک یک وسیلهٔ نقلیه (سواری، اتوبوس، کامیون و ...) در یک شبکهٔ ارتباطی انجام می‌پذیرد. این شبکهٔ ارتباطی شامل راه و محیطی می‌باشد که انسان به همراه وسیلهٔ نقلیه‌اش از آن عبور خواهد کرد. بنابراین می‌توان گفت مهمترین اجزایی که برای یک سفر در سیستم حمل و نقل جاده‌ای لازم است عبارتند از:

۱- استفاده‌کنندگان از راه (انسان و کالا)

۲- وسیلهٔ نقلیه (سواری، اتوبوس، کامیون و ...)

۳- راه و محیط اطراف (وسایل کنترل ترافیک، علائم راهنمایی و رانندگی، شرایط جوی و ...)

۲ به‌طور کلی هدف از طبقه‌بندی راه‌ها عبارت است از:

۱- تأمین نیازهای طراحی مهندسان

۲- به‌وجود آوردن الگوهای مشخص برای کلیهٔ دستگاه‌های اجرایی به منظور یکسان‌سازی مسیرهای مختلف

۳- رعایت اصول برنامه‌ریزی، طرح و ساماندهی

طبقه‌بندی راه‌ها براساس اهداف مختلف به سه گونه می‌باشد:

۱- طبقه‌بندی به منظور طراحی هندسی ۲- طبقه‌بندی عملکردی ۳- طبقه‌بندی براساس وضعیت پستی و بلندی

۳ منظور از طبقه‌بندی عملکردی راه، طبقه‌بندی براساس میزان دسترسی و جابه‌جایی است. به‌عبارت دیگر می‌توان گفت سهولت دسترسی و جابه‌جایی با سرعت بالا و در زمان کم از معیارهای این طبقه‌بندی می‌باشد که عملکرد مسیر را نشان می‌دهد.

۴ در طبقه‌بندی عملکردی، راه روستایی از نظر مشخصات هندسی جزء یکی از انواع راه‌های فرعی است و راه تفریحی نیز جزء راه‌های ویژه محسوب می‌شود.

۵ آزادراه و بزرگراه از نظر حداقل تعداد خطوط مشابه می‌باشند ولی بزرگراه‌ها علیرغم آزادراه‌ها که فاقد تقاطع همسطح هستند می‌توانند در نقاط محدودی با کنترل، تقاطع همسطح نیز داشته باشند.

۶ تقاطع همسطح در واقع محل برخورد دو یا چند راه ارتباطی به‌صورت همسطح یا در یک سطح است در حالی‌که در تقاطع غیرهمسطح محل تلاقی تمامی راه‌های منتهی به آن به‌صورت غیرهمسطح (در دو یا چند سطح) می‌باشد.

۷ ترانشه همان شیب مناطق جانبی عرض راه بوده که در خاکبرداری یا برش قرار دارد و شیروانی نیز همان شیب مناطق جانبی عرض راه می‌باشد که در خاکریزی قرار دارد.

۸ برای تعیین طبقه‌بندی راه براساس وضعیت عوارض زمین می‌بایست شیب متوسط مسیر را به‌دست آوریم، بنابراین داریم:

$$\bar{g}=\frac{\sum_{i=1}^{n} L_i g_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i} \Rightarrow \bar{g}=\frac{۲۰۰۰\times ۱/۵+۳۰۰۰\times ۴+۴۰۰۰\times ۳+۵۰۰۰\times ۶+۱۰۰۰\times ۸}{۲۰۰۰+۳۰۰۰+۴۰۰۰+۵۰۰۰+۱۰۰۰}=\frac{۶۵۰۰۰}{۱۵۰۰۰}=۴/۳۳\% \Rightarrow ۳<\bar{g}=۴/۳۳\%<۷$$

بنابراین با توجه به اینکه در محدودهٔ عبور مسیر، شالیزار و مرداب وجود دارد می‌توان گفت راه تپه ماهوری با مانع می‌باشد.

۹ به‌طور کلی هر پروژهٔ عمرانی راه شامل سه مرحلهٔ اصلی است:

۱- مطالعات اولیه و یا امکان سنجی طرح: در این مرحله، امکان سنجی طرح با بررسی جنبه‌های اقتصادی، اجتماعی، فنی، زیست محیطی، زمین‌شناسی، مطالعات اقلیمی و جغرافیایی، مطالعات آماری ترافیک و ... صورت می‌گیرد. این مرحله، فاز صفر نامیده می‌شود.

۲- طراحی اولیه و نهایی راه: پس از آنکه امکان احداث مسیر بررسی و تأیید شد، می‌بایست مطابق با ضوابط و معیارهای آیین‌نامه، مسیر توسط مهندسان مشاور راه طراحی گردد و تمامی نقشه‌هایی که برای اجرای آن لازم و ضروری است تهیه شود که شامل دو بخش می‌باشد:

الف) طراحی و ترسیم پلان راه، ترسیم پروفیل طولی و خط پروژهٔ مسیر (طرح قوس‌های قائم)، ترسیم پروفیل عرضی و منحنی بروکنر، ترسیم نمودار بربلندی، طراحی و جانمایی پارکینگ، خطوط کندروی بالارو و رمپ فرار اضطراری و... که فاز یک نامیده می‌شود.

ب) طرح و محاسبهٔ کامل جزئیات ابنیهٔ فنی راه (پل، تونل، دیوار حائل و ...) و نیز روسازی آن به همراه متره و برآورد پروژه با توجه به نقشه‌های اجرایی طرح و پارامترهای محاسبه شده در مرحلهٔ طراحی براساس آخرین فهرست بهای موجود که فاز دو نامیده می‌شود.

۳- پس از آنکه نقشه‌های اجرایی راه (فاز یک و فاز دو) آماده شد پیمانکار باید تحت نظر دستگاه نظارت و ناظر مقیم پروژه، عملیات احداث راه را مطابق با نقشه‌های اجرایی و دستورالعمل‌های آیین‌نامه در مدت زمان معلوم در قرارداد انجام دهد که فاز سه نامیده می‌شود.

۱۰ در فاز یک و دو یعنی مرحلهٔ طراحی اولیه و نهایی راه، نقشه‌های اجرایی تهیه می‌شوند و نقشه‌های اجرایی اصلی نیز شامل پلان راه، پروفیل طولی و مقاطع عرضی می‌باشند.

حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصل دوم

۱ با توجه به اینکه هر سانتی‌متر روی نقشه معادل ۵۰ متر روی زمین طبیعی می‌باشد پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{طول بخش } AC = ۲۰\times ۵۰ = ۱۰۰۰\ m \\ \text{طول بخش } CD = ۱۵\times ۵۰ = ۷۵۰\ m \\ \text{طول بخش } DB = ۲۵\times ۵۰ = ۱۲۵۰\ m \end{cases} \Rightarrow \text{طول کل واریانت} = ۱۰۰۰+۷۵۰+۱۲۵۰ = ۳۰۰۰\ m = ۳\ km$$

۲ با توجه به مقیاس نقشه ($\frac{۱}{۵۰۰۰}$)، هر سانتی‌متر روی نقشه معادل $۵۰۰۰\ cm$ یا $۵۰\ m$ روی زمین است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{مقیاس} = \frac{\text{اندازه ترسیمی روی نقشه}}{\text{اندازه حقیقی روی زمین}} \Rightarrow \frac{۱}{۵۰۰۰} = \frac{x(cm)}{۳/۵\times \underbrace{\boxed{۱۰۰۰}}_{\text{هر کیلومتر معادل ۱۰۰۰ متر است.}} \times \underbrace{\boxed{۱۰۰}}_{\text{هر متر معادل ۱۰۰ سانتی‌متر است.}}} \Rightarrow x = \frac{۳۵۰۰۰۰}{۵۰۰۰} = ۷۰\ cm \Rightarrow \text{اندازهٔ روی نقشه} = ۷۰\ cm$$

۳ **مقیاس عددی:** براساس داده‌های مسئله، فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B بر روی نقشه و روی زمین طبیعی مشخص است. بنابراین با توجه به تعریف مقیاس خواهیم داشت:

$$\text{مقیاس نقشه} = \frac{\text{فاصله بین دو نقطهٔ } A \text{ و } B \text{ روی نقشه}}{\text{فاصله بین دو نقطهٔ } A \text{ و } B \text{ روی زمین طبیعی}}$$

$$\Rightarrow \text{مقیاس نقشه} = \frac{۴۰\ cm}{۲\ km} = \frac{۴۰\ cm}{۲\times \underbrace{\boxed{۱۰^{۳}}}_{\text{هر کیلومتر برابر ۱۰۰۰ متر است.}} \times \underbrace{\boxed{۱۰^{۲}}}_{\text{هر متر برابر ۱۰۰ سانتی‌متر است.}}\ cm} = ۰/۰۰۰۲ = \frac{۱}{۵۰۰۰} \Rightarrow SC = \frac{۱}{۵۰۰۰}$$

مقیاس توضیحی: یک میلیمتر بر روی نقشه معادل ۵ متر می‌باشد.

۴ با توجه به مقیاس نقشه ($SC\ ۱:۱۰۰۰۰$) طول واقعی هر یک از راستاها را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مقیاس نقشه} = \frac{\text{اندازه روی نقشه}}{\text{اندازه روی زمین طبیعی}}$$

$$\text{طول } AB: \frac{۱}{۱۰۰۰۰} = \frac{۱۸}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = ۱۸۰۰۰۰\ cm \times \overbrace{\boxed{۱۰^{-۲}}}^{\text{ضریب تبدیل سانتی‌متر به متر}} \times \overbrace{\boxed{۱۰^{-۳}}}^{\text{ضریب تبدیل متر به کیلومتر}} = ۱/۸\ km$$

$$\text{طول } BC: \frac{۱}{۱۰۰۰۰} = \frac{۲۷}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = ۲۷۰۰۰۰\ cm \times ۱۰^{-۵} = ۲/۷\ km$$

$$\text{طول } CD: \frac{۱}{۱۰۰۰۰} = \frac{۳۰}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{CD} = ۳۰۰۰۰۰\ cm \times ۱۰^{-۵} = ۳\ km$$

$$\text{طول } DE: \frac{۱}{۱۰۰۰۰} = \frac{۳۵}{\overline{DE}} \Rightarrow \overline{DE} = ۳۵۰۰۰۰\ cm \times ۱۰^{-۵} = ۳/۵\ km$$

$$\Rightarrow \text{طول واریانت } \overline{ABCDE} = ۱/۸+۲/۷+۳+۳/۵ = ۱۱\ km$$

۵ همانطورکه در شکل مسئله مشاهده می‌کنید مقیاس نقشهٔ مفروض خطی می‌باشد. از این‌رو می‌بایست با کمک خط‌کش هر یک از طول‌های AB، BC و CD را اندازه گرفته و بر روی مقیاس خطی در پایین نقشهٔ توپوگرافی انطباق دهیم تا اندازهٔ واقعی هر یک از آنها بر روی زمین طبیعی به‌دست آید. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \text{طول واقعی راستای } \overline{AB} = ۱۲/۵\ km \\ \text{طول واقعی راستای } \overline{BC} = ۵\ km \\ \text{طول واقعی راستای } \overline{CD} = ۱۳/۷۵\ km \end{cases} \Rightarrow \text{طول کل واریانت } \overline{ABCD} = ۱۲/۵+۵+۱۳/۷۵ = ۳۱/۲۵\ km$$

۶ برای حل این مسئله ابتدا می‌بایست با توجه به مفروضات موجود، مقیاس را به‌دست آورد. بنابراین با توجه به تعریف مقیاس خواهیم داشت:

$$\text{مقیاس} = \frac{\text{اندازه روی نقشه}}{\text{اندازه واقعی روی زمین طبیعی}} = \frac{۳\ cm}{۱/۵\ m} = \frac{۳\ cm}{۱۵۰\ cm} = \frac{۱}{۵۰} \Rightarrow SC = \frac{۱}{۵۰}$$

حال به راحتی براساس مقیاس به‌دست آمده می‌توان با توجه به تعریف مقیاس سطحی، مقدار واقعی ۳ سانتی‌متر مربع روی نقشه را تعیین کرد. پس داریم:

$$(\text{مقیاس})^{۲} = \frac{\text{مساحت روی نقشه}}{\text{مساحت واقعی روی زمین طبیعی}} \Rightarrow (\frac{۱}{۵۰})^{۲} = \frac{۳(cm^{۲})}{x(m^{۲})} \Rightarrow x = ۵۰^{۲}\times ۳ = ۷۵۰۰\ cm^{۲}\times ۱۰^{-۴} = ۰/۷۵\ m^{۲}$$

۷ با توجه به تعریف شیب برای مسیر AB داریم:

$$\text{شیب} = \frac{\text{اختلاف ارتفاع دو نقطه } A \text{ و } B \text{ بر حسب متر}}{\text{فاصله افقی دو نقطه } A \text{ و } B \text{ بر حسب متر}}$$

اما از آنجاکه نقطهٔ B بر روی منحنی تراز قرار نگرفته است از این‌رو ابتدا می‌بایست ارتفاع نقطهٔ B را به‌دست آورد، بنابراین داریم:

$$H_B = H_C + \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} \times \Delta H = ۱۱۵ + \frac{۱۵}{۲۵} \times ۵ = ۱۱۸\ m$$

حال می‌بایست فاصلهٔ افقی واقعی دو نقطهٔ A و B را برحسب متر (اندازه واقعی روی زمین طبیعی) تعیین کرد، پس خواهیم داشت:

$$\text{مقیاس} = \frac{\text{فاصله افقی } \overline{AB} \text{ روی نقشه}}{\text{فاصله افقی } \overline{AB} \text{ روی زمین طبیعی}} \Rightarrow L_{AB} = \frac{۱۸۰}{\frac{۱}{۲۰۰۰}} = ۳۶۰۰۰۰\ mm \times ۱۰^{-۳} = ۳۶۰\ m$$

اکنون می‌توان شیب مسیر AB را به‌دست آورد:

$$g_{AB} = \frac{\Delta H_{AB}}{L_{AB}} = \frac{۱۱۸ - ۱۰۰}{۳۶۰} = \frac{۱۸}{۳۶۰} = ۰/۰۵ \Rightarrow g_{AB} = ۵\%$$

۸ با توجه به مطالب توضیح داده شده در مورد نحوهٔ شناسایی نوع عوارض زمین خواهیم داشت:

مقطع عرضی	الف	ب	پ	ت	ث	ج
منحنی تراز	۶	۱	۴	۳	۲	۵

۹ فاصلهٔ دهانهٔ پرگار همان طول خط صفر است، پس داریم:

$$L_{min} = \frac{\Delta H}{i_{max}} \times E = \frac{۱۰}{۰/۰۵} \times \frac{۱}{۲۰۰۰} = ۰/۱\ m \times \underbrace{\boxed{۱۰^{۳}}}_{\text{ضریب تبدیل متر به میلی‌متر}} = ۱۰۰\ mm$$

۱۰ با توجه به رابطهٔ طول خط مبنا داریم:

$$L_{min} = \frac{\Delta H}{i_{max}} \times E \Rightarrow E = \frac{i_{max} \times L_{min}}{\Delta H} = \frac{۰/۰۵ \times ۰/۰۵}{۵} = \frac{۰/۰۰۲۵}{۵} = \frac{۱}{۲۰۰۰} \Rightarrow SC = E = \frac{۱}{۲۰۰۰}$$

۱۱ برای آنکه بدانیم رسم واریانت‌های AB و BC امکان‌پذیر است، می‌بایست شیب هر یک از واریانت‌ها را کنترل کنیم به‌گونه‌ای که اگر شیب آنها کمتر از حداکثر شیب مجاز باشد ترسیم واریانت‌ها امکان‌پذیر است. از این‌رو با توجه به مقیاس نقشه، طول واقعی واریانت‌ها را به‌دست می‌آوریم، پس داریم:

$$\text{مقیاس} = \frac{\text{اندازه روی نقشه}}{\text{اندازه واقعی روی زمین طبیعی}} \Rightarrow \frac{۱}{۵۰۰۰} = \frac{۴\ cm}{\text{اندازه واقعی روی زمین طبیعی}}$$

$$\Rightarrow \text{اندازه واقعی } AB \text{ و } BC \text{ روی زمین طبیعی} = ۴ \times ۵۰۰۰ = ۲۰۰۰۰\ cm \times ۱۰^{-۲} = ۲۰۰\ m$$

حال می‌بایست با استفاده از رابطهٔ شیب، شیب هر یک از واریانت‌ها را با شیب مجاز کنترل کنیم. از سوی دیگر با توجه به جدول (۲) از فصل دهم مقدار حداکثر شیب طولی مجاز بر مبنای آیین‌نامهٔ طرح هندسی راه‌های ایران (نشریهٔ شمارهٔ ۴۱۵) برای مسیری با سرعت طرح ۸۰ کیلومتر در ساعت واقع در منطقهٔ تپه ماهوری برابر با ۵ درصد می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$i = \frac{\Delta H}{L} \quad , \quad i_{max} = ۵\%$$

$$i_{AB} = \frac{۱۱۰ - ۱۰۰}{۲۰۰} = ۰/۰۵ = ۵\% \le i_{max} \qquad OK$$

$$i_{BC} = \frac{۱۲۵ - ۱۱۰}{۲۰۰} = ۰/۰۷۵ = ۷/۵\% > i_{max} \qquad Not\ OK$$

پس فقط رسم واریانت AB امکان‌پذیر است.

۱۲ الف) با توجه به اطلاعات مسئله، طول مسیرهای ۱ و ۲ را به‌دست می‌آوریم و سپس شیب هر یک را کنترل می‌کنیم. پس می‌توان نوشت:

$$\text{مسیر (۱)}: i_{AC} = \frac{\Delta H_{AC}}{L_{AC}} = \frac{۱۰۱۰ - ۱۰۰۰}{۷/۵ \times ۲۰۰۰ \times ۱۰^{-۲}} \cong ۶/۷\% < ۱۰\% \qquad OK$$

$$i_{BC} = \frac{\Delta H_{BC}}{L_{BC}} = \frac{۱۰۲۰ - ۱۰۱۰}{۷/۵ \times ۲۰۰۰ \times ۱۰^{-۲}} \cong ۶/۷\% < ۱۰\% \qquad OK$$

پس رسم مسیر (۱) امکان‌پذیر است.

$$i_{AB} = \frac{\Delta H_{AB}}{L_{AB}} = \frac{۱۰۲۰-۱۰۰۰}{۷/۵\times\sqrt{۲}\times۲۰۰۰\times۱۰^{-۲}} = ۹/۴۲\% < ۱۰\% \qquad OK$$: مسیر (۲)

بنابراین رسم مسیر (۲) نیز امکان‌پذیر می‌باشد.

ب) ابتدا طول هر یک از مسیرها را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

طول مسیر (۱) : $L_{AC} + L_{BC} = ۲L_{AC} = ۲\times۷/۵\times۲۰۰۰\times۱۰^{-۲} = ۳۰۰m$

طول مسیر (۲) : $L_{AB} = ۷/۵\times\sqrt{۲}\times۲۰۰۰\times۱۰^{-۲} = ۲۱۲/۱۳m$

با توجه به هزینهٔ مسیر در خاک بستر ضعیف و خاک بستر قوی خواهیم داشت:

هزینه اجرای مسیر (۱) : $۳۰۰\times x = ۳۰۰x$

هزینه اجرای مسیر (۲) : $۲۱۲/۱۳\times۲x = ۴۲۴/۲۶x$

$\Rightarrow$ هزینه اجرای مسیر (۱) < هزینه اجرای مسیر (۲)

پس با توجه به اطلاعات مسئله می‌توان گفت که اجرای مسیر (۱) نسبت به مسیر (۲) به صرفه‌تر می‌باشد.

حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصل سوم

۱ مطابق جدول (۱) مدت زمانی که جهت انطباق چشم در حرکت از روشنایی به تاریکی نیاز است، ۶ ثانیه می‌باشد. پس با توجه به رابطهٔ سرعت از علم فیزیک داریم:

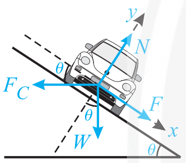
$$x = V \times t = \frac{۷۲}{\underbrace{۳/۶}_{\text{تبدیل واحد } km/hr \text{ به } m/s}} \times ۶ = ۱۲۰\, m$$

بنابراین مسافت ۱۲۰ متر ابتدای تونل با دید کور پیموده می‌شود و مسافت $۵۰۰ - ۱۲۰ = ۳۸۰\, m$ انتهای تونل با دید کور پیموده نمی‌شود.

۲ با توجه به جدول (۳) برای اتوبوس نوع دوم خواهیم داشت:

شعاع گردش مرکز محور جلو $= ۱۲/۴۴\, m$
حداقل شعاع دایرهٔ داخلی گردش $= ۷/۸\, m$
شعاع گردش لبهٔ خارجی $= ۱۴/۶\, m$
طول خودروی طرح $= ۱۳/۷\, m$
عرض خودروی طرح $= ۲/۶\, m$
حداقل شعاع دایرهٔ خارجی گردش $= ۱۳/۷\, m$

۳ ابتدا دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر وسیلهٔ نقلیه را رسم می‌کنیم:



F: نیروی اصطکاک
W: نیروی وزن
N: نیروی عکس‌العمل عمودی سطح
F_C: نیروی گریز از مرکز

به یک وسیلهٔ نقلیه چهار نیروی F، N، W و F_C وارد می‌شود. حال با نوشتن معادلات تعادل در راستای x و y داریم:

$$۱)\ \sum F_x = ۰ \Rightarrow F + \overbrace{W_x}^{W\sin\theta} = \overbrace{F_{C_x}}^{F_C\cos\theta} \Rightarrow F + W\sin\theta = F_c\cos\theta \qquad (۱)$$

$$۲)\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow \overbrace{F_{C_y}}^{F_c\sin\theta} + \overbrace{W_y}^{W\cos\theta} = N \Rightarrow F_C\sin\theta + W\cos\theta = N \qquad (۲)$$

با قرار دادن $F = f.N$ و با جایگذاری N از رابطهٔ ۲ در رابطهٔ ۱ خواهیم داشت:

$$fN + W\sin\theta = F_C\cos\theta \Rightarrow f\ \overbrace{(F_C\sin\theta + W\cos\theta)}^{N} + W\sin\theta = F_C\cos\theta$$

در ادامه با تقسیم طرفین رابطهٔ فوق بر $W\cos\theta$ خواهیم داشت:

$$f(\frac{F_C}{W}\tan\theta + ۱) + \tan\theta = \frac{F_C}{W} \Rightarrow f(\frac{F_C}{W})\tan\theta + f + \tan\theta - \frac{F_C}{W} = ۰$$

$$\frac{F_C}{W}(f\tan\theta - ۱) = -f - \tan\theta \Rightarrow \frac{F_C}{W} = \frac{f + \tan\theta}{۱ - f\tan\theta}$$

$$\frac{F_C}{W} = \frac{۰/۱۴ + \tan۶}{۱ - ۰/۱۴ \times \tan۶} = \frac{۰/۲۴۵}{۰/۹۸۵} = ۰/۲۴۸$$

۴ با توجه به اینکه ۷۰ درصد نیروی گریز از مرکز توسط اصطکاک خنثی می‌شود، داریم:

$$\frac{e}{e+f} = ۱ - x \Rightarrow \frac{e}{e+f} = ۰/۳۰ \qquad (۱)$$

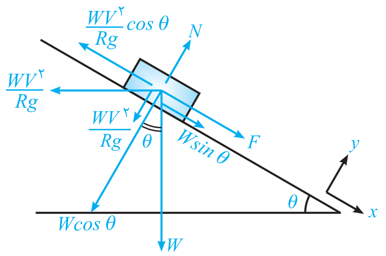
از سوی دیگر با توجه به رابطهٔ حداقل شعاع قوس دایره‌ای ساده می‌توان نوشت:

$$R_{min} = \frac{V^۲}{۱۲۷/۲(e+f)} \Rightarrow e + f = \frac{V^۲}{۱۲۷/۲\, R_{min}} = \frac{۸۰^۲}{۱۲۷/۲ \times ۲۱۰} = ۰/۲۳۹ \qquad (۲)$$

حال با توجه به روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{e}{e+f} = ۰/۳۰ \\ e + f = ۰/۲۳۹ \end{cases} \Rightarrow \frac{e}{۰/۲۳۹} = ۰/۳۰ \Rightarrow e = ۰/۰۷۱۷ \cong ۷\%$$

۵ با نوشتن معادلهٔ تعادل در راستای x و y داریم:



$$\begin{cases}\sum F_x = ۰ \Rightarrow F - F_{C_x} + W_x = ۰ \Rightarrow F = \dfrac{WV^۲}{Rg}\cos\theta - W\sin\theta & (۱)\\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow N - F_{C_y} - W_y = ۰ \Rightarrow N = \dfrac{WV^۲}{Rg}\sin\theta + W\cos\theta & (۲)\end{cases}$$

حال با تقسیم رابطهٔ (۱) بر (۲) و بعد از آن تقسیم صورت و مخرج کسر بر $\cos\theta$ خواهیم داشت:

$$\frac{F}{N} = \frac{\dfrac{V^۲}{Rg}\cos\theta - \sin\theta}{\dfrac{V^۲}{Rg}\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\dfrac{V^۲}{Rg} - \tan\theta}{\dfrac{V^۲}{Rg}\tan\theta + ۱} \Rightarrow \frac{N}{F} = \frac{\dfrac{V^۲}{Rg}\tan\theta + ۱}{\dfrac{V^۲}{Rg} - \tan\theta}$$

۶ با توجه به اطلاعات مسئله و رابطهٔ تعیین حداقل شعاع قوس دایره‌ای ساده به روش سعی و خطا خواهیم داشت:

$$R_{min} = \frac{V^۲}{۱۲۷/۲(e_{max} + f_{max})} \quad , \quad e_{max} = ۱۲\%$$

$$\text{سعی (۱)}: V = ۱۲۰\ km/hr \xrightarrow[f=۰/۰۹]{\text{از جدول (۱۰)}} R_{min} = \frac{۱۲۰^۲}{۱۲۷/۲\times(۰/۱۲+۰/۰۹)} = ۵۳۹/۰۸\ m > ۴۱۵\ m \qquad Not\ OK$$

$$\text{سعی (۲)}: V = ۱۱۰\ km/hr \xrightarrow[f=۰/۱۱]{\text{از جدول (۱۰)}} R_{min} = \frac{۱۱۰^۲}{۱۲۷/۲(۰/۱۲+۰/۱۱)} = ۴۱۳/۵۹ < ۴۱۵ \qquad OK$$

پس حداکثر سرعت طرح مسیر، $۱۱۰\,km/hr$ می‌باشد.

۷ ابتدا به کمک درونیابی خطی، ضریب اصطکاک جانبی در سرعت مجاز حرکت را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

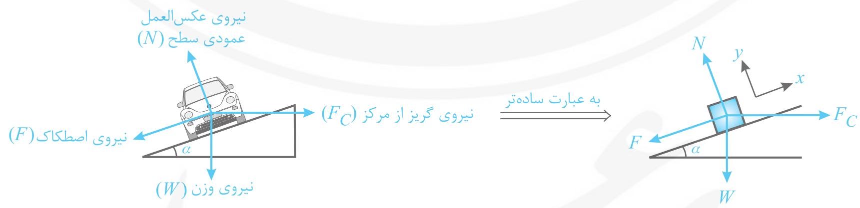
$$\frac{۴۰-۹۰}{۰/۱۶۵-۰/۱۳} = \frac{۴۰-۷۰}{۰/۱۶۵-x} \Rightarrow -۱/۰۵ = -۸/۲۵ + ۵۰x \Rightarrow x = f = ۰/۱۴۴$$

حال با توجه به اطلاعات مسئله، حداقل شعاع قوس افقی را به‌دست آورده و با مقدار شعاع اجرا شده مقایسه می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$R_{min} = \frac{V^۲}{۱۲۷/۲(e_{max} + f_{max})} = \frac{V^۲}{۱۲۷/۲(۰/۰۴+۰/۱۴۴)} = ۲۰۹/۳۵\ m \Rightarrow R_{min} \cong ۲۱۰\ m > ۱۸۰\ m \qquad Not\ OK$$

پس طراحی قوس افقی به‌طور مناسب انجام نشده است.

۸ مطابق شکل زیر، نیروهای وارد بر وسیلهٔ نقلیه در قوس را در نظر بگیرید:



حال با توجه به داده‌های مسئله از آنجا که حداکثر بربلندی ۸ درصد است، بنابراین داریم:

$$e = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \arctan e \Rightarrow \alpha = \arctan ۰/۰۸ = ۴/۵۷^\circ$$

اکنون با توجه به شکل معادلهٔ تعادل را در راستای x می‌نویسیم:

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{C_x} - F - W_x = ۰ \Rightarrow F_{C_x} = F + W_x$$

$$F_{C_x} = \frac{WV^۲}{Rg}\cos\alpha = \frac{W\times(\frac{۵۴}{۳/۶})^۲}{۱۵۰\times۹/۸۱}\times\cos ۴/۵۷ = ۰/۱۵۲W \Rightarrow W_x = W\sin\alpha = W\sin ۴/۵۷ = ۰/۰۷۹W$$

از آنجا که سطح سواره‌رو کاملاً یخزده است پس ضریب اصطکاک جانبی را صفر در نظر می‌گیریم. از سوی دیگر با توجه به آنکه F_{C_x} از W_x بزرگتر می‌باشد، بنابراین خودرو به سمت خارج قوس لغزش می‌کند.

$$F = \mu N = fN = ۰\times N = ۰$$

$$F_{C_x} > W_x \Rightarrow \text{لغزش به سمت خارج قوس}$$

۹ با توجه به نوع راه و شرایط جغرافیایی منطقه، مقادیر V، e_{max} و f_{max} را از جداول (۶)، (۸) و (۱۰) به شرح زیر تعیین می‌کنیم:

$$V_{Design}=60\ km/hr \quad , \quad e_{max}=8\% \quad , \quad f_{max}=0.153$$

حال با توجه به رابطهٔ تعیین حداقل شعاع قوس دایره‌ای داریم:

$$R_{min}=\frac{V^2}{127.2(e_{max}+f_{max})}=\frac{60^2}{127.2(0.08+0.153)}=121.46\ m \Rightarrow R_{min}\cong 125\ m$$

۱۰ با توجه به رابطهٔ مسافت ترمز (d_b) داریم:

$$d_b=\frac{V^2}{254(\frac{a}{9.81}\pm G)}=\frac{60^2}{254(\frac{4.2}{9.81}+0.05)}=29.64\ m<30\ m$$

پس اتوبوس در فاصلهٔ $30-29.64=0.36\ m$ قبل از تابلوی ایست متوقف می‌شود.

۱۱ مسافت دید توقف را برای هر دو خودروی A و B به‌طور جداگانه محاسبه کرده و با فاصلهٔ اولیهٔ هر دو خودرو از خودروی C مقایسه می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$SSD=d_r+d_b=0.278Vt+\frac{V^2}{254(\frac{a}{9.81}\pm G)}$$

$$SSD_A=0.278\times 90\times 3.2+\frac{90^2}{254(\frac{3.4}{9.81}+0.07)}=80.06+76.55=156.61\ m \Rightarrow SSD_A=156.61\ m<160\ m$$

$$SSD_B=0.278\times 90\times 1.7+\frac{90^2}{254(\frac{3.4}{9.81}-0.07)}=42.53+115.29\ m=157.82\ m \Rightarrow SSD_B=157.82\ m>140\ m$$

پس خودروی A در فاصلهٔ ۳/۳۹ متری از خودروی C متوقف می‌شود اما خودروی B با خودروی C برخورد می‌کند.

۱۲ با توجه به فرضیات مسئله می‌توان نوشت:

مسافت دید توقف در سرپایینی = مسافت دید توقف در سربالایی + $20\ m$

$$0.278Vt+\frac{V^2}{254(\frac{a}{9.81}-G)}=0.278Vt+\frac{V^2}{254(\frac{a}{9.81}+G)}+20 \Rightarrow \frac{V^2}{254(\frac{a}{9.81}-G)}-\frac{V^2}{254(\frac{a}{9.81}+G)}-20=0$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{254}\cong 0.0039\ ,\ a=3.4\ m/s^2]{V=110\ km/hr} \frac{0.0039\times 110^2}{(\frac{3.4}{9.81}-G)}-\frac{0.0039\times 110^2}{(\frac{3.4}{9.81}+G)}-20=0 \Rightarrow \frac{0.0039\times 110^2}{0.3465-G}-\frac{0.0039\times 110^2}{0.3465+G}-20=0$$

حال طرفین معادلهٔ فوق را در $0.120-G^2$ ضرب می‌کنیم، پس خواهیم داشت:

$$47.19(0.3465+G)-47.19(0.3465-G)-20(0.120-G^2)=0 \Rightarrow 16.351+47.19G-16.351+47.19G-2.4+20G^2=0$$

$$20G^2+94.38G-2.4=0 \xrightarrow{\text{حل معادله درجه ۲}} G=\frac{-94.38\pm\sqrt{(94.38)^2-4(20)(-2.4)}}{2\times 20}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_1=0.025 \quad \text{یا} \quad G_1=2.5\%\ \text{قابل قبول} \\ G_2=4.74 \quad \text{یا} \quad G_2=474\%\ \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

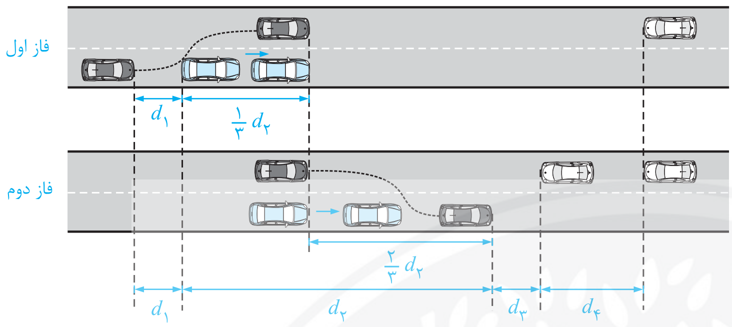
۱۳ با توجه به اطلاعات مسئله، ابتدا مسافت دید توقف را به‌دست می‌آوریم، بنابراین داریم:

$$SSD=0.278Vt+\frac{V^2}{254(f\pm G)}=0.278\times 120\times 2.5+\frac{120^2}{254(0.27+0.06)}=83.4+171.796=255.196\ m$$

حال برای یافتن فاصلهٔ راننده تا مانع در لحظهٔ دیدن آن می‌توان نوشت:

D_{object} = فاصلهٔ راننده تا مانع در لحظهٔ دیدن آن = $255.196+5=260.196\ m\cong 260.2\ m$

۱۴ از آنجا که فاصلهٔ دید سبقت به چهار قسمت تقسیم می‌شود با توجه به اطلاعات مسئله مـی‌تـوان دریافـت کـه مقـدار مـسافت نزدیـک شـدن خودروی C همان مسافت $d_۴$ است، پس داریم:



مراحل سبقت گیری در استاندارد آشتو

$$PSD = d_۱ + d_۲ + d_۳ + d_۴$$

$$d_۲ = ۰/۲۷۸\, Vt = ۰/۲۷۸ \times ۱۰۰ \times ۱۵ = ۴۱۷\, m$$

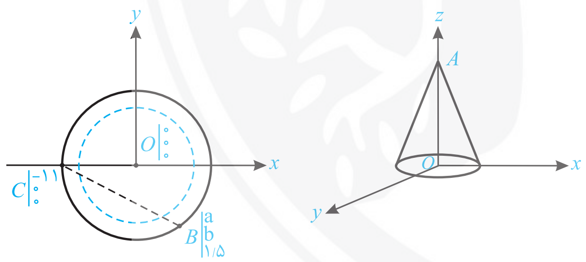
$$d_۴ = \frac{۲}{۳} d_۲ = \frac{۲}{۳} \times ۴۱۷ = ۲۷۸\, m$$

۱۵ با توجه به مفروضات مسئله می‌توان دریافت که مانور اجتنابی دارای وضعیت D می‌باشد. بنابراین براساس رابطهٔ مسافت دید انتخابی برای ایـن وضعیت داریم:

D مانور اجتنابی : $t = ۱۲/۱\, s - ۱۲/۹\, s \Rightarrow t = ۱۲/۵\, s$

$DSD = ۰/۲۷۸\, Vt = ۰/۲۷۸ \times ۹۰ \times ۱۲/۵ = ۳۱۲/۷۵\, m$

۱۶ مطابق شکل زیر، مبدأ مختصات را در مرکز مقطع مخروط در نظر می‌گیریم (نقطهٔ O). به دلیل تقارن مخروط حول محـور مرکـزی، مـی‌تـوان محل قرار گرفتن سکه را در نقطهٔ مشخصی در نظر گرفت (مثلاً نقطهٔ C). حال فرض می‌کنیم اگـر موتورسـوار بـه نقطهٔ B برسـد، بتوانـد سـکه را مشاهده کند. بنابراین برای حل مسئله کافیست طول پاره‌خط BC و نیز طول کمان BC محاسبه شود. برای این منظـور، ابتـدا معادلـهٔ خـط BC و معادلهٔ کلی مخروط را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:



معادله خط BC در فضا : $\dfrac{x - x_۱}{\underbrace{a}_{x_۲ - x_۱}} = \dfrac{y - y_۱}{\underbrace{b}_{y_۲ - y_۱}} = \dfrac{z - z_۱}{\underbrace{c}_{z_۲ - z_۱}} \Rightarrow \dfrac{x + ۱۱}{a + ۱۱} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{۱/۵} = r \qquad (I)$

معادله کلی مخروط : $\dfrac{(x - x_۰)^۲}{m^۲} + \dfrac{(y - y_۰)^۲}{n^۲} = \dfrac{(z - z_۰)^۲}{t^۲} \xrightarrow[x_۰ = y_۰ = ۰]{\text{به علت تقارن حول محورهای } x \text{ و } y \; m = n = ۱} x^۲ + y^۲ = \dfrac{(z - z_۰)^۲}{t^۲} \qquad (II)$

حال با توجه به رابطهٔ (II) برای دو نقطهٔ O و A می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} A: z = z_۰ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۰ \xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطهٔ } (II)} z_۰ = ۲۰ \\ O: z = ۰ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۱۰^۲ \xrightarrow[z_۰ = ۲۰]{\text{جایگذاری در رابطهٔ } (II)} t = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow x^۲ + y^۲ = \frac{(z - ۲۰)^۲}{۴} \qquad (III)$$

همچنین برای رابطهٔ (I) خواهیم داشت:

$$\left\{\begin{array}{l} x + ۱۱ = r(a + ۱۱) \\ y = br \\ z = ۱/۵ r \end{array}\right. \xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطهٔ } (III)} (ar + ۱۱r - ۱۱)^۲ + (br)^۲ = \frac{(۱/۵ r - ۲۰)^۲}{۴}$$

چون خط دید BC بر مخروط مماس می‌شود، معادلهٔ فوق تنها باید یک جواب داشته باشد، پس داریم:

$$a^۲ r^۲ + ۱۲۱ r^۲ + ۱۲۱ + ۲۲ a r^۲ - ۲۲ a r - ۲۴۲ r + ۱۲۱ r^۲ - b^۲ r^۲ = \frac{۱/۵^۲}{۴} r^۲ + ۱۰۰ - ۱۵ r$$

$$\Rightarrow r^۲ (a^۲ + ۱۲۱ + ۲۲ a + ۱۲۱ - a^۲ - \frac{۱/۵^۲}{۴}) + r(-۲۲ a - ۲۴۲ + ۱۵) + ۱۲۱ - ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow r^۲ (۲۲ a + ۲۴۱/۴) + r(-۲۲ a - ۲۲۷) + ۲۱ = ۰$$

پس مقدار Δ معادلهٔ درجهٔ دوم فوق باید برابر صفر باشد، از این رو می‌توان نوشت:

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (-۲۲a - ۲۲۷)^۲ = ۴\times(۲۲a + ۲۴۱/۴)\times ۲۱ \Rightarrow ۴۸۴a^۲ + ۵۱۵۲۹ + ۹۹۸۸a = ۱۸۴۸a + ۲۰۲۷۷/۶ \Rightarrow ۴۸۴a^۲ + ۸۱۴۰a + ۳۱۲۵۱/۴ = ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ + ۱۶/۸۲a + ۶۴/۵۷ = ۰ \xrightarrow{\text{حل معادله درجه دوم}} a = \frac{-۱۶/۸۲ \pm \sqrt{(۱۶/۸۲)^۲ - ۴(۱)\times(۶۴/۵۷)}}{۲\times ۱} = \frac{-۱۶/۸۲ \pm ۴/۹۶}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_۱ = -۱۰/۸۹ & \text{غیر قابل قبول} \\ a_۲ = -۵/۹۳ & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

از سوی دیگر برای دایرهٔ بیرونی خواهیم داشت:

$$\text{معادلهٔ دایرهٔ بیرونی} : (x - x_۰)^۲ + (y - y_۰) = r^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۱۲۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری نقطه } B} \begin{cases} a^۲ + b^۲ = ۱۲۱ \\ a = -۵/۹۳ \end{cases} \Rightarrow b = ۹/۲۶$$

$$\text{طول پاره خط } BC : \sqrt{۱/۵^۲ + ۹/۲۶^۲ + (-۵/۹۳ + ۱۱)^۲} = ۱۰/۶۶m \Rightarrow \theta = ۲\arcsin\frac{\frac{BC}{۲}}{۱۱} \Rightarrow \theta \cong ۵۸^\circ \Rightarrow \text{طول کمان } BC = ۱۱/۱۳m$$

حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصل چهارم

۱ با توجه به آمار ترافیک مفروض در یک سال، ابتدا می‌بایست متوسط حجم ترافیک روزانه در سال را به دست آوریم، بنابراین داریم:

$$AADT = \frac{\text{تعداد کل وسایل نقلیه عبوری در سال}}{۳۶۶} = \frac{۳۰۰۰۰۰۰}{\underbrace{\boxed{۳۶۶}}_{\text{تعداد روز سال کبیسه}}} = ۸۱۹۶/۷۲\ veh/day \Rightarrow AADT \cong ۸۱۹۷\ veh/day$$

حال با توجه به اینکه نوع مسیر بزرگراه، حومهٔ شهری است از جدول (۲)، ضرایب K و D به شرح زیر است:

$$K = ۰/۱۲ - ۰/۱۵ \cong ۰/۱۳۵ \quad , \quad D = ۰/۵۵ - ۰/۶۵ \cong ۰/۶۰$$

اکنون با جایگذاری K و D در رابطهٔ $DDHV$ خواهیم داشت:

$$DDHV = K \times D \times AADT = ۰/۱۳۵ \times ۰/۶۰ \times ۸۱۹۷ = ۶۶۳/۹۵۷\ veh/hr \Rightarrow DDHV \cong ۶۶۴\ veh/hr$$

۲ با توجه به اطلاعات داده شده، ابتدا بایستی نرخ جریان را در هر فاصلهٔ زمانی به دست آورد، بنابراین داریم:

$$V_۱ = \frac{۱۵۰}{\boxed{۰/۱۶۶۶}} = \boxed{۹۰۰/۳۶\ vph} \cong ۹۰۱\ vph \qquad \frac{۱۰}{۶۰} \cong ۰/۱۶۶۶\ hr$$

$$V_۲ = \frac{۱۵۵}{۰/۱۶۶۶} = ۹۳۰/۳۷\ vph \cong ۹۳۱\ vph$$

$$V_۳ = \frac{۱۸۰}{۰/۱۶۶۶} = \frac{۱۸۰}{۰/۱۶۶۶} = ۱۰۸۰/۴۳\ vph \cong ۱۰۸۱\ vph \qquad V_۴ = \frac{۱۷۰}{۰/۱۶۶۶} = ۱۰۲۰/۴۰\ vph \cong ۱۰۲۱\ vph$$

$$V_۵ = \frac{۱۶۵}{۰/۱۶۶۶} = ۹۹۰/۳۹\ vph \cong ۹۹۱\ vph \qquad V_۶ = \frac{۱۴۰}{۰/۱۶۶۶} = ۸۴۰/۳۳\ vph \cong ۸۴۱\ vph$$

بر مبنای نرخ‌های جریان محاسبه شده می‌توان دریافت که بیشترین نرخ جریان مربوط به بازهٔ زمانی ۸:۳۰–۸:۲۰ می‌باشد:

$$V_{max} = ۱۰۸۱\ vph$$

حال با استفاده از رابطهٔ ضریب ساعت اوج داریم:

$$PHF = \frac{\sum_{i=۱}^{n} V_i}{n \times V_{max}} = \frac{۹۰۱ + ۹۳۱ + ۱۰۸۱ + ۱۰۲۱ + ۹۹۱ + ۸۴۱}{۶ \times ۱۰۸۱} = ۰/۸۸۸۹ \Rightarrow PHF \cong ۰/۸۹$$

۳ با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$V = ۴۰۰\ veh/hr \quad , \quad P_T = ۲۵\% \quad , \quad P_B = ۲۰\% \quad , \quad P_R = ۱۵\%$$

از آنجا که آزادراه در منطقهٔ تپه ماهوری قرار دارد پس ضرایب هم‌ارز سواری بر اساس جدول (۳) به شرح زیر است:

$$E_T = E_B = ۴/۵ \quad , \quad E_R = ۴$$

حال به راحتی می‌توان ضریب تصحیح حجم وسایل نقلیهٔ سنگین را به صورت زیر برآورد کرد:

$$f_{HV} = \frac{۱}{۱ + P_T(E_T - ۱) + P_B(E_B - ۱) + P_R(E_R - ۱)} = \frac{۱}{۱ + ۰/۲۵(۴/۵ - ۱) + ۰/۲۰(۴/۵ - ۱) + ۰/۱۵(۴ - ۱)} = \frac{۱}{۳/۰۲۵} = ۰/۳۳$$

اکنون حجم معادل خودروی سواری برابر است با:

$$V_{PC} = \frac{V_{vph}}{f_{HV}} = \frac{۴۰۰}{۰/۳۳} = ۱۲۱۲/۱۲\ pcu/hr \Rightarrow V_{PC} \cong ۱۲۱۳\ pcu/hr$$

۴ الف) با توجه به مفروضات مسئله، ابتدا سرعت متوسط زمانی و مکانی را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$TMS = \frac{\sum_{i=۱}^{n} V_i}{n} = \frac{۹۰ + ۹۵ + ۹۸ + ۱۰۲ + ۱۰۵}{۵} = ۹۸\ km/hr \quad , \quad SMS = \frac{d}{\frac{\sum t_i}{n}} = \frac{۵}{\frac{۰/۲۵۵۸}{۵}} = ۹۷/۷۳\ km/hr$$

ب) ابتدا به روش مستقیم به صورت زیر، واریانس سرعت مکانی را به دست می‌آوریم:

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (V_i - \bar{V})^۲}{n} = \frac{(۹۰ - ۹۸)^۲ + (۹۵ - ۹۸)^۲ + (۹۸ - ۹۸)^۲ + (۱۰۲ - ۹۸)^۲ + (۱۰۵ - ۹۸)^۲}{۵} = ۲۷/۶$$

حال بر اساس رابطهٔ بین SMS و TMS نیز می‌توان واریانس سرعت مکانی را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$TMS = SMS + \frac{\sigma_S^۲}{SMS} \Rightarrow ۹۸ = ۹۷/۷۳ + \frac{\sigma^۲}{۹۷/۷۳} \Rightarrow \sigma^۲ = ۲۶/۳۸۷$$

۵ با توجه به تعریف TMS و SMS داریم:

$$TMS=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{t_i}}{n} \quad , \quad SMS=\frac{d}{\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{n}}$$

رابطه را به طور بازگشتی اثبات می‌کنیم:

$$TMS\ge SMS \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{t_i}}{n}\ge\frac{d}{\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{n}} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{t_i}}{n}\ge\frac{nd}{\sum_{i=1}^{n}t_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\times\sum_{i=1}^{n}t_i\ge n^2 \Rightarrow (t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)\ge n^2 \qquad (*)$$

اگر رابطهٔ (*) را ثابت کنیم، به طور بازگشتی رابطهٔ اولیه اثبات می‌شود. پس داریم:

$$(t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)=\left(1+\frac{t_1}{t_2}+\cdots+\frac{t_1}{t_n}\right)+\left(\frac{t_2}{t_1}+1+\frac{t_2}{t_3}+\cdots+\frac{t_2}{t_n}\right)+\cdots+\left(\frac{t_n}{t_1}+\frac{t_n}{t_2}+\cdots+\frac{t_n}{t_{n-1}}+1\right)$$

$$=\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{\text{تا } n}+(n-1)\times n\times\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}\frac{t_i}{t_j}$$

می‌دانیم به ازای هر $\frac{t_i}{t_j}$ در رابطهٔ فوق، دقیقاً یک $\frac{t_j}{t_i}$ نیز وجود دارد. از طرفی بنا به نامساوی حسابی - هندسی داریم:

$$x,y>0:\ \frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy} \quad , \quad \begin{cases}x=\frac{t_i}{t_j}\\ y=\frac{t_j}{t_i}\end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}}{2}\ge\sqrt{\frac{t_i}{t_j}\times\frac{t_j}{t_i}} \Rightarrow \frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\ge 2$$

$$\Rightarrow (n-1)\times n\times\left[\frac{1}{2}\times\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right)\right]\ge(n-1)\times n\times\frac{1}{2}\times 2=n(n-1)$$

پس خواهیم داشت:

$$(t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)\ge n+(n-1)\times n=n+n^2-n=n^2$$

در نتیجه، رابطهٔ (*) اثبات می‌شود. بنابراین با اثبات رابطهٔ (*)، به طور بازگشتی رابطهٔ $TMS\ge SMS$ اثبات می‌شود.

۶ با توجه به فرضیات مسئله، مشاهدات سرعت در یک بازهٔ زمانی به‌قدر کافی بزرگ صورت می‌گیرد. فرض می‌کنیم این بازهٔ زمانی بزرگ، H باشد. خودروی اول در هر ساعت ۱۰۰ کیلومتر می‌پیماید؛ بنابراین در H ساعت $100H$ کیلومتر را خواهد پیمود. خودروی دوم نیز در هر ساعت ۱۲۰ کیلومتر می‌پیماید؛ بنابراین در H ساعت $120H$ کیلومتر را طی خواهد کرد. از اینرو، سرعت متوسط لحظه‌ای برابر خواهد بود با:

$$V_{spot\,(ave)}=\frac{V_1D_1+V_2D_2}{D_1+D_2}=\frac{100\times100H+120\times120H}{100H+120H}=110/90\ km/hr$$

۷ ابتدا با توجه به مقادیر سرفاصلهٔ مکانی و سرفاصلهٔ زمانی، چگالی و حجم ترافیک را به دست می‌آوریم:

$$v=\frac{3600}{h_a}=\frac{3600}{4}=900\ veh/hr \quad , \quad D=\frac{1000}{d_a}=\frac{1000}{100}=10\ veh/km$$

حال بر مبنای رابطهٔ اساسی جریان ترافیک داریم:

$$v=S\times D \Rightarrow S=\frac{v}{D}=\frac{900}{10}=90\ km/hr$$

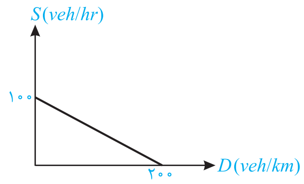
۸ بر اساس مفروضات مسئله داریم:

$$v=\frac{3600}{h_a}=\frac{3600}{2}=1800\ veh/hr \quad ; \quad D=\frac{5280}{d_a}=\frac{5280}{120}=44\ veh/mi$$

حال با استفاده از رابطهٔ اساسی جریان ترافیک می‌توان نوشت:

$$v=S\times D \Rightarrow S=\frac{v}{D}=\frac{1800\ veh/hr}{44\ veh/mi}=40/90\ mi/hr$$

۹ با توجه به خطی بودن رابطهٔ بین سرعت و چگالی و نمودار آن می‌توان گفت:



$$S=a-(bD) \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } D=۰ \;,\; S=۱۰۰\,km/hr \Rightarrow ۱۰۰=a-(b\times۰) \Rightarrow a=۱۰۰ \\ \text{اگر } S=۰ \;,\; D=۲۰۰\,veh/hr \Rightarrow ۰=۱۰۰-(b\times۲۰۰) \Rightarrow b=۰/۵ \end{cases}$$

بنابراین برای رابطهٔ بین سرعت و چگالی خواهیم داشت: $S=۱۰۰-۰/۵\,D$

حال با توجه به رابطهٔ اساسی جریان ترافیک می‌توان نوشت:

$$v=S\times D \Rightarrow V=(۱۰۰-۰/۵D)\times D=۱۰۰D-۰/۵D^۲$$

$$v=S\times D \xrightarrow{\text{جایگذاری } D \text{ بر حسب } S} v=S\times\frac{(۱۰۰-S)}{۰/۵}=۲۰۰S-۲S^۲$$

۱۰ رابطهٔ بین ضریب ساعت اوج (PHF)، نرخ جریان ساعت اوج و شلوغ‌ترین نرخ جریان ساعت اوج به صورت زیر است:

$$PHF=\frac{\sum_{i=۱}^{n}V_i}{n\times V_{max}} \Rightarrow \sum_{i=۱}^{n}V_i=PHF\times n\times V_{max(۱۵)}=۰/۸۵\times۴\times۲۰۰۰=۶۸۰۰\,veh$$

حال می‌بایست مجموع نرخ جریانِ ۳ ربع ساعت غیر از شلوغ‌ترین ربع ساعت اوج را تعیین کنیم، پس داریم:

$$\text{مجموع حجم ۳ ربع ساعت غیر از شلوغ‌ترین ربع ساعت اوج}=۶۸۰۰-۲۰۰۰=۴۸۰۰\,veh$$

از سوی دیگر، حداکثر نرخ جریان برای خلوت‌ترین ربع ساعت اوج زمانی رخ می‌دهد که حجم ۳ ربع ساعت غیر از شلوغ‌ترین ربع ساعت اوج با یکدیگر برابر باشند، از اینرو خواهیم داشت: $(V_{min(۱۵)})_{max}=\frac{۴۸۰۰}{۳}=۱۶۰۰\,veh$

۱۱ مطابق روش گام به گام به حل مسئله می‌پردازیم:

گام اول: محاسبهٔ سرعت جریان آزاد $FFS=BFFS-f_{LW}-f_{LC}-f_M-f_A \quad , \quad BFFS=۱۰۰\,km/hr$

با توجه به جداول (۷)، (۹)، (۱۱) و (۱۲) ضرایب مربوطه را به دست می‌آوریم: $f_{LW}=۱ \quad , \quad f_{LC}=۱/۵ \quad , \quad f_M=۰ \quad , \quad f_A=۴$

حال می‌توان نوشت: $FFS=۱۰۰-۱-۱/۵-۴=۹۳/۵\,km/hr$

گام دوم: تعیین شدت جریان

برای این کار، ابتدا f_{HV} (با توجه به ضرایب جدول (۳)) و سپس V را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$f_{HV}=\frac{۱}{P_T(E_T-۱)+P_B(E_B-۱)+P_R(E_R-۱)}=\frac{۱}{۱+\frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۰۰}(۲/۵-۱)+\frac{۱۵۰۰}{۱۰۰۰۰}(۲/۵-۱)+\frac{۲۰۰۰}{۱۰۰۰۰}(۲-۱)}=\frac{۱}{۱/۵۷۵}=۰/۶۳$$

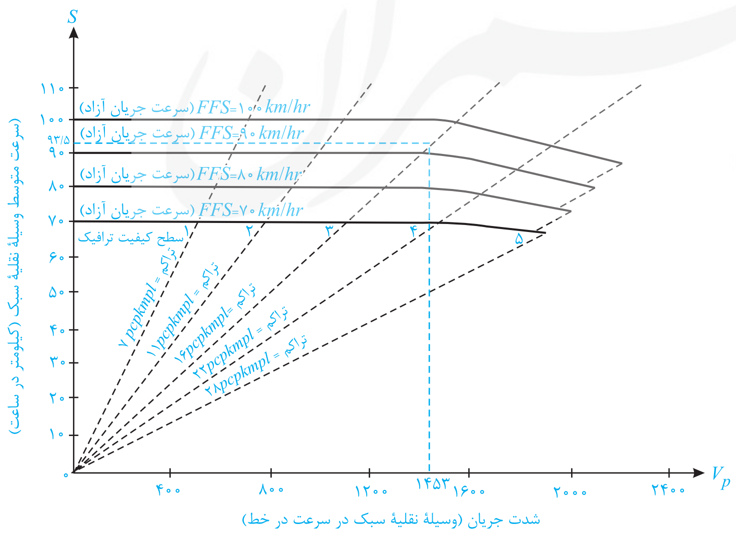
$$DDHV=K\times D\times AADT \xrightarrow[K=۰/۱۵-۰/۲۵ \;,\; D=۰/۶۵-۰/۸]{\text{با توجه به جدول (۲)}} DDHV=۰/۲۰\times۰/۷۲۵\times۱۰۰۰۰=۱۴۵۰\,veh/hr$$

حال با توجه به توریستی - تفریحی بودن مسیر ($f_P=۰/۹$) شدت جریان به راحتی همانند زیر تعیین می‌شود:

$$V_p=\frac{\overset{DDHV}{\boxed{V}}}{PHF\times N\times f_{HV}\times f_P}=\frac{۱۴۵۰}{۰/۸۸\times۲\times۰/۶۳\times۰/۹}=۱۴۵۳/۰۲\,pcu/hr$$

گام سوم: تعیین کیفیت ترافیک

با توجه به نمودار شکل (۲۰) با داشتن مقادیر FFS و V_P سطح کیفیت ترافیک به راحتی به دست می‌آید:



$$\begin{cases} \text{سرعت جریان آزاد}=۹۳/۵\,km/hr \\ \text{شدت‌جریان}=۱۴۵۳\,pcu/hr \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{سرعت متوسط وسیلهٔ نقلیهٔ سبک}=۹۳/۵\,km/hr$$

حال با داشتن V_P و S میزان تراکم جریان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D=\frac{V_P}{S}=\frac{۱۴۵۳}{۹۳/۵}=۱۵/۵۴\ pc/km/ln<۱۶\quad OK$$

بنابراین سطح کیفیت ترافیک معادل ۳ یا C می‌باشد.

۱۲ مطابق مراحل گام‌بندی زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: تعیین ضریب رشد ترافیک

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$۵۰۰\ veh/day$ = حجم ترافیک گسترش ؛ $۱۰۰۰\ veh/day$ = حجم ترافیک پدیدار ؛ $۵۰۰۰\ veh/day$ = حجم ترافیک جاری

حال برای به دست آوردن ترافیک سال بیستم می‌بایست ضریب رشد ترافیک آتی را تعیین کنیم، بنابراین داریم:

$(\frac{۱۰۰۰}{۵۰۰۰})\times۱۰۰=۲۰\%$: نسبت ترافیک پدیدار به ترافیک جاری ؛ ۳۰% : رشد طبیعی ترافیک برای سال بیستم

$(\frac{۴۰۰}{۵۰۰۰})\times۱۰۰=۸\%$: نسبت ترافیک گسترش به ترافیک جاری

ضریب رشد ترافیک = درصد رشد هر یک از ترافیک‌ها + ۱ $\Rightarrow F=۰/۳۰+۰/۲۰+۰/۰۸+۱=۱/۵۸$

گام دوم: تعیین ترافیک سال طرح

اکنون با توجه به ضریب رشد ترافیک باید برای به دست آوردن حجم ترافیک سال طرح، حجم ترافیک روز اول برآورد شود، از اینرو خواهیم داشت:

$$AADT_{(۱)}=۵۰۰۰+۱۰۰۰+۴۰۰=۶۴۰۰\ veh/day$$

$$AADT_{(n)}=AADT_{(۱)}\times F\ \Rightarrow\ AADT_{\text{طرح}}=۶۴۰۰\times۱/۵۸=۱۰۱۱۲\ veh/day$$

گام سوم: تعداد خطوط مورد نیاز را برابر با ۲ خط فرض می‌کنیم.

گام چهارم: با توجه به رابطهٔ حجم ترافیک جهتی ساعت طرح داریم:

$$DDHV=K\times D\times AADT\ \xrightarrow[K=۰/۱۵-۰/۲۵\ ,\ D=۰/۶۵-۰/۸۰]{\text{با توجه به جدول (۲)}}\ DDHV=۰/۲۰\times۰/۷۲۵\times۱۰۱۱۲=۱۴۶۶/۲۴\ veh/hr\cong۱۴۶۷\ veh/hr$$

گام پنجم: برای تعیین سطح سرویس مطابق مراحل زیر عمل می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱: سرعت جریان آزاد در بزرگراه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید: $FFS=BFFS-f_{LW}-f_{LC}-f_M-f_A\quad,\quad BFFS=۱۰۰\ km/hr$

با توجه به جداول (۷)، (۹)، (۱۱) و (۱۲) ضرایب مربوطه را به دست می‌آوریم: $f_{LW}=۰\quad,\quad f_{LC}=۳\quad,\quad f_M=۰\quad,\quad f_A=۴$

حال می‌توان نوشت: $FFS=۱۰۰-۰-۳-۰-۴=۹۳\ km/hr$

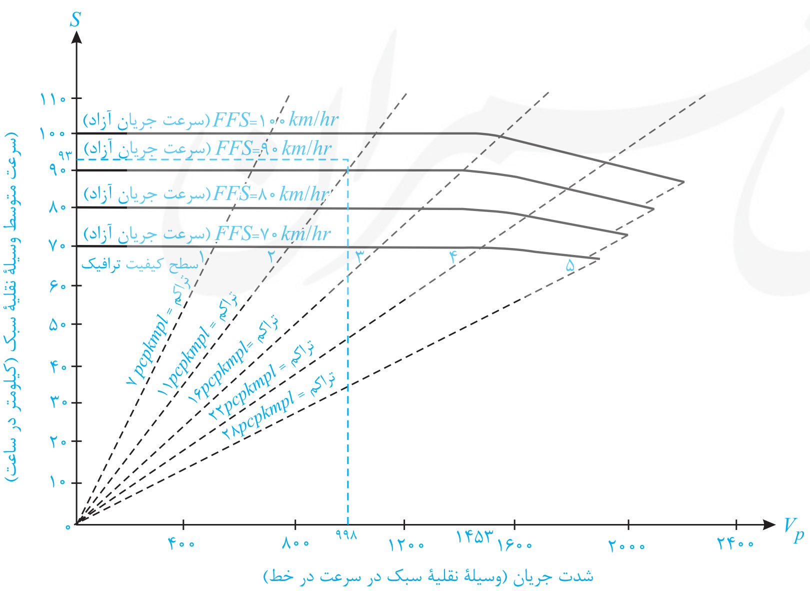
مرحلهٔ ۲: ضریب تصحیح حجم وسایل نقلیهٔ سنگین را با توجه به جدول تعیین می‌کنیم:

$$f_{HV}=\frac{۱}{P_T(E_T-۱)+P_B(E_B-۱)+P_R(E_R-۱)+۱}=\frac{۱}{۰/۱۵(۱/۵-۱)+۰/۲۰(۱/۵-۱)+۰/۱۰(۱/۲-۱)+۱}=\frac{۱}{۱/۹۵}=۰/۸۳۶$$

مرحلهٔ ۳: حال بایستی شدت جریان معادل وسیلهٔ نقلیه در بازهٔ زمانی ۱۵ دقیقه‌ای برای یک خط عبور با استفاده از رابطهٔ زیر تعیین شود:

$$V_P=\frac{V}{PHF\times N\times f_{HV}\times f_P}=\frac{۱۴۶۷}{۰/۸۸\times۲\times۰/۸۳۶\times۱}=۹۹۷/۰۳\ pcu/hr\cong۹۹۸\ pcu/hr$$

مرحلهٔ ۴: با توجه به منحنی سرعت متوسط حرکت - شدت جریان برای راه‌های چند خطه با داشتن مقادیر FFS و V_P، سطح سرویس به صورت زیر تعیین می‌شود:



$$\left\{\begin{array}{l}\text{سرعت جریان آزاد}=۹۳\ km/hr\\ \text{شدت جریان}=۹۹۸\ pcu/hr\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ سرعت متوسط وسیلهٔ نقلیهٔ سبک $=۹۳\ km/hr$

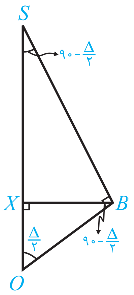
مرحلهٔ ۵: حال با استفاده از رابطهٔ اساسی جریان ترافیک، تراکم ترافیک را کنترل می‌کنیم:

$$D = \frac{V_P}{S} = \frac{۹۹۸}{۹۳} = ۱۰/۷۳ \; pcpkmpl < ۱۱ \; pcpkmpl \qquad OK$$

گام ششم: با توجه به اینکه سطح کیفیت ترافیک سال طرح برای بزرگراه‌های واقع در مناطق هموار بر مبنای جدول (۶) معادل ۲ یا B است، بنابراین این تعداد خط پاسخگوی سطح سرویس سال طرح می‌باشد. از اینرو تعداد خط مورد نیاز این بزرگراه، تعداد ۲ خط در هر جهت ترافیکی یا تعداد ۴ خط در هر دو جهت ترافیکی می‌باشد.

حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصل پنجم

۱ هر یک از روابط را جداگانه اثبات می‌کنیم:



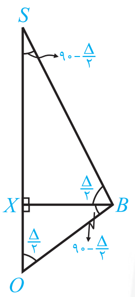
۱) مطابق شکل با توجه به تشابه مثلثی از طریق سه زاویه در دو مثلث $\overset{\Delta}{OSB}$ و $\overset{\Delta}{OXB}$ داریم:

نسبت اضلاع روبه‌رو به زاویهٔ $90^\circ - \frac{\Delta}{2}$

$$\boxed{\frac{R}{OS}} = \boxed{\frac{OX}{R}} \xrightarrow[OS=K]{OX=I} R^2 = K\cdot I$$

نسبت اضلاع روبه‌رو به زاویهٔ 90°

تذکر: همواره نسبت اضلاع روبه‌رو به زوایای نظیر به نظیر در دو مثلث متشابه با یکدیگر برابرند.

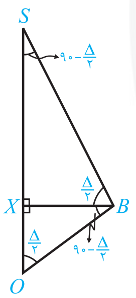


۲) مطابق شکل و با توجه به تشابه مثلثی از طریق سه زاویه در دو مثلث $\overset{\Delta}{OSB}$ و $\overset{\Delta}{OXB}$ داریم:

$$\boxed{\frac{R}{OS}} = \boxed{\frac{BX}{SB}} \xrightarrow[OS=K]{BX=\frac{C}{2}\ ,\ SB=T} \frac{R}{K} = \frac{\frac{C}{2}}{T} \Rightarrow CK = 2RT$$

نسبت اضلاع روبه‌رو به زاویهٔ $\frac{\Delta}{2}$

نسبت اضلاع روبه‌رو به زاویهٔ 90°



۳) مطابق شکل و با توجه به تشابه مثلثی از طریق سه زاویه در دو مثلث $\overset{\Delta}{OXB}$ و $\overset{\Delta}{SXB}$ داریم:

$$\frac{R}{BS} = \frac{OX}{BX} \xrightarrow[OX=R-M]{BS=t\ ,\ BX=\frac{C}{2}} \frac{R}{T} = \frac{R-M}{\frac{C}{2}} \Rightarrow RC = 2T(R-M)$$

تذکر: همواره در قوس دایره‌ای داریم:

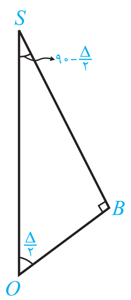
$$OX = OP - PX \xrightarrow[PX=M]{OP=R} OX = R - M$$

۴) می‌دانیم که طول بیسیکتریس قوس دایره‌ای ساده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$E = R\left(\frac{1}{\cos\frac{\Delta}{2}} - 1\right) = R\left(\frac{1-\cos\frac{\Delta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}\right)$$

حال صورت و مخرج جملهٔ راست رابطهٔ فوق را در $2R\sin\frac{\Delta}{2}$ ضرب می‌کنیم، پس داریم:

$$E = R\left(\frac{1-\cos\frac{\Delta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}\right)\times\frac{2R\sin\frac{\Delta}{2}}{2R\sin\frac{\Delta}{2}} = \frac{2R\left(1-\cos\frac{\Delta}{2}\right)}{2R\sin\frac{\Delta}{2}}\times R\underbrace{\boxed{\frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}}}_{\tan\frac{\Delta}{2}} = \frac{2\overbrace{\boxed{R\left(1-\cos\frac{\Delta}{2}\right)}}^{M}\times\overbrace{\boxed{R\tan\frac{\Delta}{2}}}^{T}}{\underbrace{\boxed{2R\sin\frac{\Delta}{2}}}_{C}} \Rightarrow BI = E = \frac{2MT}{C}$$



۵) با توجه به شکل مقابل، رابطهٔ $\sin\alpha$ را برای زاویهٔ $\widehat{SOB}$ در مثلث $\overset{\Delta}{OSB}$ به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\alpha = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\Delta}{2} = \frac{BS}{OS} \Rightarrow OS = \frac{BS}{\sin\frac{\Delta}{2}}$$

اما از آنجا که ضلع BS همان طول مماس قوس دایره‌ای ساده (T) است، پس داریم:

$$OS = \frac{T}{\sin\frac{\Delta}{2}} = \frac{R\tan\frac{\Delta}{2}}{\sin\frac{\Delta}{2}} = \frac{R\dfrac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}}{\sin\frac{\Delta}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{\Delta}{2}} = R\sec\frac{\Delta}{2} \Rightarrow K = OS = R\sec\frac{\Delta}{2}$$

۶) می‌دانیم که در قوس دایره‌ای ساده همواره مقدار OX به‌صورت زیر است:

$$OX = OP - PX \xrightarrow[PX = M = R(1-\cos\frac{\Delta}{2})]{OP = R} OX = R - R(1-\cos\frac{\Delta}{2}) = R - R + R\cos\frac{\Delta}{2}$$

$$I = OX = R\cos\frac{\Delta}{2}$$

۲ می‌دانیم‌که در قوس دایره‌ای ساده، طول وتر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$C = 2R\sin\frac{\Delta}{2} \qquad (1)$$

اما چنانچه مقدار C را برابر با ۱۰ متر فرض کنیم، مطابق تعریف درجهٔ قوس، زاویهٔ Δ به زاویهٔ D تبدیل می‌شود و خواهیم داشت:

$$10 = 2R\sin\frac{D}{2} \qquad (2) \Rightarrow R = \frac{5}{\sin\frac{D}{2}} \qquad (3)$$

حال از تقسیم معادلهٔ (۱) بر (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{C}{10} = \frac{2R\sin\frac{\Delta}{2}}{2R\sin\frac{D}{2}} \Rightarrow C = 10\frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\sin\frac{D}{2}} \Rightarrow \sin\frac{\Delta}{2} = \frac{C\sin\frac{D}{2}}{10} \Rightarrow \Delta = 2\arcsin\left(\frac{C\sin\frac{D}{2}}{10}\right) \quad (4)$$

از سوی دیگر می‌دانیم‌که:

$$\begin{cases} L = R_m\Delta^{rad} \\ 10 = R_m D^{rad} \end{cases} \Rightarrow \Delta^{rad} = \frac{LD^{rad}}{10} \xrightarrow{D^\circ = \frac{572/96}{R_m}} \Delta^\circ = \frac{L\times\frac{572/960}{R_m}}{10} \Rightarrow L = \frac{10R\Delta}{572/96} = 0/0174532\,R\Delta^\circ \qquad (5)$$

اکنون مقدار Δ از رابطهٔ (۴) و مقدار R از رابطهٔ (۳) را در رابطهٔ (۵) جایگذاری می‌کنیم، پس خواهیم داشت:

$$L = 0/0174532R\times2\arcsin\left(\frac{C}{10}\sin\frac{D}{2}\right) = 0/0174532\times\frac{5}{\sin\frac{D}{2}}\times2\arcsin\left(\frac{C}{10}\sin\frac{D}{2}\right) = \frac{0/174532}{\sin\frac{D^\circ}{2}}\times\arcsin\left(\frac{C}{10}\sin\frac{D^\circ}{2}\right)$$

۳ با توجه به مختصات نقاط شروع و پایان قوس به‌راحتی می‌توان طول پاره‌خط واصل بین این دو نقطه یعنی همان وتر بزرگ را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$C = \overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(900-300)^2 + (900-300)^2} = 848/52\,m$$

$$C = 2R\sin\frac{\Delta}{2} \Rightarrow R = \frac{C}{2\sin\frac{\Delta}{2}} = \frac{848/52}{2\times0/7071} = 600\,m$$

حال با داشتن مقادیر R و Δ به‌سادگی سایر اجزای اصلی قوس محاسبه می‌شود، پس خواهیم داشت:

$$T = R\tan\frac{\Delta}{2} = 600\times\tan\frac{90}{2} = 600\,m \quad ; \quad BI = R\left(\frac{1}{\cos\frac{\Delta}{2}} - 1\right) = 600\times\left(\frac{1}{\cos\frac{90}{2}} - 1\right) = 248/52\,m$$

$$M = R(1-\cos\frac{\Delta}{2}) = 600(1-\cos\frac{90}{2}) = 175/73\,m \quad ; \quad L = \frac{\pi R\Delta}{180} = \frac{\pi\times600\times90}{180} = 942/47\,m$$

حال برای تعیین مختصات مرکز قوس می‌بایست معادلهٔ کلی قوس را به‌دست آورد، پس می‌توان نوشت:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \xrightarrow{\text{حل معادله درجه دوم}} \begin{cases} (x-300)^2 + (y-300)^2 = 600^2 \\ (x-900)^2 + (y-900)^2 = 600^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{راستگرد}: O\,(900, 300) \\ \text{چپگرد}: O\,(300, 900) \end{cases}$$

۴ با توجه به شکل سؤال، مساحت $A\hat{S}N$ برابر است با:

$$S = \frac{AN\times SN}{2} = \frac{\frac{C}{2}\times(M + BI)}{2}$$

و طول وتر بزرگ نیز برابر خواهد بود با:

$$C = ۲R\sin\frac{\Delta}{۲} \Rightarrow C = ۲\,(۲۰۰)\,\sin۶۰ = ۳۴۶/۴۱\,m$$

$$M = R\left(۱-\cos\frac{\Delta}{۲}\right) = ۲۰۰\,(۱-\cos۶۰) = ۱۰۰\,m$$

$$E = BI = R\left(\frac{۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}-۱\right) = ۲۰۰\left(\frac{۱}{\cos۶۰}-۱\right) = ۲۰۰\,m$$

با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده در رابطهٔ مساحت خواهیم داشت:

$$S_{\overset{\Delta}{ASN}} = \frac{\frac{۳۴۶/۴۱}{۲}(۱۰۰+۲۰۰)}{۲} = ۲۵۹۸۰/۷۵\,m^۲$$

۵ با توجه به رابطهٔ درجهٔ قوس برحسب زاویهٔ روبرو به کمان ۱۰ متر داریم:

$$D \cong \frac{۵۷۲/۹۵}{R} \Rightarrow R = \frac{۵۷۲/۹۵}{۳} = ۱۹۰/۹۸\,m$$

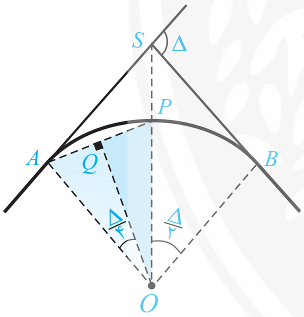
حال با توجه به رابطهٔ درجهٔ قوس برحسب زاویهٔ روبرو به وتر ۱۰ متر می‌توان نوشت:

$$D = ۲\arcsin\frac{۵}{R} = ۲\arcsin\left(\frac{۵}{۱۹۰/۹۸}\right) = ۳/۰۰۰۴^{\circ}$$

۶ با توجه به شکل مسئله، محیط مثلث برابر است با:

$$\text{محیط}\ \overset{\Delta}{ASP} = AS + SP + AP$$

بنابراین از شکل روبرو می‌توان اضلاع را به‌دست آورد:



$$\begin{cases} AS = T = R\tan\frac{\Delta}{۲} = ۲۰۰\underbrace{\tan۶۰}_{\sqrt{۳}\simeq۱/۷} = ۳۴۶/۴۱\,m \\ SP = E = R\left(\frac{۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}-۱\right) = ۲۰۰\left(\frac{۱}{\cos۶۰}-۱\right) = ۲۰۰\,m \\ AP = ۲R\sin\frac{\Delta}{۴} = ۲\times۲۰۰\times\sin۳۰ = ۲۰۰\,m \end{cases}$$

$$\text{محیط}\ \overset{\Delta}{ASP} = ۳۴۶/۴۱ + ۲۰۰ + ۲۰۰ = ۷۴۶/۴۱\,m$$

۷ با توجه به اطلاعات مسئله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} BI = R\left(\frac{۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}-۱\right) \\ M = R\left(۱-\cos\frac{\Delta}{۲}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{BI}{M} = \frac{R\left(\frac{۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}-۱\right)}{R\left(۱-\cos\frac{\Delta}{۲}\right)} = \frac{۱-\cos\frac{\Delta}{۲}}{\cos\frac{\Delta}{۲}\left(۱-\cos\frac{\Delta}{۲}\right)} \Rightarrow \frac{BI}{M} = \frac{۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\Delta}{۲} = \frac{M}{BI} = \frac{۱۱۱}{۱۸۱} \Rightarrow \Delta = ۲\arcsin\frac{۱۱۱}{۱۸۱} = ۱۰۴/۳۴^{\circ}$$

اکنون با داشتن مقدار M و Δ، شعاع قوس دایره‌ای ساده به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$M = R\left(۱-\cos\frac{\Delta}{۲}\right) \Rightarrow R = \frac{M}{۱-\cos\frac{\Delta}{۲}} = \frac{۱۱۱}{۱-\cos\frac{۱۰۴/۳۴}{۲}} = ۲۸۷/۰۵\,m$$

حال به‌راحتی می‌توان طول مماس کوچک، وتر کوچک و بیسکتریس کوچک را از روابط آنها با داشتن مقادیر R و Δ به‌دست آورد:

$$T' = R\tan\frac{\Delta}{۴} = ۲۸۷/۰۵\times\tan\frac{۱۰۴/۳۴}{۴} = ۱۴۰/۵۳\,m \quad , \quad C' = ۲R\sin\frac{\Delta}{۴} = ۲\times۲۸۷/۰۵\times\sin\frac{۱۰۴/۳۴}{۴} = ۲۵۲/۴۳\,m$$

$$E' = R\left(\sec\frac{\Delta}{۴}-۱\right) = ۲۸۷/۰۵\times\left(\sec\frac{۱۰۴/۳۴}{۴}-۱\right) = ۳۲/۵۵\,m$$

۸ همانطور که گفتیم زاویهٔ انحراف وسط قوس برابر با $\frac{\Delta}{۴}$ می‌باشد:

$$\delta = \frac{\Delta}{۴} = ۳۰ \Rightarrow \Delta = ۱۲۰^{\circ}$$

حال رابطهٔ طول میانی و طول نیمساز (بیرونی) را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$E = R\left(\frac{1}{\cos\frac{\Delta}{2}} - 1\right) = R\left(\frac{1-\cos\frac{\Delta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}\right) \Rightarrow E\cos\frac{\Delta}{2} = R\left(1-\cos\frac{\Delta}{2}\right) \Rightarrow \frac{M}{E} = \cos\frac{\Delta}{2} = \cos\frac{120}{2} = 0.5$$

۹

الف) جهت طرح قوس دایره‌ای ساده بر روی مسیر شکسته، مطابق روش گام به گام زیر عمل می‌کنیم:

گام اول (تعیین مقادیر سرعت طرح، بربلندی و ضریب اصطکاک جانبی): با توجه به جداول (۴)، (۸) و (۱۰) از فصل سوم، مقادیر سرعت طرح، حداکثر بربلندی و حداکثر ضریب اصطکاک جانبی را به‌دست می‌آوریم:

$$V_{Design} = 120\ km/hr \qquad ; \qquad e_{max} = 10\% \qquad ; \qquad f_{max} = 0.090$$

گام دوم (محاسبهٔ حداقل شعاع قوس دایره‌ای (R_{min})): براساس رابطهٔ حداقل شعاع قوس دایره‌ای داریم:

$$R_{min} = \frac{V^2}{127.2\,(e_{max}+f_{max})} = \frac{120^2}{127.2\times(0.10+0.09)} = 595.829\ m$$

از سوی دیگر با توجه به جدول (۵)، حداقل شعاع پیشنهادی آیین‌نامه برابر با $R = 597\ m$ می‌باشد، پس داریم:

$$R_{min} = R_{Design} = 597\ m$$

گام سوم (کنترل طول قوس افقی): مطابق نشریهٔ شمارهٔ ۴۱۵، حداقل طول قوس افقی برحسب متر برای راه‌های با سرعت بالا معادل ۶ برابر سرعت طرح برحسب کیلومتر بر ساعت است، بنابراین داریم:

$$L_B = \frac{\pi R \Delta_B}{180} = \frac{\pi\times 597\times \overset{80^\circ+\left(\frac{21}{60}\right)'+\left(\frac{30}{3600}\right)''}{\boxed{80.358}}}{180} = 837.29\ m > 6V_{Design} = 6\times 120 = 720 \quad OK$$

$$L_C = \frac{\pi R \Delta_C}{180} = \frac{\pi\times 597\times \overset{93^\circ+\left(\frac{29}{60}\right)'+\left(\frac{45}{3600}\right)''}{\boxed{93.495}}}{180} = 974.18\ m > 720 \quad OK$$

$$L_D = \frac{\pi R \Delta_D}{180} = \frac{\pi\times 597\times \overset{131^\circ+\left(\frac{32}{60}\right)'+\left(\frac{11}{3600}\right)''}{\boxed{131.536}}}{180} = 1370.55\ m > 720 \quad OK$$

گام چهارم (محاسبهٔ اجزای اصلی قوس دایره‌ای ساده): با توجه به زاویهٔ تلاقی واریانت‌ها، اجزای هر قوس به‌طور جداگانه محاسبه می‌شود.

- قوس دایره‌ای با زاویهٔ انحراف 80.358°:

$$T = R\tan\frac{\Delta}{2} = 597\times\tan\frac{80.358}{2} = 504.12\ m \qquad C = 2R\sin\frac{\Delta}{2} = 2\times597\times\sin\frac{80.358}{2} = 770.34\ m$$

$$E = R\left(\sec\frac{\Delta}{2}-1\right) = 597\times\left(\sec\frac{80.358}{2}-1\right) = 184.38\ m \qquad M = R\left(1-\cos\frac{\Delta}{2}\right) = 597\times\left(1-\cos\frac{80.358}{2}\right) = 140.87\ m$$

- قوس دایره‌ای با زاویهٔ انحراف 93.495°:

$$T = R\tan\frac{\Delta}{2} = 597\times\tan\frac{93.495}{2} = 634.57\ m \qquad C = 2R\sin\frac{\Delta}{2} = 2\times597\times\sin\frac{93.495}{2} = 869.63\ m$$

$$E = R\left(\sec\frac{\Delta}{2}-1\right) = 597\times\left(\sec\frac{93.495}{2}-1\right) = 274.25\ m \qquad M = R\left(1-\cos\frac{\Delta}{2}\right) = 597\times\left(1-\cos\frac{93.495}{2}\right) = 187.92\ m$$

- قوس دایره‌ای با زاویهٔ انحراف 131.536°:

$$T = R\tan\frac{\Delta}{2} = 597\times\tan\frac{131.536}{2} = 1326.40\ m \qquad C = 2R\sin\frac{\Delta}{2} = 2\times597\times\sin\frac{131.536}{2} = 1088.79\ m$$

$$E = R\left(\sec\frac{\Delta}{2}-1\right) = 597\times\left(\sec\frac{1131.536}{2}-1\right) = 857.56\ m \qquad M = R\left(1-\cos\frac{\Delta}{2}\right) = 597\times\left(1-\cos\frac{131.536}{2}\right) = 351.97\ m$$

ب) برای تعیین کیلومتراژ نقاط شروع، پایان و وسط هر قوس به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

- قوس دایره‌ای با زاویهٔ انحراف 80.358°:

$$KM_{\text{شروع}} = KM_B - T = 1100 - 504.12 = 595.88\ m \qquad KM_{\text{وسط}} = KM_{\text{شروع}} + \frac{L}{2} = 595.88 + \frac{837.29}{2} = 1014.525\ m$$

$$KM_{\text{پایان}} = KM_{\text{وسط}} + \frac{L}{2} = 1014.525 + \frac{837.29}{2} = 1433.17\ m$$

● قوس دایره‌ای با زاویهٔ انحراف $93/495^\circ$:

$$KM_{\text{شروع}} = KM_C - T = 3450 - 634/57 = 2815/43\ m \qquad KM_{\text{وسط}} = KM_{\text{شروع}} + \frac{L}{2} = 2815/43 + \frac{974/18}{2} = 3302/52\ m$$

$$KM_{\text{پایان}} = KM_{\text{شروع}} + L = 2815/43 + 974/18 = 4276/7\ m$$

● قوس دایره‌ای با زاویهٔ انحراف $131/536^\circ$:

$$KM_{\text{شروع}} = KM_D - T = 7050 - 1326/40 = 5723/6\ m$$

$$KM_{\text{وسط}} = KM_{\text{شروع}} + \frac{L}{2} = 5723/60 + \frac{1370/55}{2} = 6408/875\ m$$

$$KM_{\text{پایان}} = KM_{\text{شروع}} + L = 5723/60 + 1370/55 = 7094/15\ m$$

پ) برای تعیین درجهٔ قوس به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

درجهٔ قوس روبرو به کمان ۱۰ متر : $D^\circ = \frac{572/95}{R} = \frac{572/95}{597} = 0/9597^\circ$

درجهٔ قوس روبرو به وتر ۱۰ متر : $D^\circ = 2\arcsin(\frac{5}{R}) = 2\arcsin(\frac{5}{597}) = 0/9597^\circ$

۱۰ با توجه به مفروضات مسئله ابتدا می‌بایست زاویهٔ انحراف دو واریانت را به‌دست آورد، بنابراین با توجه به تعریف ژیزمان داریم:

$X_S > X_A$ ، $Y_S > Y_A \Rightarrow$ امتداد $\overline{AS}$ در ربع اول قرار دارد.

$$G_{\overline{AS}} = V_{AS} = \arctan\left|\frac{X_S - X_A}{Y_S - Y_A}\right| = \arctan\left|\frac{500-50}{900-400}\right| = 41/98^\circ$$

$X_B > X_S$ ، $Y_B < Y_S \Rightarrow$ امتداد $\overline{SB}$ در ربع دوم قرار دارد.

$$G_{\overline{SB}} = \pi - V_{SB} = 180 - \arctan\left|\frac{X_B - X_S}{Y_B - Y_S}\right| = 180 - \arctan\left|\frac{1000-500}{500-900}\right| = 128/66^\circ$$

$$\Delta = G_{\overline{SB}} - G_{\overline{AS}} = 128/66^\circ - 41/98^\circ = 86/68^\circ$$

از سوی دیگر باید با کمک رابطهٔ حداقل شعاع قوس دایره‌ای ساده مقدار (R) را به‌دست آوریم، پس خواهیم داشت:

$$R_{min} = \frac{V^2}{127/2(e_{max} + f_{max})} = \frac{100^2}{127/2(0/10 + 0/12)} = 357/34\ m$$

حال با توجه به رابطهٔ طول قوس دایره‌ای ساده با داشتن مقادیر (R) و (Δ) می‌توان نوشت:

$$L_{min} = \frac{\pi R_{min}\Delta}{180} = \frac{\pi \times 357/34 \times 86/68^\circ}{180} = 540/60\ m$$

۱۱ هر یک را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم:

الف) فرض می‌کنیم رابطه درست باشد. در این‌صورت سعی می‌کنیم به رابطهٔ همیشه درست برسیم:

$$T > E \Rightarrow R\tan\frac{\Delta}{2} > R\left(\frac{1}{\cos\frac{\Delta}{2}} - 1\right) \xrightarrow[\text{و بر } R \text{ تقسیم می‌نماییم}]{\text{طرفین را در } \cos\frac{\Delta}{2} \text{ ضرب می‌کنیم}} \sin\frac{\Delta}{2} > 1 - \cos\frac{\Delta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\Delta}{2} + \cos\frac{\Delta}{2} > 1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} \underbrace{\sin^2\frac{\Delta}{2} + \cos^2\frac{\Delta}{2}}_{=1} + 2\sin\frac{\Delta}{2}\cos\frac{\Delta}{2} > 1 \Rightarrow \sin\Delta > 0$$

از آنجا که $0 \le \Delta \le 180^\circ$ است پس $0 \le \frac{\Delta}{2} \le 90$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{\Delta}{2} > 0\\ \cos\frac{\Delta}{2} > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \sin\Delta > 0$$
پس به رابطهٔ درست رسیدیم. $\xrightarrow{\text{روند بازگشتی}} T > E \qquad OK$

ب) فرض می‌کنیم رابطه درست باشد. در این حالت، به‌صورت بازگشتی رابطه را بررسی می‌کنیم.

$$E > M \Rightarrow R\left(\frac{1}{\cos\frac{\Delta}{2}} - 1\right) > R\left(1 - \cos\frac{\Delta}{2}\right) \xrightarrow{\text{طرفین را در } \cos\frac{\Delta}{2} \text{ ضرب می‌کنیم}} 1 - \cos\frac{\Delta}{2} > \cos\frac{\Delta}{2} - \cos^2\frac{\Delta}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\Delta}{2} - 2\cos\frac{\Delta}{2} + 1 > 0 \Rightarrow \left(\cos\frac{\Delta}{2} - 1\right)^2 > 0 \ ,\ 0 \le \Delta \le 180 \Rightarrow 0 \le \frac{\Delta}{2} \le 90$$

$\Rightarrow 1 > \cos\frac{\Delta}{2} > 0 \Rightarrow \cos\frac{\Delta}{2} - 1 \neq 0 \Rightarrow (\cos\frac{\Delta}{2} - 1)^2 > 0$ همیشه درست است $\xrightarrow{\text{روند بازگشتی}} E > M \qquad OK$

پ) فرض می‌کنیم رابطهٔ مذکور همیشه درست باشد. بنابراین داریم:

$$T>M \Rightarrow R\tan\frac{\Delta}{۲}>R\,(۱-\cos\frac{\Delta}{۲}) \Rightarrow \tan\frac{\Delta}{۲}>۱-\cos\frac{\Delta}{۲} \xrightarrow{\text{طرفین را در } \cos\frac{\Delta}{۲} \text{ ضرب می‌کنیم}} \sin\frac{\Delta}{۲}>\cos\frac{\Delta}{۲}-\cos^۲\frac{\Delta}{۲}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\Delta}{۲}=\theta\\ ۰<\theta<۹۰\end{cases} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\sin\theta}}_{>۰} > \underbrace{\boxed{\cos\theta-\cos^۲\theta}}_{>۰} \Rightarrow \sin^۲\theta>\cos^۲\theta+\cos^۴\theta-۲\cos^۳\theta \Rightarrow ۱-\cos^۲\theta>\cos^۲\theta+\cos^۴\theta-۲\cos^۳\theta$$

$$\xrightarrow{\cos\theta=x} ۰<x<۱$$

$$\Rightarrow x^۴-۲x^۳+۲x^۲-۱<۰ \Rightarrow (x-۱)(x^۳-x^۲+x+۱)<۰$$

چون $x-۱<۰$ است، کافی است ثابت کنیم $x^۳-x^۲+x+۱>۰$ است. پس داریم:

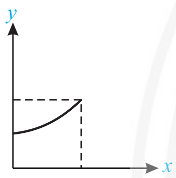
$$x^۳-x^۲+x+۱=y \Rightarrow y'=۳x^۲-۲x+۱$$

$$b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴(۳)(۱)=۴-۱۲=-۸<۰ \Rightarrow y'>۰$$

پس تابع y همواره صعودی است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x=۰\\ y=۱\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases}x=۱\\ y=۲\end{cases}$$

بدیهی است چون y صعودی است، پس در بازهٔ $(۰,۱)$ همواره تابع مثبت است:



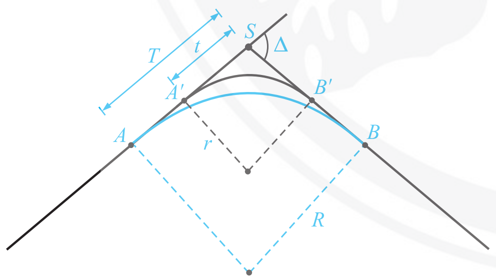
$$\Rightarrow y>۰ \xrightarrow{\text{روند بازگشتی}} T>M$$

ت) با توجه به نامساوی $۰<\cos\frac{\Delta}{۲}<۱$ داریم:

$$۰<\cos\frac{\Delta}{۲}<۱ \xrightarrow{\text{طرفین را } -۱ \text{ ضرب می‌کنیم}} ۰>-\cos\frac{\Delta}{۲}>-۱ \xrightarrow{\text{طرفین را با ۱ جمع می‌کنیم}} ۰<۱-\cos\frac{\Delta}{۲}<۱$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را در } R \text{ ضرب می‌کنیم}} \underbrace{R\,(۱-\cos\frac{\Delta}{۲})}_{M}<R \Rightarrow M<R$$

۱۲ مطابق شکل مقابل برای دو طول $AA'B'B$ و AB می‌توان نوشت:



$$L_۱=\overline{AA'}+\overset{\frown}{A'B'}+\overline{B'B}$$

$$L_۲=\overset{\frown}{AB}$$

حال اختلاف طول مسیر (۱) و (۲) به‌عنوان طول مسیر صرفه‌جویی برابر است با:

$$L_۱-L_۲=(\overline{AA'}+\overset{\frown}{A'B'}+\overline{B'B})-\overset{\frown}{AB} \qquad (۱)$$

اما با توجه به شکل می‌دانیم که:

$$\begin{cases}\overline{AA'}=\overline{B'B}=T-t\\ \overline{A'S}=\overline{B'S}=t\\ AS=BS=T\\ \overset{\frown}{AB}=L\\ \overset{\frown}{A'B'}=l\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}T=R\tan\dfrac{\Delta}{۲} \quad , \quad t=r\tan\dfrac{\Delta}{۲}\\ R=\dfrac{۵۷۲/۹۶}{D^\circ} \quad , \quad r=\dfrac{۵۷۲/۹۶}{d^\circ}\\ L=\dfrac{۱۰\Delta}{D} \quad , \quad l=\dfrac{۱۰\Delta}{d}\end{cases}$$

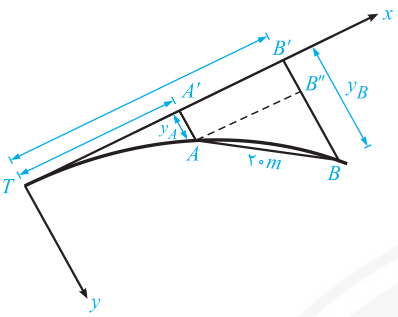
اکنون با جایگذاری روابط بالا در رابطهٔ (۱) داریم:

$$\text{طول مسیر صرفه‌جویی}=[(T-t)+L+(T-t)]-L=\left[۲(T-t)+۱۰(\frac{\Delta}{d})\right]-۱۰(\frac{\Delta}{D})=۲(T-t)-(\frac{۱}{D}-\frac{۱}{d})\times۱۰\Delta$$

$$=۲(\frac{۵۷۲/۹۶}{D}\tan\frac{\Delta}{۲}-\frac{۵۷۲/۹۶}{d}\tan\frac{\Delta}{۲})-(\frac{۱}{D}-\frac{۱}{d})\times۱۰\Delta=(\frac{۱}{D}-\frac{۱}{d})(۲\times۵۷۲/۹۶\tan\frac{\Delta}{۲})-(\frac{۱}{D}-\frac{۱}{d})\times۱۰\Delta$$

$$=(\frac{۱}{D}-\frac{۱}{d})(۲\times۵۷۲/۹۶\tan\frac{\Delta}{۲}-۱۰\Delta)=(\frac{۱}{D}-\frac{۱}{d})\times\left[۱۱۴۵/۹۲(\tan\frac{\Delta}{۲})-۱۰\Delta\right]$$

۱۳ مطابق شکل مقابل، مماس ورودی به‌عنوان محور x در نظر گرفته شده است، پس راستای شعاع در نقطهٔ شروع قوس (T) که به مماس ورودی عمود است، محور y می‌باشد. حال با توجه به معادلهٔ قوس دایره‌ای ساده، چنانچه نقطهٔ O دارای مختصات $(\text{۰},R)$ باشد خواهیم داشت:



$$(x-x_\circ)^۲+(y-y_\circ)^۲=R^۲ \xrightarrow{O(\circ,R)} (x)^۲+(y-R)^۲=R^۲ \Rightarrow R=\frac{x^۲+y^۲}{۲y}$$

بنابراین با توجه به اطلاعات مسئله می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned}R&=\frac{x_A^۲+y_A^۲}{۲y_A}\\ R&=\frac{x_B^۲+y_B^۲}{۲y_B}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x_A^۲+y_A^۲}{y_A}=\frac{x_B^۲+y_B^۲}{y_B} \qquad (۱)$$

اما از آنجا که $y_B=BB'=۲۴$ و $y_A=AA'=۹$ می‌باشد پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{AB''B}$ طول ضلع AB'' مطابق رابطهٔ فیثاغورث برابر است با:

$$\begin{cases}AB''^{۲}=AB^۲-BB''^{۲}=AB^۲-(y_B-y_A)^۲=۲۵^۲-۱۵^۲=۴۰۰ \Rightarrow AB''=۲۰\\ AB''=(x_B-x_A) \Rightarrow x_B=x_A+۲۰\end{cases}$$

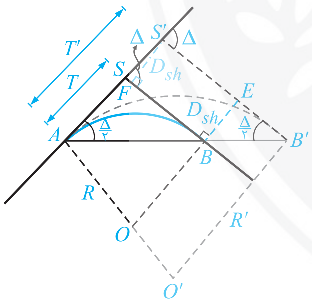
حال مقادیر $y_A=۹$ و $y_B=۲۴$ و $x_B=x_A+۲۰$ را در معادلهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{x_A^۲+۹^۲}{۹}=\frac{(x_A+۲۰)^۲+۲۴^۲}{۲۴} \Rightarrow x_A^۲-۲۴x_A-۴۵۶=۰ \Rightarrow x_A=\frac{۲۴\pm\sqrt{(-۲۴)^۲-۴(۱)(-۴۵۶)}}{۲\times۱} \Rightarrow \begin{cases}x_A=۳۶/۴۹ & \text{قابل قبول}\\ x_A=-۱۲/۴۹ & \text{غیر قابل قبول}\end{cases}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$R=\frac{x_A^۲+y_A^۲}{۲y_A}=\frac{۳۶/۴۹^۲+۹^۲}{۲\times۹}=۷۸/۴۷\,m$$

۱۴ در حالت جابه‌جایی به سمت خارج قوس: با توجه به شکل مقابل، هر دو قوس دایره‌ای $\widehat{AB}$ و $\widehat{AB'}$ دارای زاویهٔ انحراف یکسان (Δ) می‌باشند، اما دارای مراکز و شعاع‌های یکسان نمی‌باشند. حال برای تعیین شعاع دایرهٔ جدید، مثلث‌های $\overset{\Delta}{BEB'}$ و $\overset{\Delta}{SFS'}$ را در نظر بگیرید:



$$\overset{\Delta}{BEB'}: BB'=\frac{D_{sh}}{\sin\frac{\Delta}{۲}} \qquad , \qquad \overset{\Delta}{SFS'}: SS'=\frac{D_{sh}}{\sin\Delta}$$

از طرف دیگر، در قوس دایره‌ای جدید $\widehat{AB'}$، طول مماس آن برابر است با:

$$T'=T+SS' \Rightarrow R'\tan\frac{\Delta}{۲}=R\tan\frac{\Delta}{۲}+\frac{D_{sh}}{\sin\Delta} \Rightarrow R'=\frac{R\tan\frac{\Delta}{۲}+\frac{D_{sh}}{\sin\Delta}}{\tan\frac{\Delta}{۲}}=R+\frac{D_{sh}}{\sin\Delta\times\tan\frac{\Delta}{۲}}$$

در حالت جابه‌جایی به سمت خارج قوس:

$$\xrightarrow[\tan\frac{\Delta}{۲}=\frac{۱-\cos\Delta}{\sin\Delta}]{\text{از روابط مثلثات می‌دانیم که}} R'=R+\frac{D_{sh}}{\sin\Delta\times\frac{۱-\cos\Delta}{\sin\Delta}} \Rightarrow R'=R+\frac{D_{sh}}{۱-\cos\Delta}=۱۵۰+\frac{۳۰}{۱-\cos ۹۵} \Rightarrow R'=۱۷۷/۵۹\,m\cong۱۷۷/۶\,m$$

حال با داشتن مقادیر R و Δ، مقادیر طول مماس و طول قوس دایره‌ای جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$T'=R'\tan\frac{\Delta}{۲}=۱۷۷/۶\times\tan\frac{۹۵}{۲}=۱۹۳/۸۱\,m \qquad , \qquad L'=\frac{\pi R'\Delta}{۱۸۰}=\frac{\pi\times۱۷۷/۶\times۹۵}{۱۸۰}=۲۹۴/۴۷\,m$$

در حالت جابه‌جایی به سمت داخل قوس:

$$R'=R-\frac{D}{۱-\cos\Delta}=۱۵۰-\frac{۳۰}{۱-\cos ۹۵}=۱۲۲/۴\,m$$

حال با داشتن مقادیر R' و Δ می‌توان به‌راحتی مقادیر T و L را به‌دست آورد:

$$T=R'\tan\frac{\Delta}{۲}=۱۲۲/۴۰\times\tan\frac{۹۵}{۲}=۱۳۳/۵۷ \qquad , \qquad L=\frac{\pi R'\Delta}{۱۸۰}=\frac{\pi\times۱۲۲/۴۰\times۹۵^\circ}{۱۸۰}=۲۰۲/۹۴\,m$$

۱۵ با توجه به شکل سؤال، طول بیسکتریس برای قوس‌های دایره‌ای به شعاع $R_۱$ و $R_۲$ برابرند با:

$$BI_۱ = R_۱\left[\frac{۱}{cos\frac{\Delta}{۲}} - ۱\right] = R_۱(sec\frac{\Delta}{۲} - ۱) \quad , \quad BI_۲ = R_۲\left[\frac{۱}{cos\frac{\Delta}{۲}} - ۱\right] = R_۲(sec\frac{\Delta}{۲} - ۱)$$

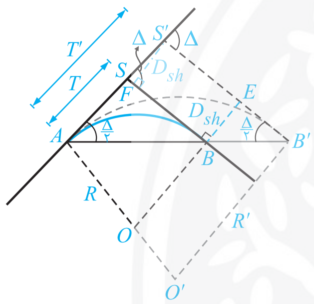
از سوی دیگر مطابق شکل می‌توان دریافت که:

$$BI_۲ = BI_۱ + d = R_۱(sec\frac{\Delta}{۲} - ۱) + d \Rightarrow R_۲(sec\frac{\Delta}{۲} - ۱) = R_۱(sec\frac{\Delta}{۲} - ۱) + d \Rightarrow R_۲ = \frac{R_۱(sec\frac{\Delta}{۲} - ۱) + d}{(sec\frac{\Delta}{۲} - ۱)} = R_۱ + \frac{d}{(sec\frac{\Delta}{۲} - ۱)}$$

۱۶ با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده از درسنامه، ابتدا شعاع قوس دایرهٔ جدید را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$R' = R + \frac{D_{sh}}{۱ - cos\Delta} = ۱۸۰ + \frac{۵۵}{۱ - cos۹۰} = ۲۳۵\,m$$

حال با توجه به شکل مقابل می‌بایست برای تعیین KM_S، KM_A و $KM_{B'}$ مقادیر T، T' و L را به‌دست آورد، بنابراین داریم:



$$T' = R' tan\frac{\Delta}{۲} = ۲۳۵ \times tan\frac{۹۰}{۲} = ۲۳۵\,m$$

$$T = R\,tan\frac{\Delta}{۲} = ۱۸۰ \times tan\frac{۹۰}{۲} = ۱۸۰\,m$$

$$L' = \frac{\pi R'\Delta}{۱۸۰} = \frac{\pi \times ۲۳۵ \times ۹۰}{۱۸۰} = ۳۶۹/۱۳\,m$$

اکنون برای محاسبهٔ کیلومتراژ نقاط خواسته شده از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$KM_{S'} = KM_S + \underbrace{\boxed{SS'}}_{SS' = T' - T} = KM_S + T' - T = ۳۲۰۰ + ۲۳۵ - ۱۸۰ = ۳۲۵۵\,m \Rightarrow KM_{S'} = ۳\,km + ۲۵۵\,m$$

$$KM_A = KM_S - T = ۳۲۰۰ - ۱۸۰ = ۳۰۲۰\,m \Rightarrow KM_A = ۳\,km + ۰۲۰\,m$$

$$KM_{B'} = KM_A + L' = ۳۰۲۰ + ۳۶۹/۱۳\,m = ۳۳۸۹/۱۳\,m \Rightarrow KM_{B'} = ۳\,km + ۳۸۹/۱۳\,m$$

۱۷ همانطورکه در شکل سؤال دیده می‌شود می‌توان گفت قوس دایره‌ای سادهٔ $\widehat{APB}$، مجموع دو قوس دایره‌ای سادهٔ $\widehat{AP}$ و $\widehat{BP}$ به شعاع R می‌باشد. از اینرو می‌توان نوشت:

$\overline{AC} = \overline{PC} = T' \Leftrightarrow$ طول مماس‌های قوس کوچک $\widehat{AP}$

$\overline{BD} = \overline{PD} = T'' \Leftrightarrow$ طول مماس‌های قوس کوچک $\widehat{BP}$

$\overline{AS} = \overline{BS} = T \Leftrightarrow$ طول مماس‌های قوس بزرگ $\widehat{APB}$

از سوی دیگر با توجه به شکل مسئله داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AS} = \overline{AC} + \overline{SC} = T' + a \\ \overline{BS} = \overline{BD} + \overline{SD} = T'' + b\end{array}\right. \xrightarrow{\overline{AS} = \overline{BS} = T} T' + a = T'' + b \Rightarrow T' = b + T'' - a \qquad (۱)$$

همچنین برای طول مماس بر نقطهٔ P می‌توان نوشت:

$$\overline{CD} = \overline{CP} + \overline{PD} \Rightarrow c = T' + T'' \Rightarrow T' = c - T'' \qquad (۲)$$

اکنون دو رابطهٔ (۱) و (۲) را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم، پس خواهیم داشت:

$$b + T'' - a = c - T'' \Rightarrow T'' = \frac{c + a - b}{۲}$$

همچنین می‌دانیم طول مماس قوس از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\overline{BS} = \overline{BD} + \overline{DS} = T = R\,tan\frac{\Delta}{۲} = T'' + b = b + \frac{c + a - b}{۲} \Rightarrow R\,tan\frac{\Delta}{۲} = \frac{a + b + c}{۲} \Rightarrow R = \frac{a + b + c}{۲tan\frac{\Delta}{۲}} = \frac{a + b + c}{۲}cot\frac{\Delta}{۲}$$

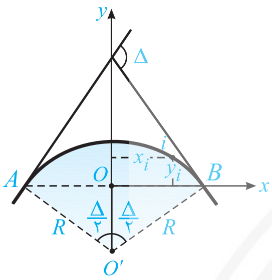
تذکر: همواره از مثلثات به یاد داریم:

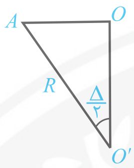
$$\frac{۱}{tan\alpha} = cot\alpha \quad , \quad \frac{۱}{cot\alpha} = tan\alpha$$

۱۸ با توجه به شکل مسئله، مشاهده می‌کنید که محور x در راستای وتر بزرگ و محور y عمود بر وتر و از مرکز آن در نظر گرفته شده است. برای حل سؤال می‌توان از معادلهٔ دایره استفاده کرد:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

با توجه به اینکه محور y از وسط وتر عبور کرده، بنابراین این محور از نقطهٔ O' یعنی مرکز قوس نیز عبور می‌کند. پس نقطهٔ O' روی محور y قرار دارد و دارای مختصات $(0, OO')$ می‌باشد، یعنی داریم:





$$\Rightarrow OO' = R\cos\frac{\Delta}{2}$$

به‌سادگی می‌توان گفت مختصات مرکز دایره برابر $O'\begin{vmatrix}0\\ -R\cos\frac{\Delta}{2}\end{vmatrix}$ می‌باشد و با جایگذاری در معادلهٔ دایره، معادلهٔ قوس به‌دست می‌آید، بنابراین خواهیم داشت:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \xrightarrow[y_0=-R\cos\frac{\Delta}{2}]{x_0=0} x^2+(y+R\cos\frac{\Delta}{2})^2=R^2 \Rightarrow x^2+y^2+2Ry\cos\frac{\Delta}{2}+R^2\cos^2\frac{\Delta}{2}=R^2$$

$$\xrightarrow[\Delta=120^\circ]{x=\sqrt{896}\ ,\ y=2} \begin{cases} 896+4+2R(2)\cos 60+R^2\times\cos^2 60=R^2 \\ 900+2R+\frac{1}{4}R^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow 3R^2-8R-3600=0 \Rightarrow R=36\,m$$

۱۹ با توجه به شکل سؤال می‌توان دریافت:

$$\overset{\Delta}{OCE}:\theta=90-\frac{\Delta_1}{2} \qquad , \qquad \overset{\Delta}{ODE}:\gamma=90-\frac{\Delta_2}{2}$$

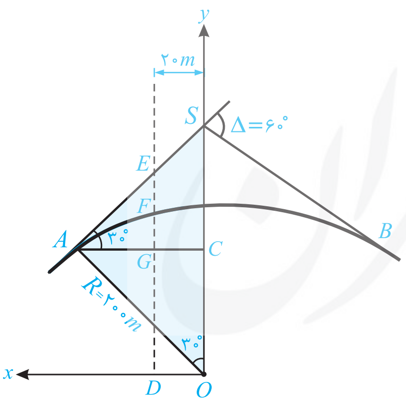
اکنون با توجه به تعریف $\cot\alpha$ در هر یک از دو مثلث مذکور خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{OCE}:\cot\theta=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}=\frac{CE}{OE} \Rightarrow CE=OE\cot\theta \qquad , \qquad \overset{\Delta}{ODE}:\cot\gamma=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}=\frac{DE}{OE} \Rightarrow DE=OE\cot\gamma$$

اما از آنجا که مقدار OE برابر همان شعاع قوس دایره‌ای (R) است، پس برای طول CD می‌توان نوشت:

$$CD=CE+DE=R\cot\theta+R\cot\gamma=R(\cot\theta+\cot\gamma) \Rightarrow R=\frac{CD}{\cot\theta+\cot\gamma}$$

۲۰ ابتدا معادلهٔ دایره را برای نقطهٔ F روی قوس با در نظر گرفتن دستگاه مختصات بر روی مرکز قوس مطابق شکل زیر می‌نویسیم:



$$x^2+y^2=R^2$$

$$\begin{cases} x=20\,m \\ R=200\,m \end{cases} \Rightarrow y=198.997\,m \Rightarrow FD=y=198.997\,m$$

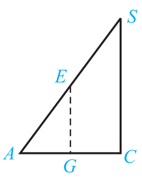
در مثلث $\overset{\Delta}{OAC}$ می‌توان نوشت:

$$OC=R\cos 30^\circ \Rightarrow GD=OC=200\cos 30^\circ=173.2\,m$$

با استفاده از مقادیر به‌دست آمده، مقدار FG برابر است با:

$$FG=FD-GD=198.997-173.2=25.797\,m$$

حال در مثلث‌های $\overset{\Delta}{AGE}$ و $\overset{\Delta}{ACS}$ با توجه به قضیهٔ تالس خواهیم داشت:



$$\Rightarrow \frac{EG}{SC}=\frac{AG}{AC} \qquad (1)$$

همچنین در مثلث $\overset{\Delta}{ACS}$ داریم:

$$SC = AS\sin ۳۰ \qquad (۲)$$

از سوی دیگر، مقدار AS همان طول تانژانت یعنی $T = R\tan\frac{\Delta}{۲}$ می‌باشد، بنابراین با توجه به رابطهٔ (۲) خواهیم داشت:

$$SC = ۲۰۰\times\tan\frac{۶۰}{۲}\times\sin ۳۰ = ۵۷/۷۳\ m$$

حال در مثلث $\overset{\Delta}{OAC}$ خواهیم داشت:

$$AC = R\sin ۳۰ = ۲۰۰\times\sin ۳۰ = ۱۰۰\ m \Rightarrow AG = AC - GC \Rightarrow AG = ۱۰۰ - ۲۰ \Rightarrow AG = ۸۰\ m$$

پس با توجه به رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

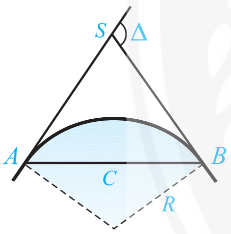
$$\frac{EG}{۵۷/۷۳} = \frac{۸۰}{۱۰۰} \Rightarrow EG = ۴۶/۱۸۴\ m \Rightarrow EF = EG - FG = ۴۶/۱۸۴ - ۲۵/۷۹۷ = ۲۰/۳۸۷\ m$$

۲۱ همانطور که گفتیم برای تعیین اجزای قوس باید دو پارامتر شعاع (R) و زاویهٔ انحراف (Δ) مشخص باشند. قبل از تعیین شعاع، به یادآوری زیر دقت کنید:

یادآوری: فاصلهٔ دو نقطه از همدیگر در دستگاه مختصات دکارتی برابر است با:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$$

با توجه به اینکه نقاط شروع و پایان بر روی قوسی که بخشی از کمان یک دایره است قرار دارند، بنابراین فاصلهٔ شروع تا پایان قوس که آن را طول وتر بزرگ (C) نامیدیم، برابر است با:



$$C = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} \qquad (۱)$$

با جایگذاری مختصات ابتدا و انتهای قوس در رابطهٔ (۱)، طول وتر بزرگ تعیین می‌شود:

$$C = \sqrt{(۶۰۰ - ۲۰۰)^۲ + (۴۰۰ - ۱۰۰)^۲} = ۵۰۰\ m$$

۱) با تعیین طول وتر بزرگ، از رابطهٔ طول وتر، شعاع قوس را تعیین می‌کنیم:

$$C = |AB| = ۲R\sin\frac{\Delta}{۲} \Rightarrow ۵۰۰ = ۲R\sin ۳۰^\circ \Rightarrow R = ۵۰۰\ m$$

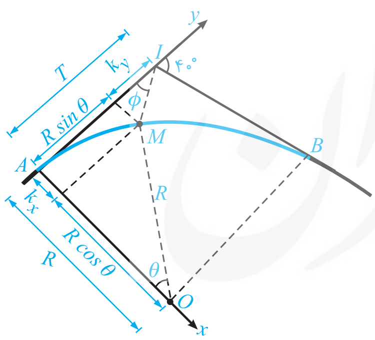
۲) با توجه به رابطهٔ طول قوس، طول قوس برابر است با:

$$L = R.\Delta^{rad} = R.\Delta(\frac{\pi}{۱۸۰}) \Rightarrow L = ۵۰۰\times۶۰\times\frac{\pi}{۱۸۰} = ۵۰۰\ m$$

۲۲ ابتدا مسیر ورودی را محور y و راستای شعاع در نقطهٔ رأس قوس را که بر مماس عمود است محور x در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$IM = \sqrt{k_x^۲ + k_y^۲}$$

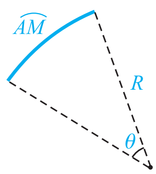
با توجه به شکل مقادیر k_y و k_x برابرند با:



$$k_x = R - R\cos\theta = R(۱ - \cos\theta)$$

$$k_y = T - R\sin\theta = R\tan\frac{\Delta}{۲} - R\sin\theta$$

از سوی دیگر، برای تعیین زاویهٔ θ می‌توان از مقدار طول کمان $\overset{\frown}{AM}$ استفاده کرد، پس داریم:



$$\overset{\frown}{AM} = R.\theta^{rad} \Rightarrow \underbrace{\boxed{AM}}_{۴۵} = \underbrace{\boxed{R}}_{۲۰۰}\times\theta^\circ\times\frac{\pi}{۱۸۰} \Rightarrow \theta = ۱۲/۸۹^\circ$$

حال با جایگذاری زاویهٔ θ در روابط k_x و k_y این مقادیر تعیین می‌شوند. در نتیجه مقدار IM برابر است با:

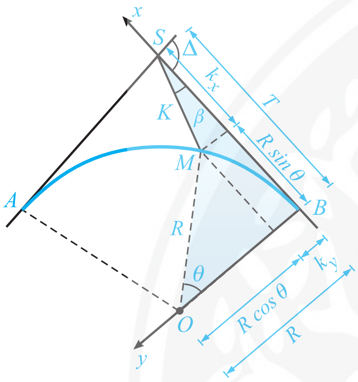
$$\xrightarrow[\Delta=۴۰^\circ]{R=۲۰۰\,m\ ,\ \theta=۱۲/۸۹^\circ}\begin{cases}k_x=R(۱-cos\theta)=۲۰۰(۱-cos۱۲/۸۹)=۵/۰۳۹\,m\\ k_y=R\tan\dfrac{\Delta}{۲}-R\sin\theta=۲۰۰\tan\dfrac{۴۰}{۲}-۲۰۰\sin۱۲/۸۹=۲۸/۱۷\,m\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ IM=\sqrt{(۵/۰۳۹)^۲+(۲۸/۱۷)^۲}=۲۸/۶۱\,m$$

همچنین برای محاسبهٔ زاویهٔ ϕ می‌توان نوشت:

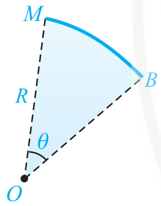
$$\tan\phi=\frac{k_x}{k_y}=\frac{۵/۰۳۹}{۲۸/۱۷}=۰/۱۷۸^\circ\ \Rightarrow\ \phi\simeq۱۰/۰۹^\circ$$

۲۳ **ابتدا** مسیر خروجی را محور x و راستای شعاع در نقطهٔ انتهای قوس را که بر مماس عمود است، **محور** y در نظر می‌گیریم. برای پیدا کردن K کافی است فواصل تصویر خط SM بر روی محـور x و y **را تعیین** کنیم تا به کمک رابطهٔ فیثاغورث مقدار K تعیین گردد.



$$K=\sqrt{k_x^۲+k_y^۲}$$

حال با توجه به شکل فوق، مقادیر k_x و k_y برابر است با:



$$k_x=T-R\sin\theta=R\tan\frac{\Delta}{۲}-R\sin\theta$$

$$k_y=R-R\cos\theta$$

همچنین برای تعیین زاویهٔ θ می‌توان از مقدار طول کمان $\widehat{BM}$ استفاده کرد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{BM}=۹۰=R.\theta^\circ\left(\frac{\pi}{۱۸۰}\right)\xrightarrow{R=۳۰۰m}\theta=۱۷/۱۸^\circ$$

بنابراین با جایگذاری زاویهٔ θ در روابط k_x و k_y، این مقادیر تعیین می‌شوند و در نتیجه، مقدار K به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\xrightarrow[\Delta=۱۰۰^\circ]{R=۳۰۰\,m\ ,\ \theta=۱۷/۱۸^\circ}\begin{cases}k_x=R\tan\dfrac{\Delta}{۲}-R\sin\theta=۳۰۰\times\tan\dfrac{۱۰۰}{۲}-۳۰۰\times\sin۱۷/۱۸=۲۶۸/۹۱\,m\\ k_y=k_y=R-R\cos\theta=R(۱-\cos\theta)=۳۰۰(۱-\cos۱۷/۱۸)=۱۳/۳۸\,m\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ K=\sqrt{k_x^۲+k_y^۲}=\sqrt{(۲۶۸/۹۱)^۲+(۱۳/۳۸)^۲}=۲۶۹/۲۴\,m$$

۲۴ **با** توجه به رابطهٔ تعریض قوس‌های افقی، ابتدا باید مقدار عرض سواره‌روی دوخطه در قوس افقی را به‌دست آورد. از اینرو با توجه به جـدول (۳) از فصل سوم مقادیر $U_۰$، L و A را برای کامیون نوع اول به شرح زیر تعیین می‌کنیم:

$$\begin{matrix}U_۰=۲/۶\,m\\ L=۱۵/۲\,m\\ A=۰/۹\end{matrix}\ \Rightarrow\begin{cases}U=U_۰+R-\sqrt{R^۲-L^۲}=۲/۶+۴۰۰-\sqrt{۴۰۰^۲-۱۵/۲^۲}=۲/۸۹\\ F_A=\sqrt{R^۲+A(۲L+A)}-R=\sqrt{۴۰۰^۲+۰/۹(۲\times۱۵/۲+۰/۹)}-۴۰۰=۰/۰۳۵۲\\ Z=\dfrac{V}{۱۰\sqrt{R}}=\dfrac{۱۰۰}{۱۰\sqrt{۴۰۰}}=۰/۵\end{cases}$$

حال خواهیم داشت:

$$W_c=۲(U+C)+F_A+Z=۲(۲/۸۹+\boxed{۰/۷})+۰/۰۳۵۲+۰/۵=۷/۷۱\,m$$

فاصلهٔ آزاد جانبی وسیلهٔ نقلیه برای سواره‌روی به عرض ۶/۵ متر

بنابراین با استفاده از رابطهٔ تعریض قوس‌های افقی می‌توان نوشت:

$$W=W_c-W_n=۷/۷۱-۶/۵=۱/۲۱\,m\ \Rightarrow\ W\cong۱/۲\,m$$

چنانچه با توجه به جدول (۵-۱۰) از نشریهٔ شمارهٔ ۴۱۵ نیز کنترل شود، میزان اضافه عرض سواره‌رو برابر با ۰/۹ متر می‌باشد.

۲۵ به منظور طرح قوس دایره‌ای ساده بر روی مسیر شکسته مطابق مراحل زیر عمل می‌کنیم:

گام اول (تعیین مقادیر سرعت طرح، بربلندی و ضریب اصطکاک جانبی): با توجه به جداول (۴)، (۸) و (۱۰) از فصل سوم، مقادیر سرعت طرح، حداکثر بربلندی و حداکثر ضریب اصطکاک جانبی را به‌دست می‌آوریم:

$$V_{Design} = ۹۰\, km/hr \quad , \quad e_{max} = ۸٪ \quad , \quad f_{max} = ۰/۱۳۰$$

گام دوم (محاسبهٔ حداقل شعاع قوس دایره‌ای (R_{min})): براساس رابطهٔ حداقل شعاع قوس دایره‌ای ساده داریم:

$$R_{min} = \frac{V^۲}{۱۲۷/۲\,(e_{max} + f_{max})} = \frac{۹۰^۲}{۱۲۷/۲ \times (۰/۰۸ + ۰/۱۳)} = ۳۰۳/۲۳\, m$$

و یا با توجه به جدول (۵)، حداقل شعاع پیشنهادی آیین‌نامه برابر با $R = ۳۰۵\, m$ می‌باشد، پس داریم:

$$R_{min} = R_{Design} = ۳۰۵\, m$$

گام سوم (کنترل طول قوس افقی): مطابق نشریهٔ شمارهٔ ۴۱۵، حداقل طول قوس افقی برحسب متر برای راه‌های اصلی معادل ۳ برابر سرعت طرح برحسب کیلومتر بر ساعت است، بنابراین خواهیم داشت:

$$L = \frac{\pi R \Delta}{۱۸۰} = \frac{\pi \times ۳۰۵ \times ۹۴}{۱۸۰} = ۵۰۰/۳۸\, m > ۳\, V_{Design} = ۳ \times ۹۰ = ۲۷۰ \qquad OK$$

گام چهارم (کنترل مسافت دید توقف): براساس نشریهٔ شمارهٔ ۴۱۵، طول قوس افقی برای تأمین مسافت دید توقف باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که:

$$SSD < L \;\Rightarrow\; ۲۲۰\, m < ۵۰۰/۳۸\, m \qquad OK$$

گام پنجم (محاسبهٔ اجزای اصلی قوس دایره‌ای ساده): با توجه به زاویهٔ تلاقی واریانت‌ها و مقدار شعاع طرح، اجزای قوس را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$T = R\, tan\frac{\Delta}{۲} = ۳۰۵ \times tan\frac{۹۴}{۲} = ۳۲۷/۰۷\, m \qquad C = ۲\, R\, sin\frac{\Delta}{۲} = ۲ \times ۳۰۵ \times sin\frac{۹۴}{۲} - ۴۴۶/۱۲\, m$$

$$E = R\,(sec\frac{\Delta}{۲} - ۱) = ۳۰۵ \times (sec\frac{۹۴}{۲} - ۱) = ۱۴۲/۲۱\, m \qquad M = R\,(۱ - cos\frac{\Delta}{۲}) = ۳۰۵ \times (۱ - cos\frac{۹۴}{۲}) = ۹۶/۹۹\, m$$

گام ششم (برآورد کیلومتراژ نقاط شروع، وسط و پایان قوس دایره‌ای): با توجه به مقادیر T و L کیلومتراژ نقاط را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$KM_{\text{شروع}} = KM_B - T = ۲۵۰۰ - ۳۲۷/۰۷ = ۲۱۷۲/۹۳\, m \qquad KM_{\text{وسط}} = KM_{\text{شروع}} + \frac{L}{۲} = ۲۱۷۲/۹۳ + \frac{۵۰۰/۳۸}{۲} = ۲۴۲۳/۱۲\, m$$

$$KM_{\text{پایان}} = KM_{\text{شروع}} + L = ۲۱۷۲/۹۳ + ۵۰۰/۳۸ = ۲۶۷۳/۳۱\, m$$

حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصل ششم

۱ برای اثبات رابطهٔ T_b اضلاع چندضلعی $O_2ASBO_1O_2$ را روی ضلع O_1B یا همان R_2 تصویر می‌نماییم. باید جمع جبری تصاویر اضلاع چندضلعی روی هر ضلع برابر صفر باشد. بنابراین داریم:

$$O_1B - BF - EF - FO_1 = ۰$$

$$R_1 - T_b \sin\Delta - R_2 \cos\Delta + (R_1 - R_2)\cos\Delta_1 = ۰ \Rightarrow T_b \sin\Delta = R_1 - R_2\cos\Delta + (R_1 - R_2)\cos\Delta_1$$

$$\Rightarrow T_b = \frac{R_1 - R_2\cos\Delta - (R_1 - R_2)\cos\Delta_1}{\sin\Delta} \xrightarrow{\text{ را به دو صورت کسر اضافه و کم می‌کنیم } R_2} T_b = \frac{R_2(1-\cos\Delta) + (R_1 - R_2)(1-\cos\Delta_1)}{\sin\Delta}$$

برای اثبات رابطهٔ T_a نیز اضلاع چند ضلعی $O_2ASBO_1O_2$ را روی ضلع O_2A یا همان R_1 تصویر می‌نماییم و جمع جبری تصاویر اضلاع را برابر صفر در نظر می‌گیریم. پس خواهیم داشت:

$$\overbrace{\boxed{O_2A}}^{R_1} - \underbrace{\boxed{BV}}_{T_a \sin\Delta} - \overbrace{\boxed{MN}}^{R\cos\Delta} - \underbrace{\boxed{O_2N}}_{(R_1-R_2)\cos\Delta_2} = ۰ \Rightarrow R_2 = T_a\sin\Delta - R_1\cos\Delta + (R_1 - R_2)\cos\Delta_2 = ۰$$

$$\Rightarrow T_a = \frac{R_2 - R_1\cos\Delta + (R_1 - R_2)\cos\Delta_2}{\sin\Delta} \xrightarrow{\text{ را در صورت کسر اضافه و کم می‌کنیم } R_1} T_a = \frac{R_1(1-\cos\Delta) - (R_1 - R_2)(1-\cos\Delta_2)}{\sin\Delta}$$

۲ برای به‌دست آوردن کیلومتراژ نقاط ابتدا، انتها و اتصال قوس دایره‌ای مرکب دو مرکزی ابتدا می‌بایست T_b، L_1 و L_2 را تعیین کرد. بنابراین داریم:

$$T_b = C\frac{\sin\Delta_1}{\sin\Delta} + R_2\tan\frac{\Delta_2}{2} \quad , \quad C = R_1\tan\frac{\Delta_1}{2} + R_2\tan\frac{\Delta_2}{2}$$

حال با جایگذاری مفروضات مسئله در روابط فوق خواهیم داشت:

$$\Delta_1 = \Delta - \Delta_2 = ۱۲۳^\circ - ۴۱^\circ = ۸۲^\circ$$

$$C = ۳۶۰\times\tan\frac{۸۲}{۲} + ۱۸۰\times\tan\frac{۴۱}{۲} = ۳۸۰/۲۴\,m \qquad T_b = ۳۸۰/۲۴\times\frac{\sin ۸۲}{\sin ۱۲۳} + ۱۸۰\times\tan\frac{۴۱}{۲} = ۵۱۶/۲۷\,m$$

$$L_1 = \frac{\pi R_1\Delta_1}{۱۸۰} = \frac{\pi\times۳۶۰\times۸۲}{۱۸} = ۵۱۵/۲۲\,m \qquad L_2 = \frac{\pi R_2\Delta_2}{۱۸۰} = \frac{\pi\times۱۸۰\times۴۱}{۱۸۰} = ۱۲۸/۸۰\,m$$

اکنون به‌راحتی می‌توان با کمک روابط کیلومتراژ در قوس دایره‌ای مرکب دو مرکزی، کیلومتراژ نقاط مطلوب را به‌صورت زیر تعیین کرد:

$$KM_A = KM_S - T_b = ۸۷۰۵ - ۵۱۶/۲۷ = ۸۱۸۸/۷۳\,m \Rightarrow KM_A = ۸\,km + ۱۸۸/۷۳\,m$$

$$KM_J = KM_A + L_2 = ۸۱۸۸/۷۳ + ۱۲۸/۸۰ = ۸۳۱۷/۵۳\,m \Rightarrow KM_J = ۸\,km + ۳۱۷/۵۳\,m$$

$$KM_B = KM_J + L_1 = ۸۳۱۷/۵۳ + ۵۱۵/۲۲ = ۸۸۳۲/۷۵\,m \Rightarrow KM_B = ۸\,km + ۸۳۲/۷۵\,m$$

۳ از آنجا که فقط زاویهٔ انحراف کل قوس دایره‌ای مرکب دو مرکزی و نوع راه مشخص است مطابق مراحل زیر عمل می‌کنیم:

گام اول (تعیین شعاع قوس کوچکتر (R_2) و شعاع قوس بزرگتر (R_1)): با توجه به رابطهٔ تعیین حداقل شعاع قوس دایره‌ای و با داشتن مقادیر V_{Design}، e_{max} و f_{max} از جداول ۴، ۸ و ۱۰ از فصل سوم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} V_{Design} = ۱۱۰\,km/hr \\ e_{max} = ۰/۰۸ \\ f_{max} = ۰/۱۱ \end{cases} \Rightarrow R_{min} = \frac{V^2}{۱۲۷/۲\,(e_{max} + f_{max})} = \frac{۱۱۰^2}{۱۲۷/۲\,(۰/۰۸ + ۰/۱۱)} = ۵۰۰/۶۶\,m$$

مطابق جدول (۵) از فصل پنجم $\Rightarrow (R)_{\text{حداقل آیین‌نامه}} = ۵۰۵\,m \Rightarrow R_2 = R_{Design} = ۵۰۵\,m$

اکنون با توجه به ضابطهٔ آیین‌نامه می‌توان فرض کرد:

$$R_1 = ۱/۵\,R_2 = ۱/۵\times۵۰۵ = ۷۵۷/۵\,m$$

گام دوم (تعیین زوایای انحراف هر یک از قوس‌ها): براساس فرض نسبت شعاع دو قوس می‌توان نوشت:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \Rightarrow \frac{۷۵۷/۵}{۵۰۵} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 = ۱/۵\,\Delta_2$$

اما می‌دانیم‌که:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 \Rightarrow \Delta = ۱/۵\,\Delta_2 + \Delta_2 = ۲/۵\,\Delta_2 = ۱۰۰ \Rightarrow \Delta_2 = ۴۰^\circ \Rightarrow \Delta_1 = ۱/۵\times۴۰ = ۶۰^\circ$$

گام سوم (کنترل طول قوس): همواره طول کل قوس دایره‌ای مرکب نباید کمتر از ۱۵۰ m باشد، پس خواهیم داشت:

$$L = L_1 + L_2 = \frac{\pi R_1\Delta_1^\circ}{۱۸۰} + \frac{\pi R_2\Delta_2^\circ}{۱۸۰} = \frac{\pi\times۷۵۷/۵\times۶۰}{۱۸۰} + \frac{\pi\times۵۰۵\times۴۰}{۱۸۰} = ۱۱۴۵/۸۰\,m > ۱۵۰\,m \qquad OK$$

گام چهارم (تعیین مقادیر C، T_a و T_b): اکنون با توجه به مقادیر R_1، R_2، Δ، Δ_1 و Δ_2 سایر اجزای اصلی را می‌توان از روابط زیر به سادگی به‌دست آورد:

$$C = R_1 \tan\frac{\Delta_1}{2} + R_2 \tan\frac{\Delta_2}{2} = 757/5 \times \tan\frac{60}{2} + 505 \times \tan\frac{40}{2} = 621/14\ m$$

$$T_a = C\frac{\sin \Delta_2}{\sin \Delta} + R_1 \tan\frac{\Delta_1}{2} = 621/14 \times \frac{\sin 40}{\sin 100} + 757/5 \times \tan\frac{60}{2} = 842/76\ m$$

$$T_b = C\frac{\sin \Delta_1}{\sin \Delta} + R_2 \tan\frac{\Delta_2}{2} = 621/14 \times \frac{\sin 60}{\sin 100} + 505 \times \tan\frac{40}{2} = 730/02\ m$$

۴ با توجه به مفروضات مسئله و با معلوم بودن زوایای انحراف هر یک از دو قوس دایره‌ای و نیز سرعت طرح به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام اول (تعیین شعاع قوس کوچکتر (R_2)): با توجه به رابطهٔ تعیین حداقل شعاع قوس دایره‌ای می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} V_{Design} = 120\ km/hr \\ e_{max} = 0/08 \\ f_{max} = 0/09 \end{cases} \Rightarrow R_{min} = \frac{V^2}{127/2\,(e_{max} + f_{max})} = \frac{120^2}{127/2\,(0/08 + 0/09)} = 665/92\ m$$

مطابق جدول (۵) از فصل پنجم $\Rightarrow R_{\text{حداقل آیین‌نامه}} = 667\ m \Rightarrow R_2 = R_{Design} = max(665/92\ m, 667\ m) = 667\ m$

گام دوم (تعیین شعاع قوس بزرگتر ((R_1))): براساس نسبت شعاع قوس دایره‌ای و زاویهٔ انحراف خواهیم داشت:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \Rightarrow R_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \times R_2 = \frac{70}{50} \times 667\ m = 933/8\ m$$

گام سوم (تعیین مقادیر T_a و T_b با معلوم بودن مقادیر R_1، R_2، Δ_1، Δ_2 و Δ): اکنون با مشخص بودن مقادیر زوایای انحراف و شعاع قوس‌ها داریم:

$$C = R_1 \tan\frac{\Delta_1}{2} + R_2 \tan\frac{\Delta_2}{2} = 933/8 \times \tan\frac{70}{2} + 667 \times \tan\frac{50}{2} = 964/88\ m$$

$$T_a = C\frac{\sin \Delta_2}{\sin \Delta} + R_1 \tan\frac{\Delta_1}{2} = 964/88 \times \frac{\sin 50}{\sin 120} + 933/8 \times \tan\frac{70}{2} = 1507/34\ m$$

$$T_b = C\frac{\sin \Delta_1}{\sin \Delta} + R_2 \tan\frac{\Delta_2}{2} = 964/88 \times \frac{\sin 70}{\sin 120} + 667 \times \tan\frac{50}{2} = 1357/98\ m$$

۵ در این حالت برای به‌دست آوردن کیلومتراژ نقاط شروع، پایان و اتصال قوس دایره‌ای مرکب می‌بایست مقادیر L_1 و L_2 را به‌دست آوریم، بنابراین داریم:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \Rightarrow \frac{243}{180} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 = 1/3\ \Delta_2$$

$$\Rightarrow \Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 1/3\ \Delta_2 + \Delta_2 = 2/3\ \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 = \frac{\Delta}{2/3} = \frac{103/5}{2/3} = 45^\circ \quad , \quad \Delta_1 = 1/3 \times 45 = 58/5^\circ$$

$$L_1 = \frac{\pi R_1 \Delta_1}{180} = \frac{\pi \times 243 \times 58/5}{180} = 248/10\ m \quad , \quad L_2 = \frac{\pi R_2 \Delta_2}{180} = \frac{\pi \times 180 \times 45}{180} = 141/37\ m$$

اکنون با جایگذاری مقادیر L_1، L_2 و T_b در روابط کیلومتراژ قوس دایره‌ای مرکب و مرکزی داریم:

$$KM_A = KM_S - T_b = 2200 - 259/26 = 1940/74\ m \Rightarrow KM_A = 1\ km + 940/74\ m$$

$$KM_J = KM_A + L_2 = 1940/74 + 141/37 = 2082/11\ m \Rightarrow KM_J = 2\ km + 082/11\ m$$

$$KM_B = KM_J + L_1 = 2082/11 + 248/10 = 2330/21\ m \Rightarrow KM_B = 2\ km + 330/21\ m$$

۶ با توجه به شکل برای مثلث $\overset{\Delta}{O_2A'''C}$ داریم:

$$O_2A' = O_2A''' + P \quad , \quad \cos \Delta_1 = \frac{O_2A'''}{R_2} \Rightarrow O_2A' = \underbrace{\boxed{R_2 \cos \Delta_1}}_{O_2A'''} + P$$

در مثلث $\overset{\Delta}{O_2CW}$ نیز خواهیم داشت:

$$\cos\frac{\Delta_2}{2} = \frac{x}{R_2} \Rightarrow \overbrace{\boxed{x}}^{O_2W} = R_2 \cos\frac{\Delta_2}{2} \Rightarrow R_2 \cos\frac{\Delta_2}{2} + M = R_2 \Rightarrow M = R_2 - R_2 \cos\frac{\Delta_2}{2}$$

از طرفی می‌دانیم‌که:

$$\Delta=۲\Delta_۱+\Delta_۲ \xrightarrow{\text{طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم}} \Delta_۱+\frac{\Delta_۲}{۲}=\frac{\Delta}{۲}=\widehat{A'O_۲S}$$

همچنین در مثلث $\overset{\Delta}{O_۲A'S}$ می‌توان نوشت:

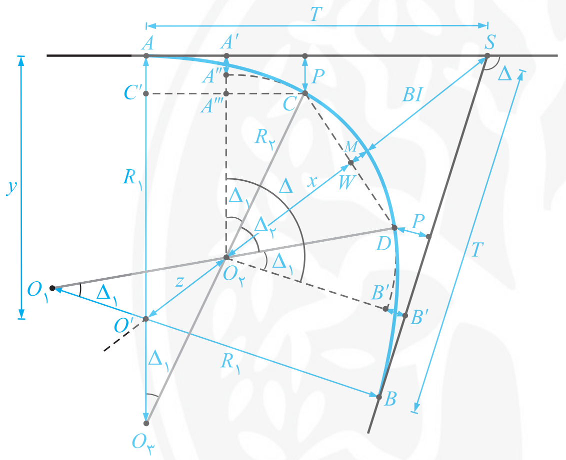
$$\cos\frac{\Delta}{۲}=\frac{O_۲A'}{BI+R_۲}=\frac{O_۲A'''+P}{BI+R_۲}\Rightarrow \cos\frac{\Delta}{۲}=\frac{R_۲\cos\Delta_۱+P}{BI+R_۲}$$

از سوی دیگر در مثلث $\overset{\Delta}{O_۲C'C}$ خواهیم داشت:

$$\cos\Delta_۱=\frac{R_۱-P}{R_۱}\Rightarrow \boxed{P=R_۱(۱-\cos\Delta_۱)}$$

$$\Rightarrow \boxed{BI=\frac{R_۲\cos\Delta_۱+R_۱-R_۱\cos\Delta_۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}-R_۲}$$

اکنون با توجه به شکل زیر داریم:



$$\begin{cases}\tan\frac{\Delta}{۲}=\frac{T}{y}\Rightarrow y=T\cot\frac{\Delta}{۲}\\ \sin\frac{\Delta}{۲}=\frac{T}{BI+R_۲+z}\end{cases}$$

$$\frac{\sin\Delta_۱}{\sin\frac{\Delta_۲}{۲}}=\frac{z}{R_۱-T\cot\frac{\Delta}{۲}}\Rightarrow z=(R_۱-T\cot\frac{\Delta}{۲})\frac{\sin\Delta_۱}{\sin\frac{\Delta_۲}{۲}}$$

$$\sin\frac{\Delta}{۲}=\frac{T}{BI+R_۲+z}=\frac{T}{BI+R_۲+(R_۱-T\cot\frac{\Delta}{۲})\frac{\sin\Delta_۱}{\sin\frac{\Delta_۲}{۲}}}$$

$$T=\sin\frac{\Delta}{۲}\times\left[\frac{R_۲\cos\Delta_۱+R_۱-R_۱\cos\Delta_۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}\right]+\sin\frac{\Delta}{۲}\times\frac{\sin\Delta_۱}{\sin\frac{\Delta_۲}{۲}}\times R_۱-T\frac{\cos\frac{\Delta}{۲}}{\sin\frac{\Delta_۲}{۲}}\times\sin\Delta_۱$$

$$\Rightarrow \boxed{T=\frac{\tan\frac{\Delta}{۲}\times\left[R_۲\cos\Delta_۱+R_۱-R_۱\cos\Delta_۱\right]+\sin\frac{\Delta}{۲}\times\frac{\sin\Delta_۱}{\sin\frac{\Delta_۲}{۲}}}{۱+\left[\frac{\cos\frac{\Delta}{۲}}{\sin\frac{\Delta_۲}{۲}}\times\sin\Delta_۱\right]}}$$

۷

الف) با توجه به اطلاعات مسئله، قوس مفروض قوس دایره‌ای مرکب سه مرکزی متقارن می‌باشد، بنابراین داریم:

$$P_۱=P_۲=P\Rightarrow R_۱=R_۳\quad,\quad \Delta_۱=\Delta_۳$$

$$P=R_۱(۱-\cos\Delta_۱)=۳۰۰\times(۱-\cos ۴۵^\circ)=۸۷/۸۶\ m\quad,\quad M=R_۲(۱-\cos\frac{\Delta_۲}{۲})=۲۰۰\times(۱-\cos\frac{۳۰}{۲})=۶/۸۱\ m$$

$$BI=\frac{R_۲\cos\Delta_۱+R_۱-R_۱\cos\Delta_۱}{\cos\frac{\Delta}{۲}}-R_۲=\frac{۲۰۰\cos ۴۵+۳۰۰-۳۰۰\cos ۴۵}{\cos\frac{۱۲۰}{۲}}-۲۰۰=۲۵۸/۵۷\ m$$

$$T=\frac{\tan\frac{\Delta}{۲}\times\left[R_۲\cos\Delta_۱+R_۱-R_۱\cos\Delta_۱\right]+\sin\frac{\Delta}{۲}\times\frac{\sin\Delta_۱}{\sin\frac{\Delta_۲}{۲}}}{۱+\left[\frac{\cos\frac{\Delta}{۲}}{\sin\frac{\Delta_۲}{۲}}\times\sin\Delta_۱\right]}=\frac{\tan\frac{۱۲۰}{۲}\times\left[۲۰۰\times\cos ۴۵+۳۰۰-۳۰۰\cos ۴۵\right]+\sin\frac{۱۲۰}{۲}\times\frac{\sin ۴۵}{\sin\frac{۳۰}{۲}}}{۱+\left[\frac{\cos\frac{۱۲۰}{۲}}{\sin\frac{۳۰}{۲}}\times\sin ۴۵\right]}$$

$$T=۱۶۸/۳۶\ m$$

ب) حال برای به‌دست آوردن کیلومتراژ نقاط اتصال، شروع و پایان می‌بایست ابتدا طول هر سه قوس دایره‌ای را به‌دست آورد، پس خواهیم داشت:

$$L_۱ = L_۳ = \frac{\pi R_۱ \Delta_۱}{۱۸۰} = \frac{\pi \times ۳۰۰ \times ۴۵}{۱۸۰} = ۲۳۵/۶۱\,m$$

$$L_۲ = \frac{\pi R_۲ \Delta_۲}{۱۸۰} = \frac{\pi \times ۲۰۰ \times ۳۰}{۱۸۰} = ۱۰۴/۷۱\,m$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$KM_A = KM_S - T = ۲۰۰۰۰ - ۱۶۸/۳۶ = ۸۳۱/۶۴\,m \Rightarrow KM_A = ۱۹\,km + ۸۳۱/۶۴\,m$$

$$KM_J = KM_A + L_۱ = ۱۹۸۳۱/۶۴ + ۲۳۵/۶۱ = ۲۰۰۶۷/۲۵\,m \Rightarrow KM_J = ۲۰\,km + ۰۶۷/۲۵\,m$$

$$KM_{J'} = KM_J + L_۲ = ۲۰۰۶۷/۲۵ + ۱۰۴/۷۱ = ۲۰۱۷۱/۹۶\,m \Rightarrow KM_{J'} = ۲۰\,km + ۱۷۱/۹۶\,m$$

$$KM_B = KM_{J'} + L_۳ = ۲۰۱۷۱/۹۶ + ۲۳۵/۶۱ = ۴۰۷/۵۷\,m \Rightarrow KM_B = ۲۰\,km + ۴۰۷/۵۷\,m$$

۸ با توجه به شکل، در مثلث‌های $\overset{\Delta}{O_۱AS_۱}$ و $\overset{\Delta}{O_۲AS_۲}$ داریم:

$$\begin{cases} \tan\frac{\Delta_۱}{۲} = \frac{x}{R_۱} \Rightarrow x = R_۱ \tan\frac{\Delta_۱}{۲} \\ \tan\frac{\Delta_۲}{۲} = \frac{y}{R_۲} \Rightarrow y = R_۲ \tan\frac{\Delta_۲}{۲} \end{cases}$$

همچنین برای مثلث $\overset{\Delta}{SS_۱S_۲}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{x+y}{\sin\Delta} = \frac{SA-x}{\sin\Delta_۲} = \frac{SB+y}{\sin\Delta_۱} \qquad (۱)$$: قضیه سینوس‌ها

با جایگذاری مقادیر x و y در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \frac{R_۱ \tan\frac{\Delta_۱}{۲} + R_۲ \tan\frac{\Delta_۲}{۲}}{\sin\Delta} = \frac{SA - R_۱ \tan\frac{\Delta_۱}{۲}}{\sin\Delta_۲} = \frac{SB + R_۲ \tan\frac{\Delta_۲}{۲}}{\sin\Delta_۱}$$

حال با فرض مقادیر $R_۱$، $R_۲$، $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ درستی رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$Example: \begin{cases} R_۱ = ۱۵۰ \\ R_۲ = ۱۲۰ \\ \Delta_۱ = ۴۵^\circ \\ \Delta_۲ = ۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۳۱/۴}{۰/۲۵۹} = \frac{SA - ۶۲/۱۳}{۰/۸۶۶} = \frac{SB + ۶۹/۲۸}{۰/۷۰۷} \Rightarrow \begin{cases} SA = ۵۰۱/۴۸\,m \\ SB = ۲۸۹/۴۱\,m \end{cases}$$

$$\begin{cases} SA = \frac{۲۷۰(۱-\cos ۶۰) - ۱۵۰(۱-\cos ۱۵)}{\sin ۱۵} = \frac{۱۲۹/۸۹}{۰/۲۵۸۸} = ۵۰۱/۸۹\,mm \\ SB = \frac{۲۷۰(۱-\cos ۴۵) - ۱۲۰(۱-\cos ۱۵)}{\sin ۱۵} = \frac{۷۴/۹۹}{۰/۲۵۸۸} = ۲۸۹/۷۶\,m \end{cases}$$

۹ برای تعیین کیلومتراژ نقاط ابتدا، انتها و اتصال قوس دایره‌ای مرکب معکوس می‌بایست طول پاره‌خط AS یا همان d را به‌دست آورد، پس داریم:

$$SB = SS_۲ - BS_۲ = ۲۲۰ - R_۲ \tan\frac{\Delta_۲}{۲} = ۲۲۰ - ۱۲۰ \tan\frac{۶۰}{۲} = ۱۵۰/۷۱\,m$$

$$\boxed{SB} = d\cos\Delta_۱ + R_۱ \sin\Delta - (R_۱ + R_۲)\cos\Delta_۲ \Rightarrow ۱۵۰/۷۱ = d \times \cos ۴۵ + ۱۵۰ \sin \boxed{۱۵} - (۱۵۰+۱۲۰) \times \cos ۶۰ \Rightarrow d = ۲۴۶/۸۸\,m$$

$$\Delta = \Delta_۲ - \Delta_۱ = ۶۰ - ۴۵ = ۱۵^\circ$$

حال باید طول هر یک از قوس‌های دایره‌ای را محاسبه کنیم:

$$L_۱ = \frac{\pi R_۱ \Delta_۱}{۱۸۰} = \frac{\pi \times ۱۵۰ \times ۴۵}{۱۸۰} = ۱۱۷/۸۰\,m \quad , \quad L_۲ = \frac{\pi R_۲ \Delta_۲}{۱۸۰} = \frac{\pi \times ۱۲۰ \times ۶۰}{۱۸۰} = ۱۲۵/۶۶\,m$$

اکنون با داشتن مقادیر $L_۱$، $L_۲$ و d کیلومتراژ نقاط مطلوب به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$KM_A = KM_S - d = ۳۵۰۰ - ۲۴۶/۸۸ = ۳۲۵۳/۱۲\,m \Rightarrow KM_A = ۳\,km + ۲۵۳/۱۲\,m$$

$$KM_J = KM_A + L_۱ = ۳۲۵۳/۱۲ + ۱۱۷/۸۰ = ۳۳۷۰/۹۲\,m \Rightarrow KM_J = ۳\,km + ۳۷۰/۹۲\,m$$

$$KM_B = KM_J + L_۲ = ۳۳۷۰/۹۲ + ۱۲۵/۶۶ = ۳۴۹۶/۵۸\,m \Rightarrow KM_B = ۳\,km + ۴۹۶/۵۸\,m$$

$$(KM_S)_{\text{بعد از طرح قوس معکوس}} = KM_B + SB = ۳۴۹۶/۵۸ + ۱۵۰/۷۱ = ۳۶۴۷/۲۹\,m \Rightarrow KM_S = ۳\,km + ۶۴۷/۹۲\,m$$

۱۰ با توجه به اطلاعات مسئله، قوس مفروض یک قوس دایره‌ای مرکب معکوس با مماس‌های موازی می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$R_۱ = R_۲ \qquad , \qquad \Delta_۱ = \Delta_۲$$

$$C = ۴\,R\,sin\frac{\Delta}{۲} \Rightarrow R = \frac{C}{۴\,sin\frac{\Delta}{۲}} = \frac{۲۵۰}{۴\times sin\frac{۳۰}{۲}} = ۲۴۱/۴۸\,m \qquad , \qquad d = ۲\,R\,sin\,\Delta = ۲\times ۲۴۱/۴۸\times sin\,۳۰ = ۲۴۱/۴۸\,m$$

$$P = ۲\,R\,(۱-cos\,\Delta) = ۲\times ۲۴۱/۴۸\times(۱-cos\,۳۰) = ۶۴/۷۰\,m \qquad , \qquad T = ۲\,R\,tan\frac{\Delta}{۲} = ۲\times ۲۴۱/۴۸\times tan\frac{۳۰}{۲} = ۱۲۹/۴۰\,m$$

حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصل هفتم

۱ با توجه به اطلاعات مسئله برای زاویهٔ رأس قوس معکوس داریم:

$$\begin{cases} r=۲\times m=۸۰\,m \\ R=۳۵\,m \end{cases} \Rightarrow tan\frac{\beta}{۲}=\frac{-m+\sqrt{m^۲+R(۲r+R)}}{۲r+R} \xrightarrow{m=\frac{r}{۲}=۴۰\,m} tan\frac{\beta}{۲}=\frac{-۴۰+\sqrt{۴۰^۲+۳۵\,(۲\times۸۰+۳۵)}}{۲\times۸۰+۳۵}=\frac{۵۱/۷۸}{۱۹۵}=۰/۲۶$$

$$\Rightarrow\ ۲arctan\,۰/۲۶=۲۹/۱۴^\circ$$

حال به‌راحتی می‌توان طول قوس ورودی (یا خروجی) را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$L_r=\frac{\pi r\beta}{۱۸۰}=\frac{\pi\times۸۰\times۲۹/۱۴}{۱۸۰}=۴۰/۶۸\,m$$

۲ براساس داده‌های مفروض مسئله، ابتدا می‌بایست زاویهٔ قوس ورودی را به‌دست آورد، پس داریم:

$$\begin{cases} R=۳\,m \\ r=۳/۵\,m \end{cases} \Rightarrow tan\frac{\beta}{۲}=\frac{-m+\sqrt{m^۲+R(۲r+R)}}{۲r+R}=\frac{-m+\sqrt{m^۲+m(۷m+m)}}{۲\times۳/۵\,m+m}=\frac{۲m}{۸m}=۰/۲۵\ \Rightarrow\ \beta=۲\,arctan۰/۲۵=۲۸/۰۷$$

حال باید زاویهٔ قوس اصلی را به‌صورت زیر تعیین کرد:

$$\alpha=۱۸۰-\Delta=۱۸۰-۱۳۵=۴۵^\circ\ \Rightarrow\ \gamma=۱۸۰+۲\beta-\alpha=۱۸۰+(۲\times۲۸/۰۷)-۴۵=۱۹۱/۱۴^\circ$$

اکنون به آسانی با توجه به رابطهٔ طول کل قوس سرپانتین می‌توان نوشت:

$$L_T=L_R+L_r+۲m=\frac{\pi\ R\ \gamma}{۱۸۰}+۲\frac{\pi\ r\ \beta}{۱۸۰}+۲\,m=\frac{\pi\times m\times۱۹۱/۱۴}{۱۸۰}+۲\times\frac{\pi\times۳/۵m\times۲۸/۰۷}{۱۸۰}+۲\,m=۳/۳۳\,m+۳/۴۲\,m+۲\,m=۸/۷۵\,m$$

$$\Rightarrow\ L_T=۸/۷۵\,m$$

۳ برای به‌دست آوردن کیلومتراژ نقاط اصلی قوس سرپانتین، می‌بایست فاصلهٔ رأس قوس ورودی تا مرکز قوس اصلی، طول مماس قـوس ورودی، طول قوس ورودی و طول قوس اصلی را به‌دست آورد. بدین منظور ابتدا زوایای اصلی قوس سرپانتین را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\alpha=۳۵^\circ$$

$$tan\frac{\beta}{۲}=\frac{-m+\sqrt{m^۲+R(۲r+R)}}{۲r+R}=\frac{-۲۰+\sqrt{۲۰^۲+۳۵\,(۲\times۹۰+۳۵)}}{۲\times۹۰+۳۵}=۰/۳۲\ \Rightarrow\ \beta=۲arctan۰/۳۲=۳۵/۴۸^\circ$$

$$\gamma=۱۸۰+۲\beta-\alpha=۱۸۰+(۲\times۳۵/۴۸)-۳۵=۲۱۵/۹۶^\circ$$

حال می‌توان مقادیر طول مورد نیاز برای محاسبهٔ کیلومتراژ نقاط اصلی را از روابط آنها به‌دست آورد، یعنی داریم:

$$S_۱S=\frac{R}{sin\beta}=\frac{۳۵}{sin۳۵/۴۸}=۶۰/۳۰\,m\quad,\quad T=r\,tan\frac{\beta}{۲}=۹۰\times tan\frac{۳۵/۴۸}{۲}=۲۸/۷۹\,m$$

$$L_r=\frac{\pi r\beta}{۱۸۰}=\frac{\pi\times۹۰\times۳۵/۴۸}{۱۸۰}=۵۵/۷۳\,m\quad,\quad L_R=\frac{\pi R\gamma}{۱۸۰}=\frac{\pi\times۳۵\times۲۱۵/۹۶}{۱۸۰}=۱۳۱/۹۲\,m$$

اکنون کیلومتراژ نقاط اصلی به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$KM_A=KM_S-S_۱S-T=۵۰۵۰-۶۰/۳۰-۲۸/۷۹=۴۹۶۰/۹۱\,m\ \Rightarrow\ KM_A=۴\,km+۹۶۰/۹۱\,m$$

$$KM_C=KM_A+L_r=۴۹۶۰/۹۱+۵۵/۷۳=۵۰۱۶/۶۴\,m\ \Rightarrow\ KM_C=۵\,km+۰۱۶/۶۴\,m$$

$$KM_M=KM_C+m=۵۰۱۶/۶۴+۲۰=۵۰۳۶/۶۴\,m\ \Rightarrow\ KM_M=۵\,km+۰۳۶/۶۴\,m$$

$$KM_N=KM_M+L_R=۵۰۳۶/۶۴+۱۳۱/۹۲=۵۱۶۸/۵۶\,m\ \Rightarrow\ KM_N=۵\,km+۱۶۸/۵۶\,m$$

$$KM_D=KM_N+m=۵۱۶۸/۵۶+۲۰=۵۱۸۸/۵۶\,m\ \Rightarrow\ KM_D=۵\,km+۱۸۸/۵۶\,m$$

$$KM_B=KM_D+L_r=۵۱۸۸/۵۶+۵۵/۷۳=۵۲۴۴/۲۹\,m\ \Rightarrow\ KM_B=۵\,km+۲۴۴/۲۹\,m$$

۴ طراحی قوس سرپانتین را به‌صورت گام‌بندی زیر انجام می‌دهیم:

گام اول: ابتدا مقادیر V_{Design}، e_{max} و f_{max} را با استفاده از جداول (۵)، (۸) و (۱۰) از فصل سوم به‌دست می‌آوریم:

$$V_{Design}=۳۰\,km/hr\quad,\quad e_{max}=۸٪\quad,\quad f_{max}=۰/۱۷$$

گام دوم: حداقل شعاع قوس ورودی و خروجی را به کمک رابطهٔ تعیین شعاع قوس دایره‌ای به‌دست آورده و با مقادیر حداقل آیین‌نامه کنترل می‌کنیم:

$$\begin{cases} R=\dfrac{V^۲}{۱۲۷/۲(e_{max}+f_{max})}=\dfrac{۳۰^۲}{۱۲۷/۲(۰/۰۸+۰/۱۷)}=۲۸/۳۰\,m \\ R_{\text{حداقل آیین‌نامه}}=۳۰\,m\ \Leftrightarrow\ \text{جدول (۵) از فصل پنجم} \end{cases}\Rightarrow\ r_{Design}=۳۰\,m$$

گام سوم: با توجه به جدول (۱)، حداقل شعاع قوس اصلی و سایر مشخصات آن را انتخاب می‌کنیم:

$R=۱۵\,m\;,\;e=۶\%\;,\;g=۴\%\;,\;$ میزان تعریض قوس $=۳\,m\;,\;m=۲۰\,m$

گام چهارم: با استفاده از روابط قوس سرپانتین متقارن، اجزای اصلی قوس با داشتن مقادیر R، r و m به‌راحتی به‌دست می‌آید، پس داریم:

۱- زاویهٔ انحراف قوس دایره‌ای ورودی یا خروجی:

$$\tan\frac{\beta}{۲}=\frac{-m+\sqrt{m^۲+R(۲r+R)}}{۲r+R}=\frac{-۲۰+\sqrt{۲۰^۲+۱۵\,(۲\times۳۰+۱۵)}}{۲\times۳۰+۱۵}=۰/۲۵\;\Rightarrow\;\beta=۲\arctan ۰/۲۵=۲۸/۰۷^\circ$$

۲- طول مماس قوس ورودی و خروجی:

$$T=r\tan\frac{\beta}{۲}=۳۰\times\tan\frac{۲۸/۰۷}{۲}=۷/۴۹\,m$$

۳- فاصلهٔ رأس قوس ورودی یا خروجی تا مرکز قوس اصلی:

$$S_۱S=S_۲S=\frac{R}{\sin\beta}=\frac{۱۵}{\sin ۲۸/۰۷}=۳۱/۸۷\,m$$

۴- زاویهٔ پیچ:

$$\hat{\alpha}=۱۸۰^\circ-\hat{\Delta}=۱۸۰^\circ-۱۵۵^\circ=۲۵^\circ$$

۵- زاویهٔ قوس اصلی:

$$\gamma=۱۸۰+۲\hat{\beta}-\hat{\alpha}=۱۸۰+(۲\times۲۸/۰۷)-۲۵=۲۱۱/۱۴^\circ$$

۶- طول کل سرپانتین:

$$L_T=L_R+۲L_r+۲m=\frac{\pi R\gamma}{۱۸۰}+۲m=\frac{\pi\times۱۵\times۲۱۱/۱۴}{۱۸۰}+۲\times\frac{\pi\times۳۰\times۲۸/۰۷}{۱۸۰}+۲\times۲۰=۵۵/۲۷+۲۹/۳۹+۴۰=۱۲۴/۶۶\,m$$

۵ در حالت خاص در قوس سرپانتین متقارن اگر شعاع قوس ورودی (یا خروجی) با طول اتصال مستقیم برابر باشد $(m=r)$، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\tan\frac{\beta}{۲}=\frac{-m+\sqrt{m^۲+R(۲r+R)}}{۲r+R}\xrightarrow{m=r}\tan\frac{\beta}{۲}=\frac{-r+\sqrt{r^۲+R(۲r+R)}}{۲r+R}=\frac{-r+\sqrt{(r+R)^۲}}{۲r+R}=\frac{-r+(r+R)}{۲r+R}$$

$$\Rightarrow\;\tan\frac{\beta}{۲}=\frac{R}{۲r+R}$$

حال زاویهٔ رأس قوس ورودی برابر خواهد بود با:

$$\beta=۲\arctan\left(\frac{R}{۲r+R}\right)$$

۶ برای تعیین کیلومتراژ نقاط اصلی قوس سرپانتین نیمه‌متقارن همرس می‌بایست قوس‌های ورودی و خروجی و طول مماس‌های آنها به همراه طول قوس اصلی را به‌دست آورید. برای این منظور، ابتدا زوایای اصلی قوس سرپانتین نامتقارن را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\alpha=۲۷^\circ$$

$$\tan\frac{\beta_۱}{۲}=\frac{-m_۱+\sqrt{m_۱^۲+R(۲r_۱+R)}}{۲r_۱+R}=\frac{-۲۵+\sqrt{۲۵^۲+۳۰\,(۲\times۷۵+۳۰)}}{۲\times۷۵+۳۰}=۰/۲۹\;\Rightarrow\;\beta_۱=۲\arctan ۰/۲۹=۳۲/۳۴^\circ$$

$$\tan\frac{\beta_۲}{۲}=\frac{-m_۲+\sqrt{m_۲^۲+R(۲r_۲+R)}}{۲r_۲+R}=\frac{-۲۵+\sqrt{۲۵^۲+۳۰\,(۲\times۱۲۰+۳۰)}}{۲\times۱۲۰+۳۰}=۰/۲۵\;\Rightarrow\;\beta_۲=۲\arctan ۰/۲۵=۲۸/۰۷^\circ$$

$$\gamma=۱۸۰+\beta_۱+\beta_۲-\alpha=۲۱۳/۴۱^\circ$$

حال می‌توان مقادیر طول مورد نیاز برای محاسبهٔ کیلومتراژ نقاط اصلی را از روابط آنها به‌دست آورد، یعنی داریم:

$$T_۱=r_۱\tan\frac{\beta_۱}{۲}=۷۵\times\tan\frac{۳۲/۳۴}{۲}=۲۱/۷۴\,m\qquad T_۲=r_۲\tan\frac{\beta_۲}{۲}=۱۲۰\times\tan\frac{۲۸/۰۷}{۲}=۲۹/۹۹\,m$$

$$L_{r_۱}=\frac{\pi r_۱\beta_۱}{۱۸۰}=\frac{\pi\times۷۵\times۳۲/۳۴}{۱۸۰}=۴۲/۳۳\,m\qquad L_{r_۲}=\frac{\pi\times r_۲\times\beta_۲}{۱۸۰}=\frac{\pi\times۱۲۰\times۲۸/۰۷}{۱۸۰}=۵۸/۷۸\,m$$

$$L_R=\frac{\pi R\gamma}{۱۸۰}=\frac{\pi\times۳۰\times۲۱۳/۴۱}{۱۸۰}=۱۱۱/۷۴\,m$$

اکنون کیلومتراژ نقاط اصلی به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$KM_A=KM_V-S_۱V-T_۱=۲۳۷۰۰-۶۰-۲۱/۷۴=۲۳۶۱۸/۲۶\,m\;\Rightarrow\;KM_A=۲۳\,km+۶۱۸/۲۶\,m$$

$$KM_C=KM_A+L_{r_۱}=۲۳۶۱۸/۲۶+۴۲/۳۳=۲۳۶۶۰/۵۹\,m\;\Rightarrow\;KM_C=۲۳\,km+۶۶۰/۵۹\,m$$

$$KM_M=KM_C+m=۲۳۶۶۰/۵۹+۲۵=۲۳۶۸۵/۵۹\;\Rightarrow\;KM_M=۲۳\,km+۶۸۵/۵۹\,m$$

$$KM_N=KM_M+L_R=۲۳۶۸۵/۵۹+۱۱۱/۷۴=۲۳۷۹۷/۳۳\;\Rightarrow\;KM_N=۲۳\,km+۷۹۷/۳۳\,m$$

$$KM_D=KM_N+m=۲۳۷۹۷/۳۳+۲۵=۲۳۸۲۲/۳۳\;\Rightarrow\;KM_D=۲۳\,km+۸۲۲/۳۳\,m$$

$$KM_B=KM+L_{r_۲}=۲۳۸۲۲/۳۳+۵۸/۷۸=۲۳۸۸۱/۱۱\;\Rightarrow\;KM_B=۲۳\,km+۸۸۱/۱۱\,m$$

۷ برای تعیین زاویهٔ پیچ می‌بایست زاویهٔ قوس اصلی و زاویهٔ انحراف قوس ورودی را به‌دست آورد. از اینرو با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$L_R=\frac{\pi R\gamma}{۱۸۰}\Rightarrow \gamma=\frac{۱۸۰L_R}{\pi R}=\frac{۱۸۰\times ۹۰}{\pi\times ۲۵}=۲۰۶/۲۶^\circ$$

$$L_r=\frac{\pi r\beta}{۱۸۰}\Rightarrow \beta=\frac{۱۸۰L_r}{\pi r}=\frac{۱۸۰\times ۳۰}{\pi\times ۶۵}=۲۶/۴۴^\circ$$

حال با توجه به رابطهٔ زاویهٔ قوس اصلی خواهیم داشت:

$$\gamma=۱۸۰+۲\beta-\alpha\Rightarrow \alpha=۱۸۰+۲\beta-\gamma=۲۶/۶۲^\circ\Rightarrow \alpha=۲۶/۶۲^\circ$$

۸ ابتدا با دانستن زوایای قوس اصلی و پیچ، زاویهٔ قوس ورودی را به‌دست می‌آوریم. پیش از آن نیز زوایای مذکور را به‌صورت زیر به درجه تبدیل می‌کنیم:

تبدیل دقیقه به درجه: $\frac{۳۴'+۰/۲۵'}{۶۰}=۰/۵۷۵^\circ$ ، تبدیل ثانیه به دقیقه: $\frac{۱۵''}{۶۰}=۰/۲۵'$

$$\alpha=۲۳^\circ,\ \boxed{۳۴'},\ \boxed{۱۵''}=۲۳/۵۷۵^\circ$$

تبدیل دقیقه به درجه: $\frac{۴۴'+۰/۴'}{۶۰}=۰/۷۴^\circ$ ، تبدیل ثانیه به دقیقه: $\frac{۲۴''}{۶۰}=۰/۴'$

$$\gamma=۲۳۰^\circ,\ \boxed{۴۴'},\ \boxed{۲۴''}=۲۳۰/۷۴^\circ$$

تذکر: هر درجه برابر با ۶۰ دقیقه و هر دقیقه برابر ۶۰ ثانیه است.

$$\gamma=۱۸۰+۲\beta-\alpha\Rightarrow \beta=\frac{\gamma+\alpha-۱۸۰}{۲}=\frac{۲۳۰/۷۴+۲۳/۵۷۵-۱۸۰}{۲}=۳۷/۱۵۷۵^\circ$$

حال می‌توان با داشتن زاویهٔ β، مقدار R را به‌صورت زیر تعیین کرد:

$$\tan\frac{\beta}{۲}=\frac{-m+\sqrt{m^۲+R(۲r+R)}}{۲r+R}\Rightarrow ((۲r+R)\tan\frac{\beta}{۲}+m)^۲=m^۲+R(۲r+R)\Rightarrow R=\frac{((۲r+R)\tan\frac{\beta}{۲}+m)^۲-m^۲}{۲r+R}$$

$$\xrightarrow{۲r+R=۱۸۰} R=\frac{(۱۸۰\times\tan\frac{۳۷/۱۵۷۵}{۲}+۲۰)^۲-۲۰^۲}{۱۸۰}=\frac{۶۰۸۰/۶۳}{۱۸۰}=۳۳/۷۸\,m\Rightarrow R=۳۳/۷۸\,m$$

۹

الف) از آنجاکه دو واریانت مسیر به‌دلیل شرایط خاص عوارض منطقه به‌صورت موازی رسم شده‌اند، لذا فاقد سومهٔ قوس می‌باشند که در این‌صورت می‌بایست از قوس سنجاقی (نیم‌دایره‌ای) برای اتصال این دو واریانت استفاده نمود. اولین گام در طرح قوس نیم‌دایره‌ای به‌دست آوردن شعاع آن است. از آنجاکه فاصلهٔ دو واریانت برابر ۶۰ متر است، پس داریم:

$$T=۲R\Rightarrow R=\frac{T}{۲}=\frac{۶۰}{۲}\Rightarrow R=۳۰\,m$$

حال با داشتن شعاع قوس نیم‌دایره‌ای، سایر اجزای هندسی به‌راحتی با استفاده از روابط آن به‌دست می‌آید:

$$P=\sqrt{۲}R=\sqrt{۲}\times ۳۰=۴۲/۴۲\,m \qquad BI=(\sqrt{۲}-۱)R=(\sqrt{۲}-۱)\times ۳۰=۱۲/۴۲\,m$$

$$M=(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})R=(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\times ۳۰=۸/۷۸\,m \qquad T'=BI=۱۲/۴۲\,m$$

ب) برای تعیین کیلومتراژ نقطهٔ پایان قوس نیز به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$KM_B=KM_A+L=۱۰۳۵۰+۳۰\pi=۱۰۴۴۴/۲۴\,m\Rightarrow KM_B=۱۰\,km+۴۴۴/۲۴\,m$$

۱۰

الف) طراحی قوس قیچی را مطابق مراحل گام‌بندی شدهٔ زیر انجام می‌دهیم:

گام اول: ابتدا مقادیر V_{Design}، e_{max} و f_{max} را با استفاده از جداول (۵)، (۸) و (۱۰) از فصل سوم به‌دست می‌آوریم:

$$V_{Design}=۵۰\,km/hr\ ,\ e_{max}=۸\%\ ,\ f_{max}=۰/۱۶۰$$

گام دوم: حداقل شعاع قوس دایره‌ای قیچی را با کمک رابطهٔ تعیین شعاع قوس دایره‌ای به‌دست آورده و با مقادیر حداقل آیین‌نامه کنترل می‌کنیم:

$$\begin{cases} R_{min}=\dfrac{V^۲}{۱۲۷/۲(e_{max}+f_{max})}=\dfrac{۵۰^۲}{۱۲۷/۲(۰/۰۸+۰/۱۶)}=۸۱/۸۹\,m \\ (R)_{\text{حداقل آیین‌نامه}}=۸۵\,m \end{cases}\Rightarrow R_{Design}=۸۵\,m$$

گام سوم: با توجه به اینکه زاویهٔ برخورد داخلی دو واریانت $\omega=۳۵^\circ$ است پس به‌راحتی سایر زوایای اصلی قوس دایره‌ای قیچی از روابط آنها به‌دست می‌آید، از اینرو می‌توان نوشت:

$$\beta=۱۸۰-\omega=۱۸۰^\circ-۳۵^\circ=۱۴۵^\circ \quad , \quad \Delta=۱۸۰+\omega=۱۸۰^\circ+۳۵^\circ=۲۱۵^\circ$$

گام چهارم: با داشتن مقادیر R، ω، β و Δ سایر اجزای اصلی قوس به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$T_۲ = R(\tan\frac{\Delta}{۴}+\tan\frac{\beta}{۲}) = ۸۵\,(\tan\frac{۲۱۵}{۴}+\tan\frac{۱۴۵}{۲}) = ۳۸۵/۵۱\,m \qquad T_۱ = ۲R\tan\frac{\Delta}{۴} = ۲\times ۸۵\times\tan\frac{۲۱۵}{۴} = ۲۳۱/۸۵\,m$$

$$T_۴ = R\tan\frac{\omega}{۲} = ۸۵\times\tan\frac{۳۵}{۲} = ۲۶/۸۰\,m \qquad T_۳ = R\tan\frac{\beta}{۲} = ۸۵\times\tan\frac{۱۴۵}{۲} = ۲۶۹/۵۸\,m$$

$$T_۶ = ۲R\sin\frac{\beta}{۲} = ۲\times ۸۵\times\sin\frac{۱۴۵}{۲} = ۱۶۲/۱۳\,m \qquad T_۵ = R(\frac{۱}{\sin\frac{\Delta}{۲}}) = ۸۵\times(\frac{۱}{\sin\frac{۲۱۵}{۲}}) = ۸۹/۱۲\,m$$

$$B_۲ = R(\sec\frac{\Delta}{۴}-۱) = ۸۵\times(\sec\frac{۲۱۵}{۴}-۱) = ۵۸/۷۴\,m \qquad B_۱ = R(\sec\frac{\beta}{۲}-۱) = ۸۵\times(\sec\frac{۱۴۵}{۲}-۱) = ۱۹۷/۶۶\,m$$

$$P = ۲R\sin\frac{\Delta}{۴} = ۲\times ۸۵\times\sin\frac{۲۱۵}{۴} = ۱۳۷/۰۹\,m \qquad B_۳ = R(\sec\frac{\omega}{۲}-۱) = ۸۵\times(\sec\frac{۳۵}{۲}-۱) = ۴/۱۲\,m$$

$$L = \frac{\pi R\Delta}{۱۸۰} = \frac{\pi\times ۸۵\times ۲۱۵}{۱۸۰} = ۳۱۸/۹۵\,m \qquad M = R\sin\frac{\omega}{۲} = ۸۵\times\sin\frac{۳۵}{۲} = ۲۵/۵۵\,m$$

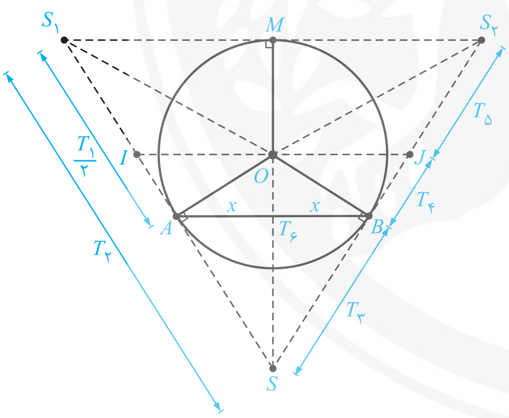
ب) برای تعیین کیلومتراژ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$KM_{\text{شروع}} = KM_S + (T_۲-\frac{T_۱}{۲}) - ۸۴۷۰ + (۳۸۵/۵۱-\frac{۲۳۱/۸۵}{۲}) = ۸۷۳۹/۵۸۵\,m \Rightarrow KM_{\text{شروع}} = ۸\,km + ۷۳۹/۵۸۵\,m$$

$$KM_{\text{وسط}} = KM_{\text{شروع}} + \frac{L}{۲} = ۸۷۳۹/۵۸۵ + \cfrac{\frac{\pi\times ۸۵\times ۲۱۵}{۱۸۰}}{۲} = ۸۸۹۹/۰۶\,m \Rightarrow KM_{\text{وسط}} = ۸\,km + ۸۹۹/۰۶\,m$$

$$KM_{\text{پایان}} = KM_{\text{شروع}} + L = ۸۷۳۹/۵۸۵ + \frac{\pi\times ۸۵\times ۲۱۵}{۱۸۰} = ۹۰۵۸/۵۴\,m \Rightarrow KM_{\text{پایان}} = ۹\,km + ۰۵۸/۵۴\,m$$

۱۱ با توجه به شکل مقابل و براساس روابط پایهٔ مثلثاتی برای زوایای موجود، روابط را به‌صورت زیر اثبات می‌کنیم:



$$S_۱\hat{O}A = \frac{\Delta}{۴} \Rightarrow \tan(S_۱\hat{O}A) = \frac{S_۱A}{OA} = \frac{\Delta}{۴}$$

$$\Rightarrow S_۱A = R\tan\frac{\Delta}{۴} = \frac{T_۱}{۲} \Rightarrow \boxed{T_۱ = ۲R\tan\frac{\Delta}{۴}}$$

$$\widehat{SOA} = \frac{\beta}{۲} \Rightarrow \tan(S\hat{O}A) = \frac{SA}{OA} \Rightarrow SA = R\tan\frac{\beta}{۲}$$

$$\begin{cases} SA = SB \\ SB = TB \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_۳ = R\tan\frac{\beta}{۲}}$$

$$T_۲ = \frac{T_۱}{۲} + SA = R\tan\frac{\Delta}{۴} + R\tan\frac{\beta}{۲} \Rightarrow \boxed{T_۲ = R(\tan\frac{\Delta}{۴}+\tan\frac{\beta}{۲})}$$

$$B\hat{O}J = ۹۰ - B\hat{J}O = B\hat{S}O = ۹۰ - B\hat{O}S = ۹۰ - \frac{\beta}{۲}$$

$$\tan B\hat{O}J = \frac{BJ}{BO} \Rightarrow T_۴ = R\tan(۹۰-\frac{\beta}{۲}) \Rightarrow \boxed{T_۴ = R\tan\frac{\omega}{۲}}$$

$$T_۵ = S_۲B - T_۴ = S_۲M - T_۴ = R\tan\frac{\Delta}{۴} - R\tan\frac{\omega}{۲} = R\tan\frac{\Delta}{۴} - R\tan(\frac{\Delta}{۲}-۹۰) = R\tan\frac{\Delta}{۴} - R\times\frac{-\sin(۹۰-\frac{\Delta}{۲})}{\cos(۹۰-\frac{\Delta}{۲})} = R\tan\frac{\Delta}{۴} + R\cot\frac{\Delta}{۲}$$

$$= R\times(\frac{\sin\frac{\Delta}{۴}}{\cos\frac{\Delta}{۴}} + \frac{\cos\frac{\Delta}{۲}}{\sin\frac{\Delta}{۲}}) = R\times\frac{\sin\frac{\Delta}{۴}\sin\frac{\Delta}{۲}+\cos\frac{\Delta}{۲}\cos\frac{\Delta}{۴}}{\cos\frac{\Delta}{۴}\times\sin\frac{\Delta}{۲}} = R\times\frac{\cos(\frac{\Delta}{۲}-\frac{\Delta}{۴})}{\cos\frac{\Delta}{۴}\times\sin\frac{\Delta}{۲}} \Rightarrow \boxed{T_۵ = R\times\frac{۱}{\sin\frac{\Delta}{۲}}}$$

$$T_۶ = AB \quad ; \quad \sin(\frac{\widehat{AOB}}{۲}) = \frac{\frac{AB}{۲}}{OB} \Rightarrow \sin\frac{\beta}{۲} = \frac{\frac{T_۶}{۲}}{R} \Rightarrow \frac{T_۶}{۲} = R\sin\frac{\beta}{۲} \Rightarrow \boxed{T_۶ = ۲R\sin\frac{\beta}{۲}}$$

$$B_۱ = OS - OB \quad ; \quad \cos(\widehat{AOS}) = \frac{AO}{OS} \Rightarrow \cos\frac{\beta}{۲} = \frac{R}{OS} \Rightarrow OS = \frac{R}{\cos\frac{\beta}{۲}} = R\sec\frac{\beta}{۲} \Rightarrow B_۱ = R\sec\frac{\beta}{۲} - R$$

$$\Rightarrow \boxed{B_۱ = R(\sec\frac{\beta}{۲}-۱)}$$

$$B_۲ = OS_۲ - R \quad ; \quad \cos(\widehat{COS_۲}) = \frac{CO}{OS_۲} \Rightarrow \cos\frac{\Delta}{۴} = \frac{R}{OS_۲} \Rightarrow OS_۲ = \frac{R}{\cos\frac{\Delta}{۴}} = R\sec\frac{\Delta}{۴}$$

$$\Rightarrow B_۲ = R\sec\frac{\Delta}{۴} - R \Rightarrow \boxed{B_۲ = R(\sec\frac{\Delta}{۴} - ۱)}$$

$$B_۳ = OJ - OC'' \quad ; \quad \widehat{AOI} = \widehat{BOJ} = \frac{\omega}{۲} \quad ; \quad \cos(\widehat{BOJ}) = \frac{OB}{OJ} \Rightarrow \cos\frac{\omega}{۲} = \frac{R}{OJ}$$

$$\Rightarrow OJ = \frac{R}{\cos\frac{\omega}{۲}} = R\sec\frac{\omega}{۲} \Rightarrow B_۳ = R\sec\frac{\omega}{۲} - R \Rightarrow \boxed{B_۳ = R(\sec\frac{\omega}{۲} - ۱)}$$

$$P = PB + PC \xrightarrow{PB = PC} P = ۲PC \quad ; \quad \sin(\widehat{POC}) = \frac{PC}{OC} \Rightarrow \sin\frac{\Delta}{۴} = \frac{PC}{R}$$

$$\Rightarrow PC = R\sin\frac{\Delta}{۴} \Rightarrow \boxed{P = ۲R\sin\frac{\Delta}{۴}}$$

$$\widehat{AOI} = \widehat{BOJ} = \frac{\omega}{۲} \quad ; \quad \sin(\widehat{BOJ}) = \frac{M}{OB} \Rightarrow \sin\frac{\omega}{۲} = \frac{M}{R} \Rightarrow \boxed{M = R\sin\frac{\omega}{۲}}$$

روابط طول کل قوس و زوایای اصلی بدیهی می‌باشند و به‌راحتی اثبات می‌شوند.

حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصل هشتم

۱ با توجه به معادلهٔ عمومی منحنی اتصال کلوتوئید داریم:

$$r_i\, L_i = R_C\, L_S \xrightarrow{L_i = \frac{۱}{۵} L_S} \frac{۱}{۵} r_i\, L_S = R_C\, L_S \Rightarrow r_i = ۵\, R_C \Rightarrow r_i = ۵\times ۱۰۰ = ۵۰۰\, m \Rightarrow r_{\frac{۱}{۵}L_S} = ۵۰۰\, m$$

۲ ابتدا با توجه به رابطهٔ بین زاویهٔ انحراف وتر کل کلوتوئید و زاویهٔ رأس کل منحنی کلوتوئید می‌توان نوشت:

$$\delta = \frac{\theta_S}{۳} \Rightarrow \theta_S = ۳\,\delta = ۳\times ۶/۲۵ = ۱۸/۷۵^\circ$$

حال با داشتن مقادیر θ_S و D_C به‌راحتی می‌توان طول منحنی اتصال کلوتوئید را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$D_C = \frac{۲۰\,\theta_S}{L_S} \Rightarrow L_S = \frac{۲۰\times ۱۸/۷۵}{۵} = ۷۵\, m$$

۳

الف) با داشتن شعاع قوس دایره‌ای و طول منحنی اتصال کلوتوئید می‌توان نوشت:

$$\delta = \frac{L}{۶R} = \frac{۹۰}{۶\times ۱۸۰} = ۰/۰۸۳\, rad \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۴/۷۷^\circ$$

ب) با توجه به رابطهٔ θ_S و δ داریم:

$$\delta = \frac{\theta_S}{۳} \Rightarrow \theta_S = ۳\,\delta = ۳\times ۴/۷۷ = ۱۴/۳۱^\circ$$

پ) اکنون با داشتن مقادیر θ_S و L_S می‌توان به‌راحتی از رابطهٔ زیر درجهٔ قوس دایره‌ای را به‌دست آورد:

$$D_C = \frac{۲۰\,\theta_S}{L_S} = \frac{۲۰\times ۱۴/۳۱}{۹۰} = ۳/۱۸^\circ$$

۴ با توجه به اطلاعات مسئله، برای تعیین زاویهٔ رأس کلوتوئید و زاویهٔ انحراف وتر کل منحنی کلوتوئید با توجه به معادلهٔ عمومی منحنی اتصال کلوتوئید داریم:

$$A^۲ = R_C\, L_S \Rightarrow L_S = \frac{A^۲}{R_C} = \frac{۱۲۰^۲}{۴۰۰} = ۳۶\, m$$

حال با جایگذاری مقادیر R_C و L_S در رابطهٔ δ خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{L}{۶R} = \frac{۳۶}{۶\times ۴۰۰} = ۰/۰۱۵\, rad$$

از سوی دیگر داریم:

$$\delta = \frac{\theta_S}{۳} \Rightarrow \theta_S = ۳\,\delta = ۳\times ۰/۰۱۵ = ۰/۰۴۵\, rad$$

۵ ابتدا می‌بایست حداقل شعاع قوس دایره‌ای (R_C) را به‌دست آورد، پس داریم:

$$R_{min} = \frac{V^۲}{۱۲۷/۲\,(e_{max}+f_{max})} = \frac{۱۳۰^۲}{۱۲۷/۲\,(۰/۱۰+۰/۰۸)} = ۷۳۸/۱۲\, m$$

جدول (۵) از فصل پنجم : $R_{\text{حداقل آیین‌نامه}} = ۷۴۰\, m \Rightarrow R_{Design} = ۷۴۰\, m$

اکنون با توجه به جدول (۲) لزوم استفاده از منحنی اتصال را کنترل خواهیم کرد. بنابراین داریم:

$$V_{Design} = ۱۳۰\, km/hr \xrightarrow{\text{جدول (۲)}} R_{max} = ۱۰۰۰\, m > ۷۴۰\, m$$

پس نیاز به طرح منحنی اتصال کلوتوئید جهت تأمین ایمنی و راحتی کافی می‌باشد.

با توجه به ضرورت طرح منحنی اتصال و تعیین شعاع حداقل قوس افقی می‌بایست طول منحنی اتصال کلوتوئید را به‌دست آورد تا بر مبنای آن طول منحنی اتصال در لبهٔ داخلی و خارجی سواره‌رو تعیین شود. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} L_{S_{min}} = ۲/۱۹\sqrt{R} = ۲/۱۹\times\sqrt{۷۴۰} = ۵۹/۵۷\, m \\ L_{S_{min}} = ۰/۰۱۸\,\frac{V^۳}{R} = ۰/۰۱۸\,\frac{۱۳۰^۳}{۷۴۰} = ۵۳/۴۴\, m \end{cases} \Rightarrow L_{S_{min}} = max(۵۹/۵۷\, m\, ,\, ۵۳/۴۴\, m) = ۵۹/۵۷\, m$$

$$L_{S_{max}} = ۴/۹\sqrt{R} = ۴/۹\times\sqrt{۷۴۰} = ۱۳۳/۲۹\, m$$

با توجه به مقادیر حداقل و حداکثر به‌دست آمده، از آنجا که در صورت سؤال حداقل طول خواسته شده است پس از $L_{S_{min}}$ در روابط استفاده می‌کنیم. حال به‌راحتی می‌توان زاویهٔ رأس کلوتوئید را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\theta_S = ۳\,\delta = ۳\times\frac{L}{۶R} = \frac{L}{۲R} = \frac{۵۹/۵۷}{۲\times ۷۴۰} = ۰/۰۴۰۲۵\times \underbrace{\frac{۱۸۰}{\pi}}_{\text{تبدیل رادیان به درجه}} = ۲/۳۰^\circ$$

اکنون با کمک روابط $L_{S_۱}$ و $L_{S_۲}$ داریم:

لبهٔ خارجی : $L_{S_۱} = L_S + ۰/۰۱۷۴۵۳\, W\theta_S^\circ = ۵۹/۵۷ + ۰/۰۱۷۴۵۳\times ۳۳/۲\times ۲/۳۰ = ۶۰/۹۰\,m$

لبهٔ داخلی : $L_{S_۲} = L_S - ۰/۰۱۷۴۵۳\, W\theta_S^\circ = ۵۹/۵۷ - ۰/۰۱۷۴۵۳\times ۳۳/۲\times ۳/۳۰ = ۵۸/۲۳\,m$

۶ اگر شعاع قوس دایره‌ای را برابر R_C فرض کنیم؛ در شرایطی که برای اتصال دو واریانت تنها قوس دایره‌ای به‌کار گرفته شود، طول قوس برابر است با:

$$L_C = R_C \underbrace{\Delta}_{\text{زاویهٔ انحراف یا برخورد واریانت}}$$

حال در شرایطی که از سیستم اتصال کلوتوئید سادهٔ متقارن استفاده شود، طول کل سیستم اتصال برابر است با:

$$L = ۲\underbrace{L_S}_{\text{طول منحنی کلوتوئید}} + \overbrace{L_C}^{\text{طول قوس دایره‌ای ساده}} = ۲L_S + R_C(\underbrace{\Delta - ۲\theta_S}_{\text{زاویهٔ مرکزی قوس دایره‌ای}}) = ۲L_S + R_C\Delta - ۲R_C\overbrace{\theta_S}^{\theta_S = \frac{L_S}{۲R_C}} = ۲L_S + R_C\Delta - L_S = L_S + \overbrace{R_C\Delta}^{L_C} = L_S + L_C$$

بنابراین اختلاف طول مسیر قوسی در دو حالت فوق برابر است با:

$$\Delta L = L - L_C = (L_S + L_C) - L_C = L_S$$

۷ برای حل مسأله، ابتدا می‌بایست زاویهٔ رأس کلوتوئید را به‌دست آورد، پس داریم:

$$\begin{cases} \Delta = ۲\theta_S + \alpha \\ \Delta = \frac{۳}{۲}rad \quad , \quad \alpha = ۱rad \end{cases} \Rightarrow \theta_S = \frac{\Delta - \alpha}{۲} = \frac{\frac{۳}{۲} - ۱}{۲} = \frac{۱}{۴}rad$$

حال طول منحنی اتصال کلوتوئید را با توجه به رابطهٔ θ_S تعیین می‌کنیم:

$$\theta_S = \frac{L}{۲R} \Rightarrow L = ۲R\theta_S = ۲\times ۱۵۰\times\frac{۱}{۴} = ۷۵\,m$$

می‌دانیم که طول نقطه‌ای مانند i از کلوتوئید از رابطهٔ $X_i \cong L_i$ به‌دست می‌آید. پس باید برای محاسبهٔ L_i نقطه‌ای که زاویهٔ انحراف آن ۰/۰۴ رادیان است به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$\frac{\theta_i}{\theta_s} = (\frac{L_i}{L_s})^۲ \Rightarrow \frac{۰/۰۴}{\frac{۱}{۴}} = (\frac{L_i}{۷۵})^۲ \Rightarrow \frac{L_i}{۷۵} = \sqrt{\frac{۰/۰۴}{۰/۲۵}} \Rightarrow L_i = ۷۵\times ۰/۴ = ۳۰\,m$$

۸

الف) ابتدا طول منحنی اتصال را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta = \alpha + ۲\theta_S \Rightarrow ۹۰ = ۶۰ + ۲\theta_S \Rightarrow \theta_S = ۱۵^\circ$$

$$\theta_S = \frac{L_S}{۲R_C} \Rightarrow ۱۵\times\frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{L_S}{۶۰۰} \Rightarrow L_S = ۱۵۷/۰۸\,m$$

حال با توجه به روابط X_{max} و Y_{max} برای مختصات نقطهٔ شروع قوس دایره‌ای داریم:

$$X_{max} = L_S = ۱۵۷/۰۸\,m$$

$$Y_{max} = \frac{L_S^۲}{۶R_C} = \frac{۱۵۷/۰۸^۲}{۶\times ۳۰۰} = ۱۳/۷۱\,m \Rightarrow SC\,(۱۵۷/۰۸\,m\,,۱۳/۷۱\,m)$$

ب) برای مختصات نقطهٔ مرکز قوس دایره‌ای $(X_۰\,,Y_۰)$ می‌توان نوشت:

$$X_۰ = X_{max} - R_C \sin\theta_S = ۱۵۷/۰۸ - ۳۰۰\overbrace{\sin}^{\Delta = ۲\theta_S + \alpha \;\Rightarrow\; \theta_S = \frac{۹۰-۶۰}{۲} = ۱۵^\circ}۱۵ = ۷۹/۴۳\,m$$

$$Y_۰ = Y_{max} + R_C\cos\theta_S = ۱۳/۷۱ + ۳۰۰\cos ۱۵ = ۳۰۳/۴۸\,m$$

پ) ابتدا طول مماس قوس دایرهٔ اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta R = \frac{L_S^۲}{۲۴ R_C} = \frac{۱۵۷/۰۸^۲}{۲۴ \times ۳۰۰} = ۳/۴۲\ m$$

$$t = (R + \Delta R)\tan\frac{\Delta}{۲} = (۳۰۰ + \boxed{۳/۴۲})\tan\frac{۹۰}{۲} = ۳۰۳/۴۲\ m$$

حال با داشتن t به‌راحتی می‌توان از رابطهٔ طول مماس کل قوس، مقدار T را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$T = t + \frac{L_S}{۲} = ۳۰۳/۴۲ + \frac{۱۵۷/۰۸}{۲} = ۳۸۱/۹۶\ m$$

ت) با توجه به روابط T_K و T_L خواهیم داشت:

$$T_K = \frac{Y_{max}}{\sin\theta_s} = \frac{۱۳/۷۱}{\sin ۱۵} = ۵۲/۹۷\ m$$

$$T_L = X_{max} - Y_{max}\cot\theta_s = ۱۵۷/۰۸ - ۱۳/۷۱ \times \cot ۱۵ = ۱۰۵/۹۱\ m$$

۹ با توجه به اینکه سیستم کلوتوئید بدون قوس دایره‌ای می‌باشد و از دو منحنی اتصال کلوتوئید یکسان تشکیل شده است، نوع این سیستم به اصطلاح کلوتوئید مرکب متقارن ساده است که در آن $\alpha = ۰$ می‌باشد. حال با توجه به مفروضات مسئله ابتدا می‌بایست حداقل شعاع منحنی کلوتوئید را در نقطهٔ تماس COS به‌دست آورد، پس داریم:

$$\begin{cases} V_{Design} = ۱۲۰\ km/hr \\ e_{max} = ۰/۱۲ \\ f_{max} = ۰/۹ \end{cases} \Rightarrow R_{min} = \frac{V^۲}{۱۲۷/۲\,(e_{max} + f_{max})} = \frac{۱۲۰^۲}{۱۲۷/۲\,(۰/۱۲ + ۰/۰۹)} = ۵۳۹/۰۸\ m$$

جدول (۵) از فصل پنجم : $R_{\text{حداقل آیین‌نامه}} = ۵۴۰\ m \Rightarrow R_{Design} = ۵۴۰\ m$

اکنون با داشتن Δ و R می‌توان نوشت:

$$\Delta = ۲\theta_S \Rightarrow \theta_S = \frac{\Delta}{۲} = \frac{۹۰}{۲} = ۴۵$$

$$\theta_S = \frac{L_S}{۲R} \Rightarrow L_S = ۲R\theta_S = ۲ \times ۵۴۰ \times ۴۵ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۸۴۸/۲۳\ m$$

$$\delta_{COS} = \frac{\theta_S}{۳} = \frac{۴۵}{۳} = ۱۵^\circ$$

۱۰ ابتدا می‌بایست حداقل شعاع قوس دایره‌ای را به‌دست آورد، از این‌رو با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{cases} V_{Design} = ۱۰۵\ km/hr \\ e_{max} = ۰/۱۲ \\ f_{max} = ۰/۱۱۵ \end{cases} \Rightarrow R_{min} = \frac{V^۲}{۱۲۷/۲\,(e_{max} + f_{max})} = \frac{۱۰۵^۲}{۱۲۷/۲\,(۰/۱۲ + ۰/۱۱۵)} = ۳۶۸/۸۲\ m \Rightarrow R_{Design} = ۳۷۰\ m$$

حال با توجه به جدول (۲) لزوم استفاده از منحنی اتصال را کنترل می‌کنیم، پس خواهیم داشت:

$$V_{Design} = ۱۰۵\ km/hr \Rightarrow \begin{cases} V_{Design} = ۱۰۰\ km/hr \Rightarrow R_{max} = ۵۹۲\ m \\ V_{Design} = ۱۱۰\ km/hr \Rightarrow R_{max} = ۷۱۶\ m \end{cases}$$

با استفاده از درونیابی داریم:

$$\frac{۱۰۵ - ۱۰۰}{x - ۵۹۲} = \frac{۱۱۰ - ۱۰۰}{۷۱۶ - ۵۹۲} \Rightarrow R_{max} = ۶۵۴\ m > ۳۷۰\ m$$

پس نیاز به طرح منحنی اتصال کلوتوئید جهت تأمین ایمنی و راحتی کافی می‌باشد.

از سوی دیگر با داشتن مقادیر Δ و α به‌راحتی θ_S به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta = ۲\theta_S + \alpha \Rightarrow \theta_S = \frac{\Delta - \alpha}{۲} = \frac{۱۰۰ - ۸۶}{۲} = ۷^\circ$$

حال با توجه به مقادیر θ_S و R طول منحنی اتصال از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$\theta_S = \frac{L_S}{۲R} \Rightarrow L_S = ۲R\theta_S = ۲ \times ۳۷۰ \times ۷ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۹۰/۴۰\ m$$

اکنون می‌بایست مقادیر L_C و T را به‌دست آورد، پس داریم:

$$L_C = \frac{\pi R\alpha}{۱۸۰} = \frac{\pi \times ۳۷۰ \times ۸۶}{۱۸۰} = ۵۵۵/۳۶\ m$$

$$T = (R + \Delta R)\tan\frac{\Delta}{۲} + \frac{L}{۲} \xrightarrow{\Delta R = \frac{L^۲}{۲۴R}} T = (R + \frac{L^۲}{۲۴R})\tan\frac{\Delta}{۲} + \frac{L}{۲} = (۳۷۰ + \frac{۹۰/۴۰^۲}{۲۴ \times ۳۷۰})\tan\frac{۱۰۰}{۲} + \frac{۹۰/۴۰}{۲} = ۴۸۷/۲۴\ m$$

حال کیلومتراژ نقاط اصلی را از روابط آن برآورد می‌کنیم:

$$KM_{TS} = KM_S - T = ۲۸۰۰ - ۴۸۷/۲۴ = ۲۳۱۲/۷۶\ m \Rightarrow KM_{TS} = ۲\ km + ۳۱۲/۷۶\ m$$

$$KM_{SC} = KM_{TS} + L_S = ۲۳۱۲/۷۶ + ۹۰/۴۰ = ۲۴۰۳/۱۶\ m \Rightarrow KM_{SC} = ۲\ km + ۴۰۳/۱۶\ m$$

$$KM_{CS} = KM_{SC} + L_C = ۲۴۰۳/۱۶ + ۵۵۵/۳۶ = ۲۹۵۸/۵۲\ m \Rightarrow KM_{CS} = ۲\ km + ۹۵۸/۵۲\ m$$

$$KM_{ST} = KM_{CS} + L_S = ۲۹۵۸/۵۲ + ۹۰/۴۰ = ۳۰۴۸/۹۲\ m \Rightarrow KM_{ST} = ۳\ km + ۰۴۸/۹۲\ m$$

حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصل نهم

۱ حداکثر مقدار بربلندی در مناطقی که احتمال سُر خوردن وجود دارد برابر با ضریب اصطکاک جانبی مسیر است، یعنی همواره داریم:

$$e_{max} \le f_{\max} \xrightarrow{V_{Design}=100\ km/hr} e_{\max} = f_{\max} = 0.12$$

۲ با توجه به نوع راه، سرعت طرح و بربلندی را از جدول (۴) و (۸) از فصل سوم به‌دست می‌آوریم.

$$V_{Design} = 120\ km/hr \quad ; \quad e = 0.10 \quad ; \quad f = 0.09 \quad ; \quad R = 570\ m$$

حال می‌بایست شرایط تعادل در برابر لغزش به سمت داخل و خارج قوس را بررسی کنیم، بنابراین داریم:

۱- شرایط تعادل در برابر لغزش به سمت داخل قوس:

$$\frac{V^2}{Rg} + f > e \Rightarrow \frac{120^2}{127.2 \times 570} + 0.09 > 0.10 \Rightarrow 0.288 > 0.10 \qquad OK$$

۲- شرایط تعادل در برابر لغزش به سمت خارج قوس:

$$\frac{V^2}{Rg} - f \le e \Rightarrow \frac{120^2}{127.2 \times 570} - 0.09 \le 0.10 \Rightarrow 0.108 > 0.10 \qquad Not\ OK$$

بنابراین چنانچه خودرو با سرعت ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت و یا بیشتر وارد قوس شود به سمت خارج قوس منحرف می‌گردد. برای حل این مشکل که ناشی از عوامل طرح هندسی است بایستی شعاع قوس را افزایش داد. حداقل شعاع لازم برای جلوگیری از واژگونی خودرو برابر است با:

$$R_{min} = \frac{V^2}{127.2\,(e_{\max} + f_{\max})} = \frac{120^2}{127.2\,(0.10 + 0.09)} = 595.82\ m \cong 596\ m$$

$$\frac{V^2}{Rg} + f > e \Rightarrow \frac{120^2}{127.2 \times 596} + 0.09 > 0.10 \Rightarrow 0.279 > 0.10 \qquad OK$$

$$\frac{V^2}{Rg} - f \le e \Rightarrow \frac{120^2}{127.2 \times 596} - 0.9 \le 0.10 \Rightarrow 0.0999 \le 0.10 \qquad OK$$

۳ طول تأمین بربلندی، مجموع دو طول شیب بربلندی و طول حذف شیب مخالف است، بنابراین برای طول شیب بربلندی خواهیم داشت:

$$L_r = \frac{(Wn_1)e_d}{\Delta}(b_w) = \frac{(3.65 \times 2) \times 12}{0.41} \times 0.75 = 160.24\,m$$

حال برای طول حذف شیب مخالف داریم:

$$L_t = \frac{e_{NC}}{e_d} \times L_r = \frac{2.5}{12} \times 160.24 = 33.38\,m$$

بنابراین طول تأمین بربلندی برابر است با:

$$L_T = L_t + L_r = 33.38 + 160.24 = 193.62\,m$$

حال برای ترسیم نمودار بربلندی می‌بایست مقادیر اختلاف ارتفاع لبه‌های داخلی و خارجی سواره‌رو را به‌دست آوریم، پس می‌توان نوشت:

$$\Delta h_1 = \frac{(e_d \times \frac{W_T}{2})}{100} = \frac{12 \times \frac{14.6}{2}}{100} = 0.876\ m = 87.6\ cm$$

$$\Delta h_2 = \frac{(e_{NC} \times \frac{W_T}{2})}{100} = \frac{2.5 \times \frac{14.6}{2}}{100} = 0.1825 = 18.25\,cm$$

$$h_1 = \Delta h_1 + \Delta h_2 = 0.876 + 0.1825 = 1.0585\,m = 105.85\,cm$$

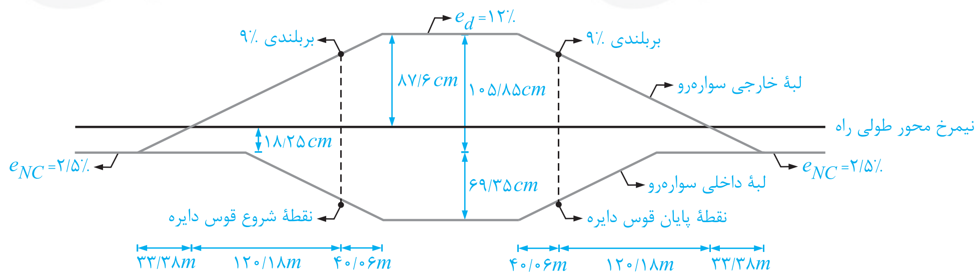
$$h_2 = \Delta h_1 - \Delta h_2 = 0.876 - 0.1825 = 0.6935\,m = 69.35\,cm$$

از آنجاکه سرعت طرح بیش از ۷۵ کیلومتر بر ساعت است مطابق توصیهٔ نشریهٔ شمارهٔ ۴۱۵، بایستی ۷۵ درصد طول شیب بربلندی در بخش مستقیم راه و ۲۵ درصد آن نیز در ابتدا و انتهای قوس دایره‌ای اعمال شود، از این‌رو داریم:

$$0.75 \times L_r = 0.75 \times 160.24 = 120.18\,m$$

$$0.25 \times L_r = 0.25 \times 160.24 = 40.06\,m$$

حال نمودار بربلندی را به‌صورت زیر ترسیم می‌کنیم:



۴ برای ترسیم نمودار بربلندی می‌بایست ابتدا طول تأمین بربلندی را به‌دست آورد. از این‌رو با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$L_r = \frac{(Wn_1)e_d}{\Delta}(b_w) = \frac{(۳/۶۵\times ۲)\times ۸}{\underbrace{\boxed{۰/۵۵}}_{\text{جدول (۳)}}}\times \overbrace{\boxed{۰/۷۵}}^{\text{جدول (۴)}} = ۷۹/۶۳\, m$$

$$L_t = \frac{e_{NC}}{e_d}\times L_r = \frac{۲}{۸}\times ۷۹/۶۳ = ۱۹/۹۱ m$$

بنابراین طول تأمین بربلندی برابر است با:

$$L_T = L_t + L_r = ۷۹/۶۳ + ۱۹/۹۱ = ۹۹/۵۴ m$$

از آنجاکه سرعت طرح کمتر از ۷۵ کیلومتر بر ساعت است، براساس توصیهٔ آیین‌نامهٔ طرح هندسی راه‌های ایران مقدار ۸۰ درصد طول شیب بربلندی در بخش مستقیم راه اعمال می‌شود و مابقی در قوس اعمال می‌گردد، پس داریم:

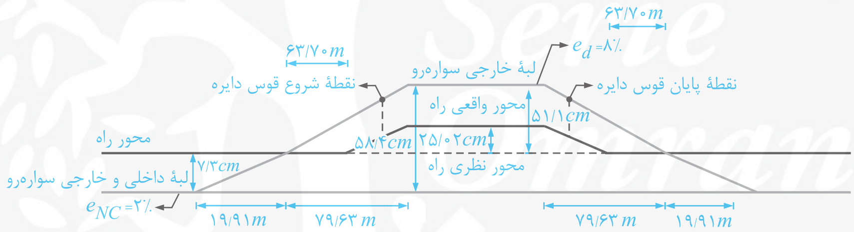
$$۰/۲۰\times L_r = ۰/۲۰\times ۷۹/۶۳ = ۱۵/۹۳ m \qquad ۰/۸۰\times L_r = ۰/۸۰\times ۷۹/۶۳ = ۶۳/۷۰ ۴ m$$

همچنین تغییرمکان لبهٔ خارجی قوس و محور راه از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta h_۲ = \frac{e_{NC}\times W_T}{۲۰۰} = \frac{۲\times ۷/۳}{۲۰۰} = ۰/۰۷۳ m = ۷/۳ cm \qquad \Delta h = \frac{e_d \times W_T}{۱۰۰} = \frac{۸\times ۷/۳}{۱۰۰} = ۰/۵۸۴ m = ۵۸/۴ cm$$

$$\Delta h_۳ = \frac{W_T \times e_d (e_d - e_{NC})}{۱۰۰(۲e_d - e_{NC})} = \frac{۷/۳\times ۸\times(۸-۲)}{۱۰۰(۲\times ۸-۲)} = ۰/۲۵۰۲ m = ۲۵/۰۲ cm$$

حال نمودار بربلندی قوس را با فرض دوران حول لبهٔ داخلی ترسیم می‌کنیم:



۵ الف) با توجه به اطلاعات مسئله، قوس افقی از نوع کلوتوئید - قوس دایره - کلوتوئید است. پس طول شیب بربلندی آن برابر با طول منحنی اتصال کلوتوئید است، یعنی داریم:

$$L_r = \frac{(Wn_1)e_d}{\Delta}\times(b_w) = \frac{(۳\times ۳/۶۵ + ۱/۵)\times ۱۰}{۰/۳۵}\times \boxed{۰/۶۴} = ۲۲۷/۶۶ m$$

$$n_1 = ۳ + \frac{۱/۵}{۳/۶۵} \Rightarrow b_w = ۰/۶۴$$

$$L_r = L_s = ۲۲۷/۶۶ m$$

حال برای طول حذف شیب مخالف خواهیم داشت:

$$L_t = \frac{e_{NC}}{e_d}\times L_r = \frac{۲/۵}{۱۰}\times ۲۲۷/۶۶ = ۵۶/۹۱ m$$

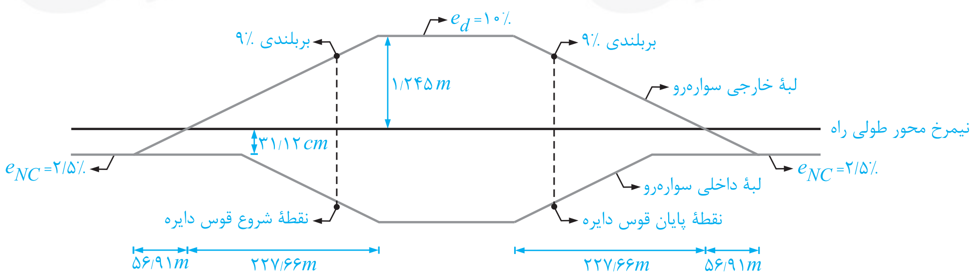
پس طول تأمین بربلندی برابر خواهد بود با:

$$L_T = L_t + L_r = ۵۶/۹۱ + ۲۲۷/۶۶ = ۲۸۴/۵۷ m$$

ب) اکنون برای ترسیم نمودار بربلندی می‌بایست مقادیر اختلاف ارتفاع لبه‌های داخلی و خارجی قوس را به‌دست آورد، پس می‌توان نوشت:

$$\Delta h_1 = \frac{e_d \times \frac{W_T}{۲}}{۱۰۰} = \frac{۱۰\times \frac{۲۴/۹۰}{۲}}{۱۰۰} = ۱/۲۴۵ m \quad , \quad \Delta h_۲ = \frac{e_{NC}\times \frac{W_T}{۲}}{۱۰۰} = \frac{۲/۵\times \frac{۲۴/۹۰}{۲}}{۱۰۰} = ۰/۳۱۱۲ = ۳۱/۱۲ cm$$

حال به راحتی می‌توان نمودار بربلندی را به‌صورت زیر ترسیم کرد:



پ) برای تعیین فاصلهٔ نقطهٔ شروع اعمال بربلندی تا نقطهٔ انتهای قوس دایره‌ای می‌بایست به‌صورت زیر عمل کرد:

$$\begin{cases}\Delta = ۲\theta_s+\alpha \Rightarrow \alpha=\Delta-۲\theta_s\\ \theta_s=\dfrac{L_s}{۲R_C}\times\dfrac{۱۸۰}{\pi}=\dfrac{۲۲۷/۶۶}{۲\times ۷۵۰}\times\dfrac{۱۸۰}{\pi}=۸/۷^\circ\end{cases}\Rightarrow \alpha=۱۲۰-۱۷/۴=۱۰۲/۶^\circ$$

$$L_C=\frac{\pi R_C\,\alpha}{۱۸۰}=\frac{\pi\times۷۵۰\times۱۰۲/۶}{۱۸۰}=۱۳۴۳/۰۳\,m \Rightarrow L_{P_{runout\,to\,CS}}=L_r+L_T+L_C=۱۶۲۷/۶\,m$$

۶ ابتدا می‌بایست طول تأمین بربلندی را به‌دست آورد، پس خواهیم داشت:

$$L_r=\frac{(Wn_۱)e_d}{\Delta}(b_w)=\frac{(۴\times۱+۱/۸۵)\times۱۲}{۰/۴۷}\times۰/۸۴=۱۲۵/۴۶\,m$$

$$b_w=\frac{[۱+۰/۵(n_۱-۱)]}{n_۱}=\frac{[۱+۰/۵(۱/۴۶-۱)]}{\boxed{۱/۴۶}}=۰/۸۴$$

$$n_۱=\frac{۲}{۲}+\frac{۱/۸۵}{۴}$$

$$L_{t_{sh}}=(\frac{e_{sh}}{e_d}\times L_r)-L_t=(\frac{۴}{۱۲}\times۱۲۵/۴۶)-۱۵/۶۸=۲۶/۱۴\,m$$

$$L_t=\frac{e_{NC}}{e_d}\times L_r=\frac{۱/۵}{۱۲}\times۱۲۵/۴۶=۱۵/۶۸\,m$$

بنابراین طول تأمین بربلندی برابر است با:

$$L_T=L_t+L_r+L_{sh}=۱۵/۶۸+۱۲۵/۴۶+۲۶/۱۴=۱۶۷/۲۸\,m$$

با توجه به اینکه سرعت طرح بیش از ۷۵ کیلومتر بر ساعت می‌باشد پس می‌بایست ۷۵ درصد طول شیب بربلندی در بخش مستقیم راه و مابقی در قوس اعمال شود، از اینرو داریم:

$$۰/۷۵\times L_r=۰/۷۵\times۱۲۵/۴۶=۹۴/۰۹\,m \quad , \quad ۰/۲۵\times L_r=۰/۲۵\times۱۲۵/۴۶=۳۱/۳۶$$

حال برای ترسیم نمودار، اختلاف ارتفاع لبه‌های داخلی و خارجی سواره‌رو و محور راه را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta h_۱=\frac{e_d\times(\frac{W_T}{۲}+W_{sh})}{۱۰۰}=\frac{۱۲\times(\frac{۸}{۲}+۱/۸۵)}{۱۰۰}=۰/۷۰۲\,m=۷۰/۲\,cm$$

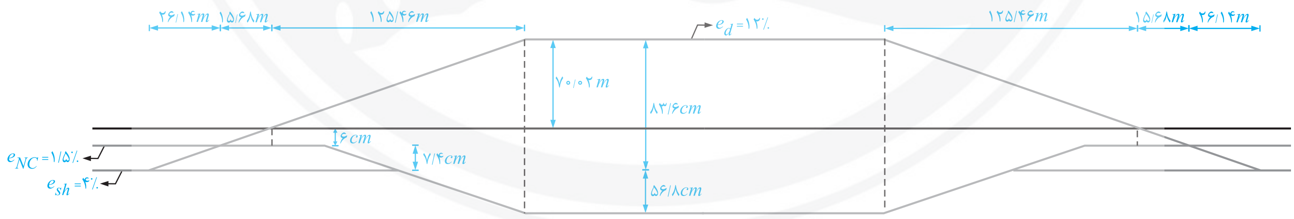
$$\Delta h_۲=\frac{(e_{NC}\times\frac{W_T}{۲})}{۱۰۰}=\frac{(۱/۵\times\frac{۸}{۲})}{۱۰۰}=۰/۰۶\,m=۶\,cm$$

$$\Delta h_۳=\frac{(e_{sh}\times W_{sh})}{۱۰۰}=\frac{(۴\times۱/۸۵)}{۱۰۰}=۰/۰۷۴\,m=۷/۴\,cm$$

$$h_۱=\Delta h_۱+\Delta h_۲+\Delta h_۳=۷۰/۲+۶+۷/۴=۸۳/۶\,cm$$

$$h_۲=\Delta h_۱-\Delta h_۲-\Delta h_۳=۷۰/۲-۶-۷/۴=۵۶/۸\,cm$$

اکنون می‌توان نمودار بربلندی را به‌صورت زیر ترسیم کرد:



۷ طول تأمین بربلندی این قوس با توجه به اطلاعات مسئله برابر است با:

$$L_r=\frac{(Wn_۱)e_d}{\Delta}(b_w)=\frac{(۳/۶۵\times۲)\times۱۲}{۰/۴۷}\times۰/۷۵=۱۳۹/۷۸\,m$$

$$L_t=\frac{e_{NC}}{e_d}\times L_r=\frac{۲/۵}{۱۲}\times۱۳۹/۷۸=۲۹/۱۲\,m \quad \Rightarrow L_T=L_t+L_r=۲۹/۱۲+۱۳۹/۷۸=۱۶۸/۹\,m$$

با توجه به اینکه سرعت طرح بیش از $۷۵\,km/hr$ است پس مطابق نشریهٔ شمارهٔ ۴۱۵، بایستی ۷۵ درصد طول شیب بربلندی در بخش مستقیم راه اعمال گردد، بنابراین داریم:

$$۰/۷۵\times L_r=۰/۷۵\times۱۶۸/۹=۱۲۶/۶۷۵\,m \quad , \quad ۰/۲۵\times L_r=۰/۲۵\times۱۶۸/۹=۴۲/۲۲۵\,m$$

حال با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار بربلندی را دو حالت زیر ترسیم می‌کنیم:

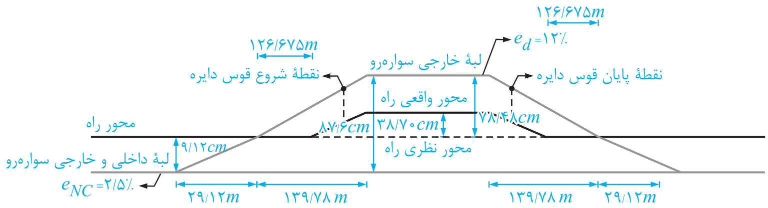
حالت اول (دوران حول لبهٔ داخلی قوس):

$$\Delta h=\frac{e_d\times W_T}{۱۰۰}=\frac{۱۲\times۷/۳}{۱۰۰}=۰/۸۷۶\,m=۸۷/۶\,cm$$

$$\Delta h_۲=\frac{e_{NC}\times W_T}{۲۰۰}=\frac{۲/۵\times۷/۳۰}{۲۰۰}=۰/۰۹۱۲\,m=۹/۱۲\,cm$$

$$\Delta h_۳=\frac{W_T\times e_d(e_d-e_{NC})}{۱۰۰(۲e_d-e_{NC})}=\frac{۷/۳\times۱۲(۱۲-۲/۵)}{۱۰۰(۲\times۱۲-۲/۵)}=۰/۳۸۷۰\,m=۳۸/۷۰\,cm$$

بنابراین نمودار بربلندی به‌صورت زیر رسم می‌شود:



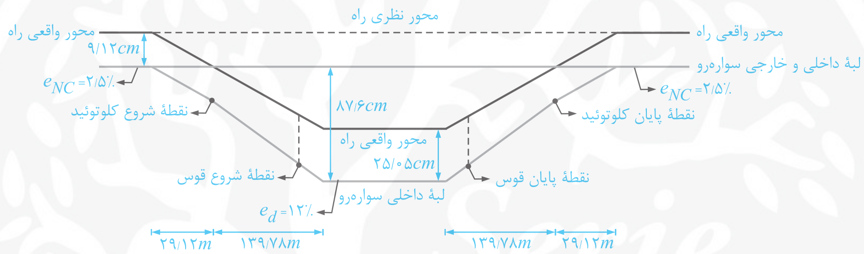
حالت دوم (دوران حول لبهٔ خارجی قوس):

$$\Delta h=\frac{e_d\times W_T}{۱۰۰}=\frac{۱۲\times ۷/۳}{۱۰۰}=۰/۸۷۶\,m=۸۷/۶\,cm$$

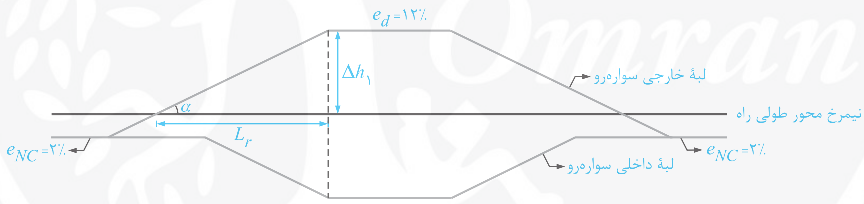
$$\Delta h_۱=\frac{W_T\times(e_d-۲e_{NC})}{۲۰۰}=\frac{۷/۳\times(۱۲-۲\times ۲/۵)}{۲۰۰}=۲۵/۵۵\,cm=۰/۲۵۵۵\,m$$

$$\Delta h_۲=\frac{e_{NC}\times W_T}{۲۰۰}=\frac{۲/۵\times ۷/۳}{۲۰۰}=۰/۰۹۱۲\,m=۹/۱۲\,cm$$

در این حالت نمودار بربلندی به‌صورت زیر ترسیم می‌شود:



۸ برای درک بهتر، نمودار بربلندی قوس را با فرض دوران حول محور راه ترسیم می‌کنیم:



بنابراین ابتدا می‌بایست طول منحنی اتصال کلوتوئید را با توجه به طول لازم برای تغییر شیب عرضی مسیر از صفر به شیب بربلندی (L_r) به‌دست آورد، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} V_{Design}=۱۱۰\,km/hr \xrightarrow{\text{جدول (۳) از فصل هشتم}} L_{S_{\text{مطلوب}}}=۶۱\,m \\ L_r=\dfrac{(Wn_۱)\times e_d}{\Delta}\times b_w=\dfrac{(۳/۶۵\times ۲)\times ۱۲}{۰/۴۱}\times ۰/۷۵=۱۶۰/۲۴\,m=L_s \end{cases} \Rightarrow L_{s_{\text{جدید}}}=L_{r_{\text{جدید}}}=max[۱۶۰/۲۴\,m\,,۶۱\,m]=۱۶۰/۲۴\,m$$

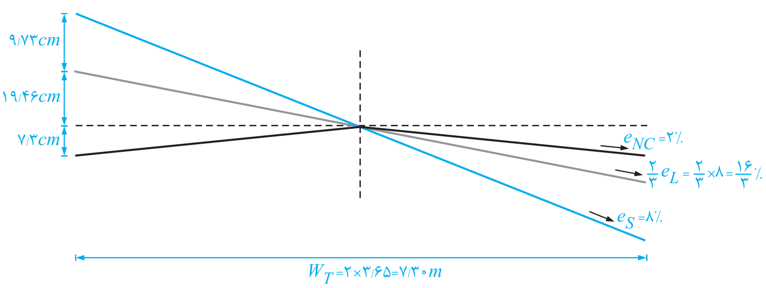
پس می‌توان گفت پس از طی مسافت $۱۶۰/۲۴m$، شیب یک‌طرفهٔ سواره‌رو از صفر به مقدار ۱۲ درصد می‌رسد، بنابراین داریم:

مسافت	شیب عرضی یک طرفه	
$۱۶۰/۲۴m$	۱۲٪	$\Rightarrow x=۳/۷۴٪$
۵۰	x	

۹ با توجه به داده‌های مسئله و جداول (۳) و (۴) طول تأمین بربلندی برابر است با:

$$\begin{aligned} L_r&=\frac{(Wn_۱)e_d}{\Delta}\times b_w=\frac{(۳/۶۵\times ۱)\times ۸}{۰/۴۴}\times ۱=۶۶/۳۶\,m \\ L_t&=\frac{e_{NC}}{e_d}\times L_r=\frac{۲}{۸}\times ۶۶/۳۶=۱۶/۵۹\,m \end{aligned} \Rightarrow L_T=L_r+L_t=۶۶/۳۶+۱۶/۵۹=۸۲/۹۵\,m$$

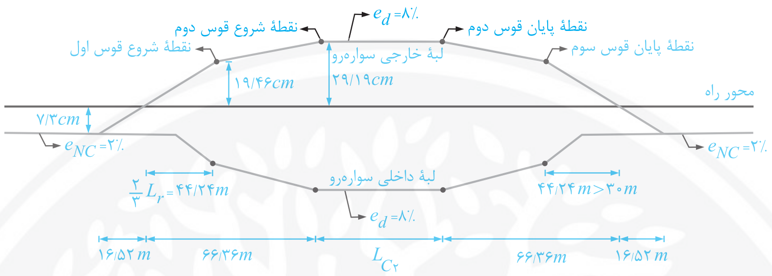
از آنجاکه طول قوس اول ۱۲۰ متر می‌باشد و از ۱۰۵ بیشتر است، بنابراین ضوابط حالت دوم تأمین بربلندی در قوس‌های دایره‌ای مرکب در نظر گرفته می‌شود. حال با توجه به شکل زیر، اختلاف ارتفاع لبه‌های داخلی و خارجی سواره‌رو به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$\Delta h_۱ = \frac{W_T \times e_{NC}}{۲۰۰} = \frac{۷/۳۰ \times ۲}{۲۰۰} = ۷/۳\,cm \qquad \Delta h_۲ = \frac{W_T \times \frac{۲}{۳} e_L}{۲۰۰} = \frac{۷/۳۰ \times \frac{۲}{۳} \times ۸}{۲۰۰} = ۱۹/۴۶\,cm$$

$$\Delta h_۳ = \frac{W_T (e_s - \frac{۲}{۳} e_L)}{۲۰۰} = \frac{۷/۳۰ \times (۸ - \frac{۲}{۳} \times ۸)}{۲۰۰} = ۹/۷۳\,cm$$

اکنون می‌توان نمودار بربلندی آن را به‌صورت زیر ترسیم کرد:



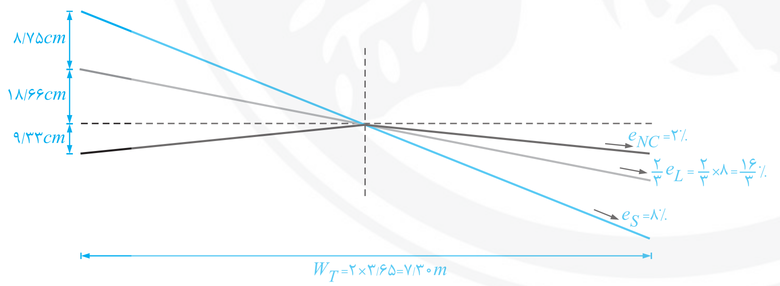
۱۰ ابتدا طول قوس با شعاع بزرگ‌تر را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$L_C = \frac{\pi R_C \Delta_C}{۱۸۰} = \frac{\pi \times ۱۸۰ \times ۳۲}{۱۸۰} = ۱۰۰/۵۳\,m < ۱۰۵\,m$$

با توجه به اینکه طول قوس با شعاع بزرگ‌تر از ۱۰۵ متر کمتر می‌باشد، بنابراین ضوابط حالت اول تأمین بربلندی در قوس‌های دایره‌ای مرکب در نظر گرفته می‌شود. حال با توجه به داده‌های مسئله و جداول (۳) و (۴) طول تأمین بربلندی برابر است با:

$$\begin{cases} L_r = \dfrac{(Wn_۱) e_d}{\Delta} b_w = \dfrac{(۳/۵ \times ۱) \times ۸}{۰/۶} \times ۱ = ۴۶/۶۷\,m \\ L_t = \dfrac{e_{NC}}{e_d} \times L_r = \dfrac{۲/۵}{۸} \times ۴۶/۶۷ = ۱۴/۵۸\,m \end{cases} \Rightarrow L_T = L_t + L_r = ۶۱/۲۵\,m$$

حال با توجه به شکل زیر، اختلاف ارتفاع لبه‌های داخلی و خارجی سواره‌رو به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



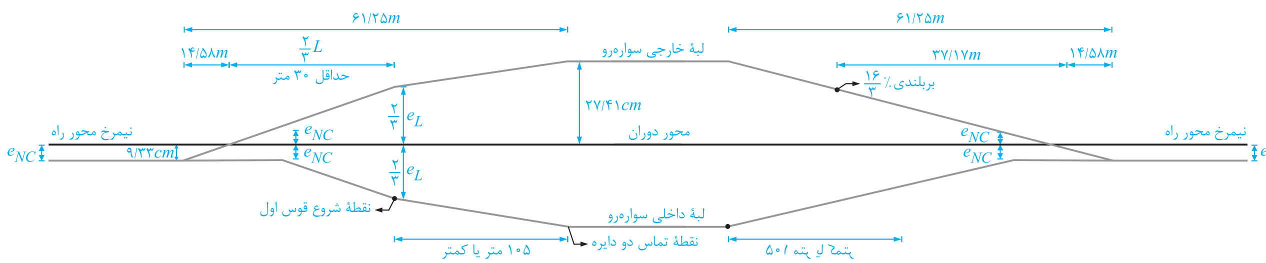
$$\Delta h_۱ = \frac{W_T \times e_{NC}}{۲۰۰} = \frac{۷ \times ۲/۵}{۲۰۰} = ۸/۷۵\,cm \quad , \quad \Delta h_۲ = \frac{W_T \times \frac{۲}{۳} e_L}{۲۰۰} = \frac{۷ \times \frac{۲}{۳} \times ۸}{۲۰۰} = ۱۸/۶۶\,cm$$

$$\Delta h_۳ = \frac{W_T \times (e_s - \frac{۲}{۳} e_L)}{۲۰۰} = \frac{۷ \times (۸ - \frac{۲}{۳} \times ۸)}{۲۰۰} = ۹/۳۳\,cm$$

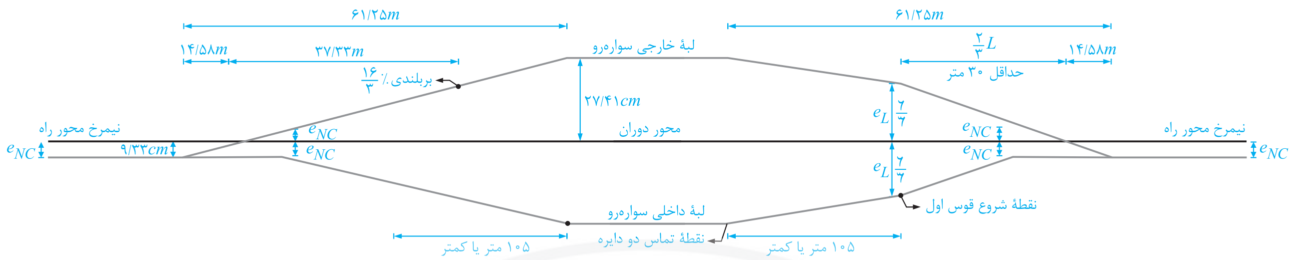
از آنجاکه سرعت طرح راه کمتر از ۷۵ کیلومتر بر ساعت است پس برای اعمال بربلندی در طرف دیگر قوس می‌بایست ۸۰ درصد طول شیب بربلندی در بخش مستقیم راه اعمال شود، پس داریم: $۰/۲۰ \times L_r = ۰/۲ \times ۴۶/۶۷ = ۹/۳۳\,m \quad , \quad ۰/۸۰ \times L_r = ۰/۸۰ \times ۴۶/۶۷ = ۳۷/۳۳\,m$

اکنون می‌توان نمودار بربلندی را برای حالت‌های (الف) و (ب) به‌طور جداگانه ترسیم کرد:

الف) نمودار بربلندی با توجه به شرایط چیدمان خط مستقیم - قوس بزرگتر - قوس کوچکتر - خط مستقیم به‌صورت زیر است.

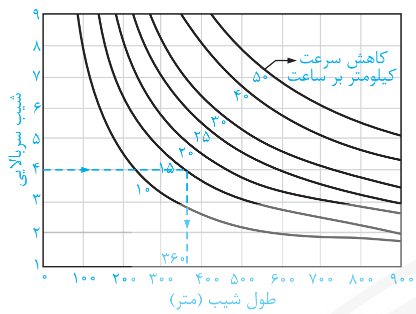


ب) نمودار بربلندی با توجه به شرایط خط مستقیم - قوس کوچکتر - قوس بزرگتر - خط مستقیم به شکل زیر می‌باشد.



حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصل دهم

۱ با توجه به نمودار طول بحرانی شیب (شکل (۴)) و با در نظر گرفتن کاهش سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت و شیب سربالایی ۴ درصد خواهیم داشت:



بنابراین پس از طی مسافت ۳۶۰ متر، سرعت کامیون به ۹۵ کیلومتر در ساعت می‌رسد.

۲ با توجه به آیین‌نامهٔ طرح هندسی راه‌های ایران (نشریهٔ شمارهٔ ۴۱۵) وجود سه شرط اصلی، ضرورت طرح خط کمکی سربالایی را توجیه می‌کند که اکنون هر یک بررسی می‌شود:

۱) اگر شدت جریان ترافیک در سربالایی بیش از ۲۰۰ وسیلهٔ نقلیه در ساعت باشد.

$$\text{شدت جریان ترافیک در سربالایی} = \frac{\text{ضریب توزیع جریان رو به بالا} \times \text{حجم ترافیک ساعت طرح}}{\text{ضریب ساعت اوج}} = \frac{۵۰۰ \times ۰/۵}{۰/۸۵} = ۲۹۴/۱۱ \ veh/hr > ۲۰۰ \ veh/hr \ \ OK$$

۲) اگر شدت جریان ترافیک کامیون در سربالایی بیش از ۲۰ وسیلهٔ نقلیه در ساعت باشد.

$$\text{شدت جریان ترافیک کامیون در سربالایی} = \text{شدت جریان در سربالایی} \times \text{درصد کامیون در سربالایی}$$

$$\text{شدت جریان ترافیک کامیون در سربالایی} = \frac{(۵۰۰ \times ۰/۵)}{۰/۸۵} \times \left(\frac{۰/۲۰}{۲}\right) = ۲۹/۴۱ \ veh/hr > ۲۰ \ veh/hr \quad OK$$

۳) در صورت وجود یکی از سه شرط زیر:

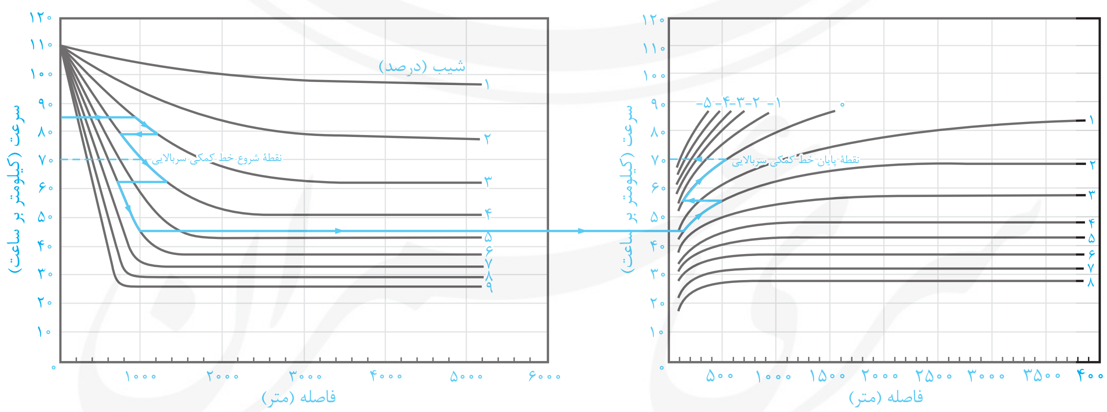
الف) کاهش سرعت خودروی سنگین طرح به میزان ۱۵ کیلومتر در ساعت یا بیشتر

ب) وجود کیفیت سطح ترافیک پایین‌تر از سطح سرویس D یا ۴

پ) کاهش کیفیت ترافیک به اندازهٔ دو سطح کیفیت نسبت به قطعهٔ پیش از سربالایی

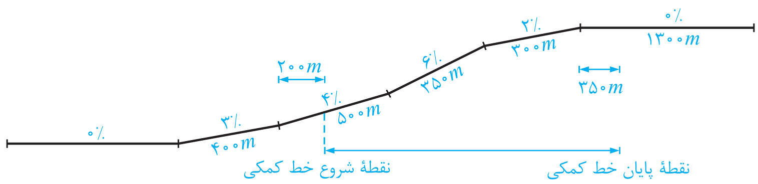
که در اینجا شرط (ب) برقرار است. بنابراین احداث خط کمکی سربالایی ضروری است.

۳ برای جانمایی و تعیین طول خط کمکی در سربالایی در نیمرخ طولی مسیر با استفاده از نمودار رابطهٔ بین مقدار و طول شیب برای مقادیر مختلف سرعت (شکل (۶)) با داشتن سرعت حرکت وسیلهٔ نقلیهٔ سنگین و نیز شیب و طول شیب هر بخش، مطابق جهت پیکان‌ها روی شکل عمل می‌کنیم:



ب) کاهش سرعت   الف) افزایش سرعت

با توجه به شکل فوق برای اختلاف سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت داریم:



۶۰۰ متر بعد از شروع سربالایی، خط کمکی در شیب ۴ درصد شروع می‌شود. $\Rightarrow 600\,m = 200 + 400$: نقطهٔ شروع خط کمکی در سربالایی نسبت به شیب صفر

۳۵۰ متر بعد از شروع مسیر با شیب صفر، خط کمکی پایان می‌یابد. $\Rightarrow 1300\,m = 350 + 300 + 350 + 300$: نقطهٔ پایان خط کمکی در سربالایی نسبت به نقطهٔ شروع خط کمکی

حال برای تأمین فاصلهٔ دید کافی جهت سبقت ایمن وسایل نقلیه داریم:

$$L_{\text{مطلوب}} = 1300 + 60 = 1360\,m$$

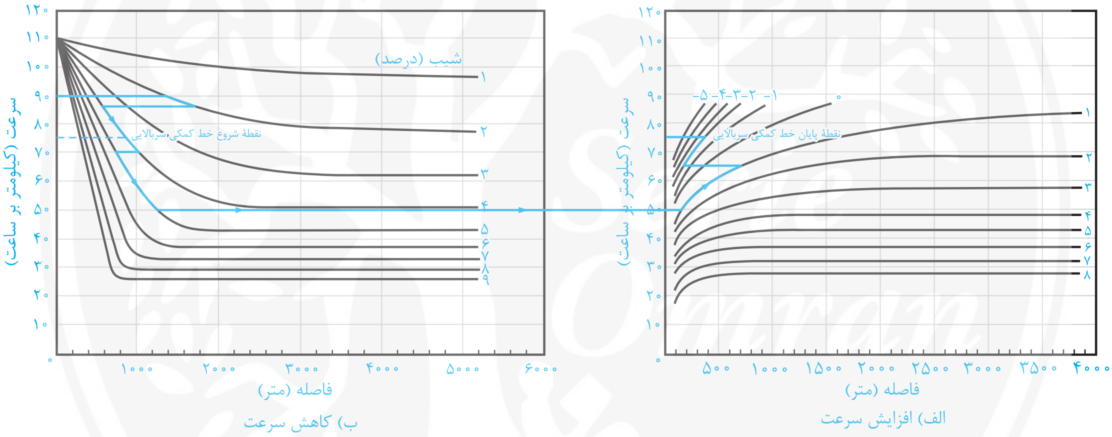
اکنون بایستی طول لچکی انشعابی و لچکی اتصال را به‌دست آوریم، پس خواهیم داشت:

۱:۲۵ طول لچکی انشعابی با نسبت عرض به طول $= 3/65 \times 25 = 91/25\,m > 90\,m \quad OK$

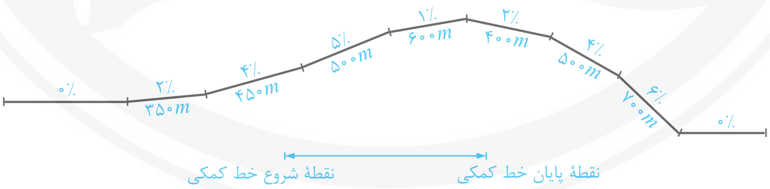
۱:۵۰ طول لچکی اتصال با نسبت عرض به طول $= 3/65 \times 5 = 182/50\,m > 180\,m \quad OK$

۴ در چنین شرایطی می‌بایست طول خط کمکی در سربالایی را در دو حالت زیر به‌دست آورد:

حالت اول (طرح خط کمکی سربالایی در جهت حرکت از چپ به راست مسیر ($L_{left\ to\ right}$)): بر این اساس با توجه به نمودار رابطهٔ بین مقدار و طول شیب برای مقادیر مختلف سرعت (شکل (۶)) و با داشتن سرعت حرکت وسیلهٔ نقلیهٔ سنگین و نیز شیب و طول شیب هر بخش مطابق جهت پیکان‌ها روی شکل عمل می‌کنیم.



با توجه به شکل فوق برای اختلاف سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت داریم:



۶۵۰ متر بعد از شروع سربالایی، خط کمکی در شیب ۴ درصد شروع می‌شود. $\Rightarrow 650\,m = 300 + 350$: نقطهٔ شروع خط کمکی در سربالایی نسبت به شیب صفر

۱۴۵۰ متر، بعد از نقطهٔ شروع سربالایی، خط کمکی در شیب ۲- درصد پایان می‌یابد. $\Rightarrow 1450\,m = 200 + 600 + 500 + 150$: نقطهٔ پایان خط کمکی در سربالایی نسبت به نقطه شروع خط کمکی

حال برای تأمین فاصلهٔ دید کافی جهت سبقت ایمن وسایل نقلیه داریم:

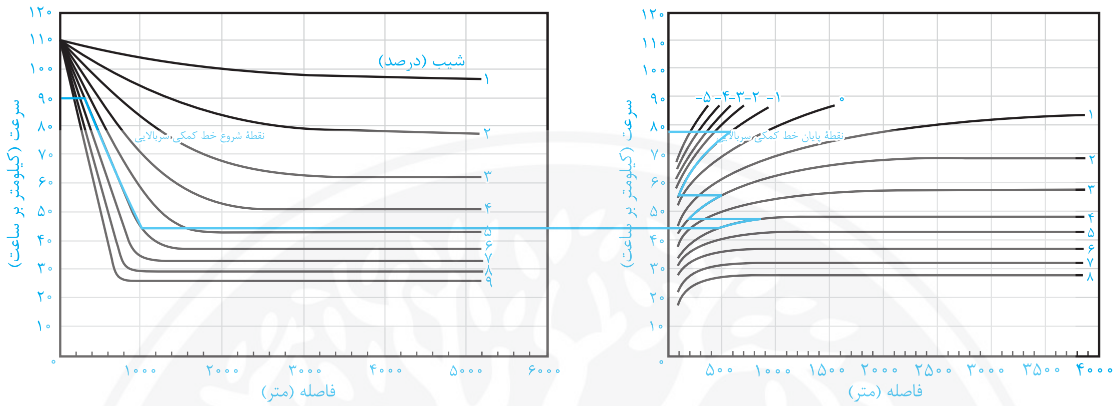
$$L_{left\ to\ right\ \text{مطلوب}} = 1450 + 60 = 1510\,m$$

اکنون بایستی طول لچکی انشعابی و لچکی اتصال را به‌دست آوریم، بنابراین داریم:

۱:۲۵ طول لچکی انشعابی با نسبت عرض به طول $= 3/65 \times 25 = 91/25\,m > 90\,m \quad OK$

۱:۵۰ طول لچکی اتصال با نسبت عرض به طول $= 3/65 \times 50 = 182/50\,m > 180\,m \quad OK$

حالت دوم (طرح خط کمکی سربالایی در جهت حرکت از راست به چپ مسیر ($L_{right\ to\ left}$)): در این حالت نیز مطابق حالت اول و با توجه به نمودار رابطهٔ بین مقدار و طول شیب برای مقادیر مختلف سرعت (شکل (۶))، مطابق جهت پیکان‌ها روی شکل و از سمت راست مسیر به سمت چپ مسیر شیب‌ها را در نظر می‌گیریم:

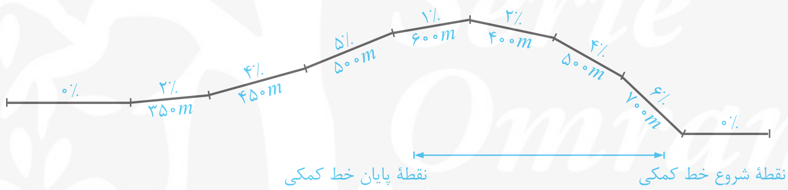


ب) کاهش سرعت الف) افزایش سرعت

با توجه به شکل فوق برای اختلاف سرعت ۱۵ کیلومتر بر ساعت داریم:

نقطهٔ شروع خط کمکی در سربالایی نسبت به شیب صفر: ۲۰۰ متر بعد از شروع شیب ۶ درصد، خط کمکی سربالایی آغاز می‌شود.

نقطهٔ پایان خط کمکی در سربالایی نسبت به نقطهٔ شروع خط کمکی: $۵۰۰+۵۰۰+۴۰۰+۴۰۰=۱۸۰۰\ m \Rightarrow$ ۱۸۰۰ متر بعد از نقطهٔ شروع خط کمکی، در شیب ۱- درصد

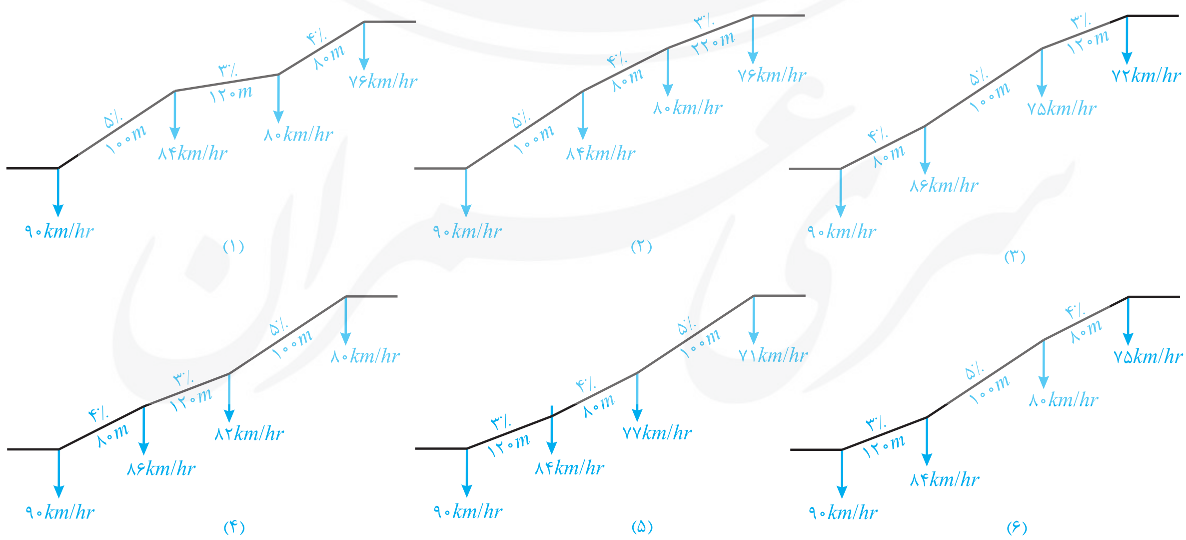


حال برای تأمین فاصلهٔ دید کافی جهت سبقت ایمن وسایل نقلیه داریم:

$$L_{right\ to\ left}{}_{\text{مطلوب}} = ۱۸۰۰+۶۰=۱۸۶۰\ m$$

طول لچکی انشعابی و لچکی اتصال برابر حالت اول می‌باشد.

۵ با توجه به سه شیب موجود، چیدمان‌های مختلف را ترسیم می‌کنیم و مقدار کاهش سرعت در انتهای آنها را با توجه به نمودار (۶) و سرعت ورودی ۹۰km/hr با یکدیگر مقایسه می‌کنیم:



با توجه به سرعت نهایی در انتهای شیب‌های متوالی می‌توان گفت در حالت (۴)، مناسب‌ترین چیدمان به‌دست می‌آید.

۶ با توجه به جدول (۶)، کمترین مقدار R برای روسازی آسفالتی برابر با ۰/۱۲ که معرف طولانی‌ترین خروجی و بیشترین مقدار R برای شن یکدست درشت و گردگوشه برابر با ۲/۵ است که معرف کوتاهترین خروجی می‌باشد. حال با توجه به رابطهٔ تعیین طول خروجی اضطراری داریم:

$$L_{min}=\frac{V^{۲}}{۲۵۴\,(R\pm G)}=\frac{۱۴۰^{۲}}{۲۵۴\,(۲/۵+۰/۱۴)}=۲۹/۲۲\ m=۳۰\ m \quad , \quad L_{max}=\frac{V^{۲}}{۲۵۴\,(R\pm G)}=\frac{۱۴۰^{۲}}{۲۵۴\,(۰/۱۲+۰/۱۴)}=۲۹۶/۷۸\ m=۳۰۰\ m$$

۷ با توجه به رابطهٔ طول خروجی اضطراری با داشتن چند شیب داریم:

$$V_f^{۲}=V_i^{۲}-۲۵۴\,L(R\pm G)=۱۳۵^{۲}-۲۵۴\times ۱۲۰\times(۰/۱۵+۰/۱۲)=۹۹۹۵/۴ \Rightarrow V_f=۹۹/۹۷\ km/hr\cong ۱۰۰\ km/hr$$

۸ با توجه به جهت شیب‌ها در هر قوس، طول خط پروژهٔ میانی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$L_{m_۱}=\frac{L_۱}{۴}+۵۰+\frac{L_۲}{۲}=\frac{۱۰۰}{۴}+۵۰+\frac{۳۵۰}{۲}=۲۵+۵۰+۱۷۵=۲۵۰\ m$$

$$L_{m_۲}=\frac{L_۲}{۲}+۱۵۰+\frac{L_۳}{۴}=\frac{۳۵۰}{۲}+۱۵۰+\frac{۶۰۰}{۴}=۱۷۵+۱۵۰+۱۵۰=۴۷۵\ m$$

$$L_{m_۳}=\frac{L_۳}{۴}+۷۵+\frac{L_۴}{۴}=\frac{۶۰۰}{۴}+۷۵+\frac{۲۵۰}{۴}=۱۵۰+۷۵+۶۲/۵=۲۸۷/۵\ m$$

حال با استفاده از نمودار شکل (۴)، مقدار کاهش سرعت برای هر شیب را برآورد می‌کنیم:

$$\Delta V_۱\cong ۱۴\ km/hr\le ۱۵\ km/hr \quad , \quad \Delta V_۲=۸\ km/hr\le ۱۵\ km/hr \quad , \quad \Delta V_۳=۱۲\ km/hr\le ۱۵\ km/hr$$

بنابراین هر سه طول خط پروژهٔ میانی برای کاهش سرعت تا ۱۵ کیلومتر بر ساعت تأمین شده است.

حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصل یازدهم

۱ با توجه به معادلهٔ قوس قائم، مقادیر $g_۱$ و $g_۲$ را به‌دست می‌آوریم، پس داریم:

$$y=\frac{۱}{۱۹۰۰۰}x^۲+\frac{۲}{۱۰۰}x+۸۵ \Rightarrow b=g_۱=۰/۰۲=۲\%$$

$$a=\frac{g_۲-g_۱}{۲L} \Rightarrow \frac{۱}{۱۹۰۰۰}=\frac{g_۲-۰/۰۲}{۲\times ۳۸۰} \Rightarrow g_۲=۰/۰۶=۶\%$$

حال با داشتن مقادیر $g_۱$ و $g_۲$ به‌راحتی می‌توان مقدار K را به‌صورت زیر تعیین کرد:

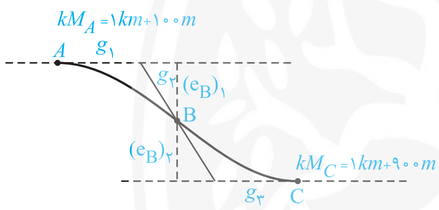
$$L \geq KA \Rightarrow K_{min}=\frac{L}{A}=\frac{۳۸۰}{۱۰۶-۲۱}=۹۵$$

اکنون با تعیین نوع قوس و با توجه به جدول (۳) مقدار سرعت طرح برآورد می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

$g_۲-g_۱=۶-۲=۴\%>۰ \Rightarrow$ پس قوس مقعر است

$$\begin{cases} K=۹۵ \\ \text{قوس مقعر} \end{cases} \xrightarrow{\text{جدول (۳)}} V_{Design}=۱۲۰\ km/hr$$

۲ برای درک بهتر، ابتدا قوس‌های محدب و مقعر در فاصلهٔ A تا C را به‌صورت شماتیک مورد بررسی قرار می‌دهیم:



می‌دانیم که فاصلهٔ هر نقطه روی قوس تا مماس ورودی برابر با e_B می‌باشد، پس با توجه به شکل فوق می‌توان نوشت:

$$(e_B)_۱+(e_B)_۲=ELE_{Bridge\ Deck}-ELE_{Tunnel\ Floor}=۱۰۲۰/۲۵-۱۰۰۰=۲۰/۲۵\ m$$

$$L_۱+L_۲=KM_C-KM_A=۱۹۰۰-۱۱۰۰=۸۰۰\ m$$

از آنجاکه هر دو قوس محدب و مقعر به‌صورت متوالی طراحی شده‌اند، پس شیب $g_۲$ در هر دو قوس یکسان است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} g_۱=g_۲=۰ \\ (g_۲)_۱=(g_۲)_۲ \end{cases} \Rightarrow A_۱=A_۲=A \quad , \quad \begin{cases} (e_B)_۱=\frac{A_۱L_۱}{۲۰۰} \\ (e_B)_۲=\frac{A_۲L_۲}{۲۰۰} \end{cases} \Rightarrow (e_{B_۱})=(e_B)_۲=\frac{A_۱L_۱}{۲۰۰}+\frac{A_۲L_۲}{۲۰۰}=\frac{A(L_۱+L_۲)}{۲۰۰}=۲۰/۲۵$$

$$\Rightarrow A=\frac{۲۰۰\times ۲۰/۲۵}{۸۰۰}=۵/۰۶۲۵$$

حال با توجه به رابطهٔ طول قوس سهمی قائم خواهیم داشت:

$$L=KA \Rightarrow (L_۱+L_۲)=(K_۱+K_۲)A \Rightarrow ۸۰۰=(K_۱+K_۲)\times ۵/۰۶۲۵ \Rightarrow K_۱+K_۲=۱۵۸/۰۲\cong ۱۵۸$$

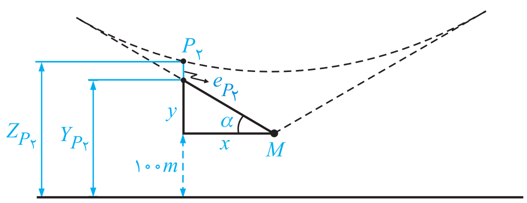
با توجه به جداول (۳) و (۵) می‌توان دریافت که مجموع $(K_۱+K_۲)$ فقط برای سرعت طرح $۱۲۰\ km/hr$ برابر با ۱۵۸ می‌باشد، پس داریم:

$$K_۱+K_۲=۹۵+۶۳=۱۵۸ \Leftrightarrow ۱۲۰\ km/hr$$

۳ ابتدا با توجه به شکل مسئله، طول قوس قائم و طول نقطهٔ $P_۲$ را به‌دست می‌آوریم، پس داریم:

$$; \ h=۷۰۰-۱۰۰=۶۰۰\ m \qquad , \qquad x_{P_۲}=۳۰۰-۱۰۰=۲۰۰\ m$$

اکنون به‌سادگی می‌توان با توجه به شکل زیر و با کمک قضایای هندسی، ارتفاع نقطهٔ $P_۲$ را بر روی مماس به‌دست آورد. بنابراین می‌توان نوشت:



$$tan\,\alpha=\frac{y}{x} \Rightarrow y=x\ tan\,\alpha$$

$$y=(۴۰۰-۳۰۰)\times\frac{۲}{۱۰۰}=۲\ m$$

$$y_{P_۲}=۱۲۰+۲=۱۲۲\ m$$

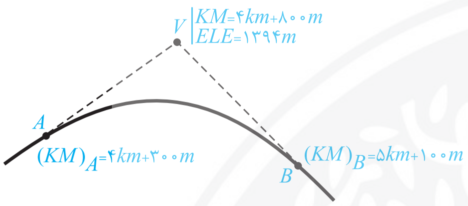
حال فاصلهٔ بین مماس و قوس یعنی $e_{P_۲}$ را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$\begin{cases} e_{P_۲}=(\frac{x_{P_۲}}{L})^۲\times e_B \\ e_B=\frac{AL}{۲۰۰}\ ,\ A=|g_۲-g_۱| \end{cases} \Rightarrow e_{P_۲}=(\frac{۲۰۰}{۶۰۰})^۲\times\frac{|۳-(-۲)|\times۶۰۰}{۲۰۰}=۱/۶۷\ m$$

در نهایت ارتفاع کلی نقطهٔ $P_۲$ بر روی منحنی از سطح مبنا برابر است با:

$$Z_{P_۲}=Y_{P_۲}+e_{P_۲}\Rightarrow Z_{P_۲}=۱۲۲+۱/۶۷=۱۲۳/۶۷\ m$$

۴ الف) چنانچه در قوس سهمی قائم، طول‌های $L_۱$ و $L_۲$ با یکدیگر برابر نباشند، آن قوس نامتقارن خواهد بود. می‌دانیم که در قوس‌های سهمی نامتقارن، چنانچه خط مماسی بر نقطهٔ نظیر قوس بر روی قوس قائم ترسیم شود قوس قائم به دو قوس سهمی قائم با مماس‌های برابر تبدیل می‌شود. پس خواهیم داشت:



حال طول هر یک از قوس‌های سهمی قائم را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$L_{AC}=KM_V+KM_A=۴۸۰۰-۴۳۰۰=۵۰۰\ m$$

$$L_{CB}=KM_B-KM_V=۵۱۰۰-۴۸۰۰=۳۰۰\ m$$

اکنون می‌بایست ارتفاع نقاط شروع و پایان قوس را محاسبه کرد، پس داریم:

$$ELE_A=ELE_V-g_۱L_{AC}=۱۳۹۴-۰/۰۲\times۵۰۰=۱۳۸۴\ m$$

$$ELE_B=ELE_V+g_۲L_{CB}=۱۳۹۴+(-۰/۰۴\times۳۰۰)=۱۳۸۲\ m$$

حال باید ارتفاع نقاط E و F را به‌دست آورد. بدین منظور با توجه به اینکه هر دو قوس سهمی متقارن می‌باشند پس نقاط E و F در وسط قوس $\overset{\frown}{AC}$ و $\overset{\frown}{CB}$ قرار دارند، بنابراین خواهیم داشت:

$$ELE_E=ELE_V-g_۱\frac{L_{AC}}{۲}=۱۳۹۴-۰/۰۲\times\frac{۵۰۰}{۲}=۱۳۸۹\ m$$

$$ELE_F=ELE_V+g_۲\frac{L_{CB}}{۲}=۱۳۹۴+(-۰/۰۴\times\frac{۳۰۰}{۲})=۱۳۸۸\ m$$

همچنین می‌دانیم‌که خط واصل A به B و E به F با یکدیگر موازی‌اند پس شیب آنها نیز یکی است.

$$g_۳=\frac{ELE_B-ELE_A}{L}=\frac{ELE_E-ELE_F}{\frac{L}{۲}}=\frac{۱۳۸۲-۱۳۸۴}{۵۰۰+۳۰۰}=-۰/۰۰۲۵=-۰/۲۵\ \%$$

با تعیین مقادیر $g_۱$، $g_۳$، L_{AC} و ELE_A، برای معادلهٔ قوس AC از کیلومتر $۴\ km+۳۰۰\ m$ تا $۴\ km+۸۰۰\ m$ داریم:

$$y_{AC}=\frac{g_۳-g_۱}{۲L_{AC}}x^۲+g_۱x+ELE_A=\frac{-۰/۰۰۲۵-۰/۰۲}{۲\times۵۰۰}x^۲+۰/۰۲x+۱۳۸۴=-۰/۰۰۰۰۲۲۵x^۲+۰/۰۲x+۱۳۸۴$$

از سوی دیگر برای تعیین معادلهٔ قوس CB می‌بایست ارتفاع نقطهٔ C را به‌عنوان ارتفاع نقطهٔ شروع قوس CB به‌دست آورد، پس داریم:

$$ELE_C=ELE_E+g_۳\frac{L_{AC}}{۲}=۱۳۸۹+(-۰/۰۰۲۵\times\frac{۵۰۰}{۲})=۱۳۸۸/۳۷۵\ m$$

حال معادلهٔ قوس CB از کیلومتر $۴km+۸۰۰$ تا $۵km+۱۰۰m$ برابر خواهد بود با:

$$y_{CB}=\frac{g_۲-g_۳}{۲L_{CB}}x^۲+ELE_C=\frac{-۰/۰۴-(-۰/۰۰۲۵)}{۲\times۳۰۰}x^۲+(-۰/۰۰۲۵x)+۱۳۸۸/۳۷۵=-۰/۰۰۰۰۶۲۵x^۲-۰/۰۰۲۵x+۱۳۸۸/۳۷۵$$

ب) برای تعیین فاصلهٔ قائم رأس قوس (V) تا نقطهٔ نظیر روی قوس (C) می‌توان نوشت:

$$e_{VC}=ELE_V-ELE_C=۱۳۹۴-۱۳۸۸/۳۷۵=۵/۶۲۵\ m$$

پ) از آنجاکه شیب $g_۳$ منفی می‌باشد پس نقطهٔ مفروض M با حداکثر ارتفاع بر روی قوس AC واقع شده است، بنابراین داریم:

$$y'_{AC}=۰\Rightarrow y'_{AC}=-۰/۰۰۰۰۴۵x+۰/۰۲\Rightarrow x_m=۴۴۴/۴۴\ m$$

حال برای کیلومتراژ نقطهٔ M خواهیم داشت:

$$KM_M=KM_A+x_M=۴۳۰۰+۴۴۴/۴۴=۴۷۴۴/۴۴\ m\Rightarrow KM_M=۴\ km+۷۴۴/۴۴\ m$$

اکنون با جایگذاری x_M در معادلهٔ y_{AC} ارتفاع نقطهٔ M نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y_M=-۰/۰۰۰۰۲۲۵\,x_M^۲+۰/۰۲\,x_M+۱۳۸۴=-۰/۰۰۰۰۲۲۵\times(۴۴۴/۴۴)^۲+(۰/۰۲\times۴۴۴/۴۴)+۱۳۸۴=۱۳۸۸/۴۴\ m\Rightarrow ELE_M=۱۳۸۸/۴۴\ m$$

۵ همانطورکه در صورت مسئله مفروض است قوس سهمی قائم به‌گونه‌ای طراحی شده است که از نقطهٔ M می‌گذرد. پس نقطهٔ M می‌بایست در معادلهٔ این قوس صدق کند. بنابراین ابتدا x_M و ELE_{BVC} را پیدا کرده و در معادلهٔ قوس جایگذاری می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$x_M = \frac{L}{۲} + (KM_M - KM_{PVI}) = \frac{L}{۲} + (۱۱۶۰۰ - ۱۱۴۰۰) = \frac{L}{۲} + ۲۰۰$$

$$ELE_{BVC} = ELE_{PVI} - g_1\frac{L}{۲} = ۱۳۶۵ - (-۰/۰۳۵ \times \frac{L}{۲}) = ۱۳۶۵ + ۰/۰۱۵L$$

حال با قرار دادن مقادیر ELE_{BVC} و x_M در معادلهٔ کلی قوس سهمی قائم داریم:

$$ELE_M = (\frac{g_2 - g_1}{۲L})x_M^2 + g_1 x_M + ELE_{BVC}$$

$$۱۳۷۷ = (\frac{۰/۰۲ - (-۰/۰۳)}{۲ \times L}) \times (\frac{L}{۲} + ۲۰۰)^2 + (-۰/۰۳ \times (\frac{L}{۲} + ۲۰۰)) + (۱۳۶۵ + ۰/۰۱۵L)$$

$$\Rightarrow ۰/۰۰۶۲۵L - ۱۳ + \frac{۱۰۰۰}{L} = ۰ \xrightarrow{\text{طرفین معادله را در } L \text{ ضرب می‌کنیم}} ۰/۰۰۶۲۵L^2 - ۱۳L + ۱۰۰۰ = ۰$$

حل معادلهٔ درجهٔ دوم : $L = \frac{-(-۱۳) \pm \sqrt{(-۱۳)^2 - ۴(۰/۰۰۶۲۵ \times ۱۰۰)}}{۲ \times ۰/۰۰۶۲۵} \Rightarrow L = \frac{۱۳ \pm ۱۲}{۰/۰۱۲۵} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = ۲۰۰۰\,m \\ L_2 = ۸۰\,m \end{cases}$

با توجه به کیلومتراژ نقاط M و PVI می‌توان دریافت که طول قابل قبول این قوس سهمی قائم برابر با ۲۰۰۰ متر می‌باشد.

۶ با توجه به اینکه مسیر موردنظر یک بزرگراه واقع در منطقه‌ای دشتی می‌باشد پس با توجه به جدول (۴) از فصل سوم، سرعت طرح برابر با ۱۱۵ کیلومتر بر ساعت در نظر گرفته می‌شود. حال می‌بایست نوع قوس سهمی قائم را تعیین کرد، پس داریم:

$g_2 - g_1 = ۷ - (-۴) = ۱۱\% > ۰ \Rightarrow$ قوس مقعر است.

حال می‌بایست طول این قوس را به‌دست آوریم. با توجه به جدول (۵) میزان انحنای قائم طرح برابر می‌شود با:

$$\begin{cases} K_{110} = ۵۵ \\ K_{120} = ۶۳ \end{cases} \Rightarrow K_{115} = \frac{۵۵ + ۶۳}{۲} = ۵۹$$

پس داریم:

$$L_{min} = KA = ۵۹ \times |۷ - (-۴)| = ۶۴۹\,m$$

همچنین می‌دانیم که گودترین نقطهٔ قوس قائم مناسب‌ترین کیلومتراژ برای جانمایی آبرو می‌باشد، از اینرو فاصلهٔ محل خط‌القعر قوس قائم تا شروع قوس برابر است با:

$$X_{culvert} = \frac{g_1}{g_1 - g_2} \times L = \frac{-۴}{-۴ - ۷} \times ۶۴۹ = ۲۳۶\,m$$

اکنون به‌راحتی می‌توان کیلومتراژ محل مناسب آبرو را به‌صورت زیر تعیین کرد:

$$KM_A = KM_V - \frac{L}{۲} = ۷۸۰۰ - \frac{۶۴۹}{۲} = ۷۴۷۵/۵ \Rightarrow KM_A = ۷\,km + ۷۵/۵\,m$$

$$KM_{culvert} = KM_A + X_{culvert} = ۷۴۷۵/۵ + ۲۳۶ = ۷۷۱۱/۵ \Rightarrow KM_{culvert} = ۷\,km + ۷۱۱/۵\,m$$

۷ الف) برای تعیین طول قوس سهمی قائم در این حالت می‌بایست معادلهٔ کلی قوس را به‌دست آورد، پس داریم:

$$y = ax^2 + bx + y_A \Rightarrow y = (\frac{g_2 - g_1}{۲L})x^2 + g_1 x + ELE_{BVC}$$

$$ELE_{BVC} = ELE_{PVI} - (-g_1\frac{L}{۲}) \Rightarrow ELE_{BVC} = ELE_{PVI} + g\frac{L}{۲}$$

$$y = \frac{g}{L}x^2 - gx + ELE_{PVI} + g\frac{L}{۲}$$

حال می‌بایست مختصات نقاط $M(\frac{L}{۲} - ۱۰۰\,,\,۱۱۰)$ و $N(\frac{L}{۲} + ۵۰, ۱۰۸/۵)$ در معادلهٔ فوق صدق کند، بنابراین خواهیم داشت:

نقطهٔ M : $۱۱۰ = \frac{g}{L}(\frac{L}{۲} - ۱۰۰)^2 - g(\frac{L}{۲} - ۱۰۰) + ۱۰۰ + g\frac{L}{۲} \Rightarrow ۱۱۰ = \frac{gL}{۴} + ۱۰۰۰۰\frac{g}{L} + ۱۰۰ \quad (۱)$

نقطهٔ N : $۱۰۸/۵ = \frac{g}{L}(\frac{L}{۲} + ۵۰)^2 - g(\frac{L}{۲} + ۵۰) + ۱۰۰ + g\frac{L}{۲} \Rightarrow ۱۰۸/۵ = \frac{gL}{۴} + ۲۵۰۰\frac{g}{L} + ۱۰۰ \quad (۲)$

برای یافتن مقادیر مجهول g و L کافیست رابطهٔ (۱) را از رابطهٔ (۲) کم کنیم، بنابراین داریم:

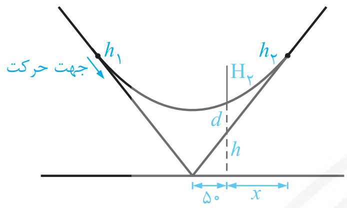
$$-۱/۵ = -۷۵۰۰\frac{g}{L} \Rightarrow g = +۰/۰۰۰۲L$$

حال مقدار g را در رابطهٔ (۱) یا (۲) قرار می‌دهیم تا مقدار L معلوم شود، از اینرو می‌توان نوشت:

$$۱۱۰=\frac{۰/۰۰۰۲\,L\times L}{۴}+۱۰۰۰۰\times\frac{۰/۰۰۰۲L}{L}+۱۰۰\Rightarrow L=۴۰۰\,m\Rightarrow g=۰/۰۰۰۲\times۴۰۰=۰/۰۸=+۸\Rightarrow\begin{cases}g_۱=-۸\%\\ g_۲=+۸\%\end{cases}$$

حال می‌بایست طول به‌دست آمده بر مبنای حداقل مسافت دید توقف در زیرگذر کنترل شود. بنابراین داریم:

چون ارتفاع آزادراه نسبت به رابط از سطح افق پایین‌تر است، پس بحرانی‌ترین حالت برای فاصلهٔ دید توقف را ایجاد می‌کند.



$$d=\frac{x^۲A}{۲L}=\frac{۱۵۰^۲\times۰/۰۸}{۲\times۴۰۰}=۲/۲۵\,m$$

$$g_۲=\frac{۸}{۱۰۰}=\frac{h}{۵۰}\Rightarrow h=۴\,m$$

$$\Rightarrow H_۲+d+h=۶+۲/۲۵+۴=۱۲/۲۵\,m$$

می‌توان فرض نمود که قوس قائم در سمت چپ به اندازهٔ $h_۱$ و در سمت راست به اندازهٔ $h_۲$ بالا بیاید تا فاصلهٔ دید در سمت چپ و راست قوس محاسبه شود. فاصلهٔ دید کل، جمع این دو مقدار است:

$$۱)\;\; g=\frac{۸}{۱۰۰}=\frac{۱۲/۲۵+h_۱}{s_۱}\Rightarrow S_۱=۱۴/۶۵\times\frac{۱۰۰}{۵}=۱۸۳/۱۲۵\,m$$

$$۲)\;\; g=\frac{۸}{۱۰۰}=\frac{۱۲/۲۵+h_۲}{s_۲}\Rightarrow S_۲=۱۲/۸۵\times\frac{۱۰۰}{۸}=۱۶۰/۶۲۵\,m$$

$$\Rightarrow S=۱۸۳/۱۲۵+۱۶۰/۶۲۵\,m=۳۴۳/۷۵\,m$$

چون $S<L$ است، داریم:

$$L=\frac{AS^۲}{۲۰۰(۲-۱/۵)}=\frac{۸\times۳۴۳/۷۵^۲}{۸۰۰\times(۶-۱/۵)}=۲۶۲/۵۹\,m<۴۰۰\qquad OK$$

با توجه به اینکه خط دید بر کف پل مماس است بنابراین در جهت حرکت از راست به چپ نیز همین روابط برقرار است.

ب) با داشتن طول قوس سهمی قائم کیلومتراژ نقاط ابتدا و انتهای قوس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$KM_{BVC}=KM_{PVI}-\frac{L}{۲}=۲۳۰۰-\frac{۴۰۰}{۲}=۲۱۰۰\,m\Rightarrow KM_{BVC}=۲\,km+۱۰۰\,m$$

$$KM_{EVC}=KM_{PVI}+\frac{L}{۲}=۲۳۰۰+\frac{۴۰۰}{۲}=۲۵۰۰\,m\Rightarrow KM_{EVC}=۲\,km+۵۰۰\,m$$

برای به‌دست آوردن ارتفاع نقاط شروع و پایان قوس، به‌دلیل آنکه شیب ورودی و خروجی با هم برابرند پس داریم:

$$ELE_{BVC}=ELE_{EVC}=ELE_{PVI}-g_۱\frac{L}{۲}=۱۰۰-(-۰/۰۸\times\frac{۴۰۰}{۲})=۱۱۶\,m$$

پ) ابتدا فاصلهٔ قائم وسط قوس را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$e_V=\frac{AL}{۸۰۰}=\frac{|۱۸-(-۸)|\times۴۰۰}{۸۰۰}=۸m$$

برای به‌دست آوردن کیلومتراژ و ارتفاع گودترین نقطهٔ قوس قائم از آنجاکه شیب ورودی و خروجی با یکدیگر برابر است پس داریم:

$$KM_C=KM_{PVI}=۲km+۳۰۰m$$

$$ELE_C=ELE_{PVI}+e_V=۱۰۰+۸=۱۰۸m$$

۸ در قوس قائم متقارن، ادامهٔ امتداد e_V از وسط وتر واصل ابتدا و انتهای قوس عبور می‌کند، یعنی نقطهٔ وسط پاره‌خط AB می‌باشد. پس داریم:

$$X_M=\frac{X_A+X_B}{۲}\qquad,\qquad Y_M=\frac{Y_A+Y_B}{۲}$$

حال می‌بایست معادلهٔ کلی قوس را به‌دست آورد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$y=ax^۲+bx+c=(\frac{g_۲-g_۱}{۲L})x^۲+g_۱x+y_A=(\frac{-۰۰۲-۰/۰۶}{۲\times۴۰۰})x^۲+۰/۰۶x+۵۰\Rightarrow y=-\frac{۱}{۱۰۰۰۰}x^۲+۰/۰۶\,x+۵۰$$

اکنون با جایگذاری $X_{EVC}=۴۰۰m$ در معادلهٔ کلی قوس قائم مقدار Y_{EVC} تعیین می‌شود، از اینرو خواهیم داشت:

$$Y_{EVC}=-\frac{۱}{۱۰۰۰۰}\times(۴۰۰)^۲+(۰/۰۶\times۴۰۰)+۵۰=۹۰m$$

پس مختصات نقطهٔ M برابر است با:

$$BVC(۰,۵۰),EVC(۴۰۰,۹۰)\Rightarrow\begin{cases}X_M=\dfrac{X_{BVC}+X_{EVC}}{۲}=\dfrac{۰+۴۰۰}{۲}=۲۰۰\,m\\[2ex] Y_M=\dfrac{Y_{BVC}+Y_{EVC}}{۲}=\dfrac{۵۰+۹۰}{۲}=۷۰\,m\end{cases}\Rightarrow M(۲۰۰m,۷۰m)$$

۹ الف) ابتدا می‌بایست زاویهٔ انحراف قوس را به‌دست آوریم، پس داریم:

$$\theta_۱ = -arccos\,(\frac{۱}{\sqrt{۱+g_۱^۲}}) = -arccos\,(\frac{۱}{\sqrt{۱+(-۰/۰۵)^۲}}) = -۲/۸۶^\circ$$

$$\theta_۲ = arccos\,(\frac{۱}{\sqrt{۱+g_۲^۲}}) = arccos\,(\frac{۱}{\sqrt{۱+(۰/۰۷)^۲}}) = ۴/۰۰^\circ$$

$$\Delta = |\theta_۱ - \theta_۲| = |-۲/۸۶ - ۴/۰۰| = ۶/۸۶^\circ$$

حال طول افقی و ارتفاع نقاط شروع و پایان قوس دایره‌ای قائم را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$L_۱ = Rtan\frac{\Delta}{۲}\times cos\,\theta_۱ = R\times tan\frac{۶/۸۶}{۲}\times cos\,(-۲/۸۶) = ۰/۰۵۹۸R$$

$$L_۲ = Rtan\frac{\Delta}{۲}\times cos\,\theta_۲ = R\times tan\frac{۶/۸۶}{۲}\times cos\,(۴) = ۰/۰۵۹۷R$$

$$ELE_{BVC} = ELE_{PVI} - g_۱L_۱ = ۲۰۰ - (-۰/۰۵\times ۰/۰۵۹۸R) = ۲۰۰ + ۰/۰۰۲۹۹R$$

$$ELE_{EVC} = ELE_{PVI} + g_۲L_۲ = ۲۰۰ + (۰/۰۷\times ۰/۰۵۹۷R) = ۲۰۰ + ۰/۰۰۴۱۷۹R$$

اکنون می‌بایست مختصات افقی نقاط پایان و مرکز قوس را تعیین کرد، از اینرو خواهیم داشت:

$$X_{EVC} = L_۱ + L_۲ = ۰/۰۵۹۸R + ۰/۰۵۹۷R = ۰/۱۱۹۵R$$

$$X_O = \frac{g_۱g_۲(Y_{EVC} - Y_{BVC}) + (g_۱X_{EVC} - g_۲X_{BVC})}{g_۱ - g_۲}$$

$$= \frac{((-۰/۰۵)\times(۰/۰۷))\times(۲۰۰ + ۰/۰۰۴۱۷۹R - ۲۰۰ - ۰/۰۰۲۹۹R) + ((-۰/۰۵\times ۰/۱۱۹۵R) - (۰/۰۷\times ۰))}{-۰/۰۵ - ۰/۰۷}$$

$$= \frac{-۰/۰۰۰۰۰۴۱۶۲R - ۰/۰۰۵۹۷۵R}{-۰/۱۲} = ۰/۰۴۹۸R$$

از سوی دیگر می‌دانیم بهترین محل برای جانمایی آبرو در قوس قائم، پایین‌ترین نقطهٔ آن است، پس با داشتن معادلهٔ کلی قوس دایره می‌توان نوشت:

$$(x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x - x_۰)^۲ = R^۲ - (y - y_۰)^۲ \Rightarrow x^۲ - ۲xx_۰ + x_۰^۲ = R^۲ - (y - y_۰)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{نسبت به } x \text{ مشتق می‌گیریم}} ۲x - ۲x_۰ = ۰ \Rightarrow x_c = x_۰$$

اما می‌دانیم‌که:

$$x_c = L_۱ - (KM_{PVI} - KM_{culvert}) = L_۱ - (۱۰۴۰۰ - ۱۰۳۰۰) = L_۱ - ۱۰۰ = ۰/۰۵۹۸R - ۱۰۰ \qquad (۲)$$

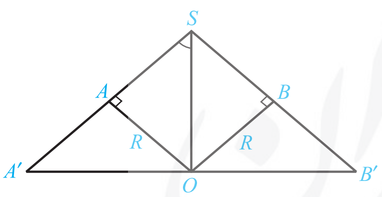
با توجه به روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$۰/۰۴۹۸R = ۰/۰۵۹۸R - ۱۰۰ \Rightarrow R = ۱۰۰۰۰m$$

پس طول قوس برابر است با:

$$L = L_۱ + L_۲ = ۰/۱۱۹۵R = ۰/۱۱۹۵\times ۱۰۰۰۰ = ۱۱۹۵m$$

۱۰ با توجه به شکل مقابل و قضایای هندسی خواهیم داشت:



$$\overset{\Delta}{ASO} \cong \overset{\Delta}{BSO} \Rightarrow \widehat{ASO} = \widehat{BSO} = \frac{۱۸۰ - \alpha_۱ - \alpha_۲}{۲}$$

$$\begin{cases} \alpha_۱ = arctan\,g_۱ = ۳/۴۳ \\ \alpha_۲ = arctan\,g_۲ = ۴ \end{cases} \Rightarrow \widehat{ASO} = ۸۶/۲۸۵$$

$$tan(\widehat{ASO}) = \frac{AO}{AS} \Rightarrow R = \underbrace{\boxed{AS}}_{۶۵۲۰-۶۴۰=۱۲۰}\ tan\,(۸۶/۲۸۵) \cong ۱۸۴۸\,m$$

۱۱ ابتدا فرض می‌کنیم دو واریانت با استفاده از قوس دایره‌ای به یکدیگر متصل شده‌اند. فاصلهٔ رأس قوس از نقطهٔ وسط قوس برابر است با:

$$BI = R(\frac{۱}{cos\frac{\Delta}{۲}} - ۱)$$

در صورتی‌که دو واریانت با استفاده از سهمی متقارن به هم متصل شوند، داریم:

$$e_V = \frac{|g - (-g)|}{۸}L = \frac{gL}{۴}$$

چون ارتفاع نقطهٔ وسط قوس در دو حالت یکسان است، باید داشته باشیم:

$$BI = e_V \Rightarrow R\left(\frac{۱}{cos\frac{\Delta}{۲}} - ۱\right) = \frac{gL}{۴}$$

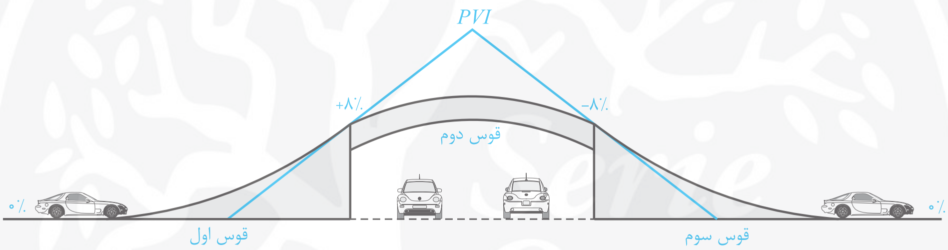
از طرفی در صورت سؤال گفته شده است که $R = \frac{۱}{۲}L$ و نیز می‌دانیم $g = tan\frac{\Delta}{۲}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{L}{۲}\left(\frac{۱}{cos\frac{\Delta}{۲}} - ۱\right) = tan\frac{\Delta}{۲} \times \frac{L}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{cos\frac{\Delta}{۲}} - ۱ = \frac{sin\frac{\Delta}{۲}}{۲cos\frac{\Delta}{۲}} \Rightarrow ۲ - ۲\,cos\frac{\Delta}{۲} = sin\frac{\Delta}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴ + ۴cos^۲\frac{\Delta}{۲} - ۸cos\frac{\Delta}{۲} = sin^۲\frac{\Delta}{۲} = ۱ - cos^۲\frac{\Delta}{۲} \Rightarrow ۵cos^۲\frac{\Delta}{۲} - ۸cos\frac{\Delta}{۲} + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow cos\frac{\Delta}{۲} = \begin{cases} \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{\Delta}{۲} = ۵۳/۱۳^\circ \Rightarrow \Delta = ۱۰۶/۲۶^\circ \checkmark \\ ۱ \Rightarrow \frac{\Delta}{۲} = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \times \end{cases}$$

۱۲ شکل کلی پل و زیرگذر به‌صورت مقابل است:



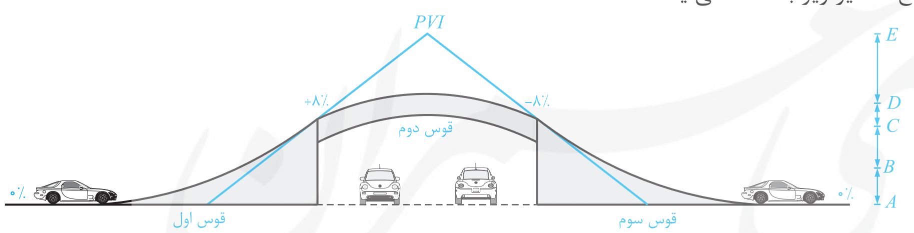
با فرض شیب‌های ۸٪ و ۸٪− برای قوس دوم، طول قوس‌ها به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\text{قوس (۱)}: \begin{cases} A = \left|\frac{۸}{۱۰۰} - \frac{۰}{۱۰۰}\right| \times ۱۰۰ = ۸ \\ \text{جدول ۵} \xrightarrow{V_D = ۳۰\ km/hr} K = ۶ \end{cases} \Rightarrow L_{min} = KA = ۶ \times ۸ = ۴۸m$$

$$\text{قوس (۲)}: \begin{cases} A = \left|-\frac{۸}{۱۰۰} - \frac{۸}{۱۰۰}\right| \times ۱۰۰ = ۱۶ \\ \text{جدول ۲} \xrightarrow{V_D = ۳۰\ km/hr} K = ۲ \end{cases} \Rightarrow L_{min} = KA = ۲ \times ۱۶ = ۳۲\ m$$

$$\text{قوس (۳)}: \begin{cases} A = \left|\frac{۰}{۱۰۰} - \left(-\frac{۸}{۱۰۰}\right)\right| \times ۱۰۰ = ۸ \\ \text{جدول ۵} \xrightarrow{V_D = ۳۰\ km/hr} K = ۶ \end{cases} \Rightarrow L_{min} = ۶ \times ۸ = ۴۸\ m$$

فاصلهٔ کف زیرگذر تا PVI قوس دوم، از جمع مقادیر زیر به‌دست می‌آید:



$$AE = AB + BC + CD + DE$$

از طرفی داریم:

$$AB = \text{حداکثر ارتفاع خودرو} \xrightarrow{\text{طبق جدول ۳ از فصل ۳}} AB = ۴/۱m$$

$$BC = \text{اختلاف ارتفاع خودرو و زیرگذر} \xrightarrow{\text{طبق فرض سوال}} BC = ۲m$$

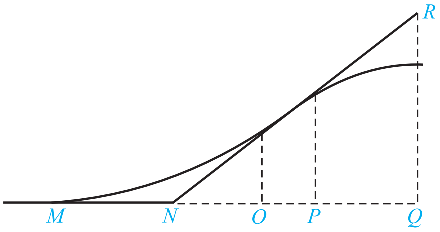
$$CD = \text{قطر (ضخامت سازه‌ای) پل} \xrightarrow{\text{طبق فرض سوال}} CD = ۳m$$

$$DE = \text{فاصله قائم وسط} \Rightarrow DE = e_V = \frac{|g_۲ - g_۱| \times L}{۸} = \frac{\left|-\frac{۸}{۱۰۰} - \frac{۸}{۱۰۰}\right| \times ۳۲}{۸} \Rightarrow DE = ۰/۶۴m$$

بنابراین طول AE برابر خواهد بود با:

$$AE = ۴/۱m + ۲m + ۳m + ۰/۶۴m \Rightarrow AE = ۹/۷۴m$$

حال باید فاصلهٔ بین قوس‌های متوالی را بررسی نماییم که از حد مجاز (۴۰ متر) بیشتر باشد. پس داریم:



$$QR = AE = ۹/۷۴m$$

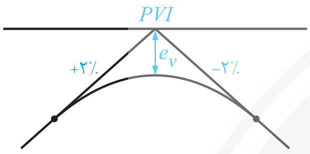
$$NP\ \text{شیب}: \frac{۸}{۱۰۰} = \frac{QR}{NQ} \Rightarrow NQ = \frac{۱۰۰}{۸} \times ۹/۷۴ = ۱۲۱/۷۵m$$

$$\text{فاصله دو قوس قائم متوالی}: OP = NQ - NO - PQ = NQ - \frac{L_۱}{۲} - \frac{L_۲}{۲} = ۱۲۱/۷۵ - \frac{۴۸}{۲} - \frac{۳۲}{۲}$$

$$\Rightarrow OP = ۸۱/۷۵m > ۴۰m \quad ok$$

بنابراین الزامات طراحی برآورده شده است.

۱۳ ابتدا پروفیل طولی راه را مطابق شکل مقابل رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow A = |(-۲) - (+۲)| = ۴$$

حال برای هر دو شرایط بیان شده در سؤال، مقدار e_V را به‌صورت زیر محاسبه کرده و اختلاف آنها را به‌دست می‌آوریم:

$$V_{Design} = ۸۰\ km/hr \xrightarrow{\text{جدول (۳)}} K = ۲۶۰\ m \Rightarrow L_{min} = KA = ۲۶ \times ۴ = ۱۰۴\ m \Rightarrow (e_V)_۱ = \frac{AL}{۸۰۰} = \frac{۴ \times ۱۰۴}{۸۰۰} = ۰/۵۲\ m$$

$$V_{Design} = ۱۰۰\ km/hr \xrightarrow{\text{جدول (۴)}} K = ۵۲۰\ m \Rightarrow L_{min} = KA = ۵۲۰ \times ۴ = ۲۰۸۰\ m \Rightarrow (e_V)_۲ = \frac{AL}{۸۰۰} = \frac{۴ \times ۲۰۸۰}{۸۰۰} = ۱۰/۴\ m$$

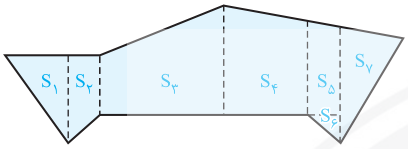
$$(e_V)_۱ - (e_V)_۲ = ۰/۵۲ - ۱۰/۴ = -۹/۸۸\ m$$

پس $۹/۸۸\ m$ ارتفاع وسط قوس نسبت به شرایط قبل از اصلاح هندسی مسیر کاهش می‌یابد.

حل تشریحی تمرین‌های پایانی فصل دوازدهم

۱ مساحت هر یک از اشکال را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

الف) در این شکل، مساحت مقطع عرضی را به روش هندسی به‌دست می‌آوریم. بنابراین شکل مسئله را به شش بخش که مساحت آنها قابل محاسبه است به‌صورت زیر تقسیم می‌کنیم و مساحت آنها را جداگانه تعیین می‌نماییم:



$$S_۱=\frac{۴\times۶}{۲}=۱۲m \qquad S_۲=(\frac{۴/۵+۶}{۲})\times۲=۱۰/۵\,m$$

$$S_۳=(\frac{۴/۵+۷/۵}{۲})\times۸=۴۸\,m \qquad S_۴=(\frac{۴/۵+۷/۵}{۲})\times۵=۲۳۰\,m$$

$$S_۵=۵/۵\times۲=۱۱\,m \qquad S_۶=\frac{۲\times۱/۵}{۲}=۱/۵\,m$$

$$S_۷=\frac{۸\times۴}{۲}=۱۶\,m$$

حال مساحت کل برابر است با:

$$S_T=\sum S_i=۱۲+۱۰/۵+۴۸+۳۰+۱۱+۱/۵+۱۶=۱۲۹\,m$$

ب) در این شکل، مساحت مقطع عرضی را به روش مختصاتی تعیین می‌کنیم. پس داریم:

$$\frac{۰}{۳/۶۵}\quad\frac{-۲/۸}{۵/۶۵}\quad\frac{-۵/۵}{۲/۵}\quad\frac{-۴/۵}{۲}\quad\frac{-۳}{-۲}\quad\frac{-۴}{-۲/۸}\quad\frac{-۲/۵}{-۵}\quad\frac{۰}{-۳/۶۵}\quad\frac{۰}{۰}\quad\frac{۰}{۳/۶۵}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\{[(۰\times۵/۶۵)+(-۲/۸)\times۲/۵)+((-۵/۵)\times۲)+((-۴/۵)\times(-۲))+((-۳)\times(-۲/۸))+((-۴)\times(-۵))+((-۲/۵)\times(-۳/۶۵))+(۰\times۰)$$

$$+(۰\times۳/۶۵))]-[(۳/۶۵\times(-۲/۸))+(۵/۶۵\times(-۵/۵))+(۲/۵\times(-۴/۵))+(۲\times((-۳))+((-۲)\times(-۴))+(-۲/۸)\times(-۲/۵))+((-۵)\times۰)$$

$$+((-۳/۶۵)\times۰)+(۰\times۰)]\}=\frac{۱}{۲}(۲۸/۵۲۵-(-۴۳/۵۴۵))=۳۶/۰۳۵\,m$$

۲ با توجه به شکل نیمرخ عرضی که بر روی کاغذ میلیمتری ترسیم شده است، کلیه مربع‌های کامل در داخل مقطع عرضی را شمارش می‌کنیم.

$N=۵۶/۵$ مربع واحد

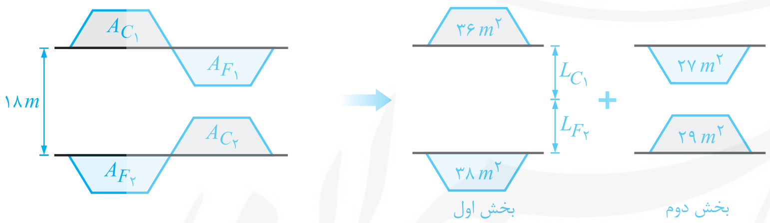
حال با توجه به اینکه مقیاس نقشه برابر با $\frac{۱}{۲۰۰}$ می‌باشد براساس تعریف مقیاس سطحی می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{مساحت روی کاغذ میلیمتری}}{\text{مساحت روی زمین طبیعی}}=(\text{مقیاس})^۲ \Rightarrow \frac{۵۶/۵}{\text{مساحت روی زمین طبیعی}}=(\frac{۱}{۲۰۰})^۲$$

$$\Rightarrow \text{مساحت روی زمین طبیعی}=۵۶/۵\times۲۰۰^۲=۲۲۶۰۰۰۰\times\boxed{۱۰^{-۴}}=۲۲۶\,m^۲$$

هر واحد مربع کامل معادل $۱cm^۲$ روی کاغذ میلیمتری اندازه‌گیری شده است.

۳ با توجه به قرارگیری نیمرخ‌ها که نیمرخ‌های عرضی مختلط مخالف است، بنابراین می‌توان دو نیمرخ متوالی را به‌صورت زیر تجزیه کرد:



حال حجم عملیات خاکی را برای هر دو بخش به‌صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم:

بخش اول :

$$\begin{cases}L_{F_۲}=\dfrac{A_{F_۲}}{A_{C_۱}+A_{F_۲}}\times L=\dfrac{۱۲}{۷+۱۲}\times۵=۳/۱۵\,cm\\[2ex] L_{C_۱}=\dfrac{A_{C_۱}}{A_{C_۱}+A_{F_۲}}\times L=\dfrac{۷}{۷+۱۲}\times۵=۱/۸۴\,cm\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}V_{C_۱}=\dfrac{A_{C_۱}+۰}{۲}\times L_{C_۱}=\dfrac{۷}{۲}\times۱/۸۴=۶/۴۴\,cm^۳\\[2ex] V_{F_۲}=\dfrac{A_{F_۲}+۰}{۲}\times L_{F_۲}=\dfrac{۱۲}{۲}\times۳/۱۵=۱۸/۹\,cm^۳\end{cases}$$

بخش دوم :

$$\begin{cases}L_{F_۱}=\dfrac{A_{F_۱}}{A_{C_۲}+A_{F_۱}}\times L=\dfrac{۸}{۱۰+۸}=۰/۴۴\\[2ex] L_{C_۲}=\dfrac{A_{C_۲}}{A_{C_۲}+A_{F_۱}}\times L=\dfrac{۱۰}{۱۰+۸}=۰/۵۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}V_{C_۲}=\dfrac{A_{C_۲}+۰}{۲}\times L_{C_۲}=\dfrac{۱۰}{۲}\times۰/۵۵=۲/۷۵\,cm^۳\\[2ex] V_{F_۱}=\dfrac{A_{F_۱}+۰}{۲}\times L_{F_۱}=\dfrac{۸}{۲}\times۰/۴۴=۱/۷۶\,cm^۳\end{cases}$$

بنابراین حجم کلی عملیات خاکی برابر است با:

$$\begin{cases} V_C = V_{C_1} + V_{C_2} = ۶/۴۴ + ۲/۷۵ = ۹/۱۹\ cm^۳ \\ V_F = V_{F_1} + V_{F_2} = ۱/۷۶ + ۱۸/۹ = ۲۰/۶۶\ cm^۳ \end{cases} \Rightarrow V_{\text{کل}} = V_C + V_F = ۹/۱۹ + ۲۰/۶۶ = ۲۹/۸۵\ cm^۳$$

حال با توجه به مقیاس $\frac{۱}{۲۰۰}$، حجم خاکبرداری و خاکریزی برحسب مترمکعب به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} V_C = ۹/۱۹\ cm^۳ \times \dfrac{۲۰۰^۳}{۱۰^۶} = ۷۳/۵۲\ m^۳ \\ V_F = ۲۰/۶۶ \times \dfrac{۲۰۰^۳}{۱۰^۶} = ۱۶۵/۲۸\ m^۳ \end{cases} \Rightarrow V_{\text{کل}} = V_C + V_F = ۲۳۸/۸\ m^۳$$

هر ۱ متر مکعب برابر با ۱۰۰×۱۰۰×۱۰۰ سانتی‌متر مربع است.

۴ ابتدا حجم عملیات خاکی را به روش مقطع متوسط به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} V_F = \dfrac{A_{F_1} + A_{F_2}}{۲} \times L = \dfrac{۵۳ + ۴۲}{۲} \times ۲۰ = ۹۵۰\ m^۳ \\ V_C = ۰ \end{cases}$$

حال برای تعیین حجم عملیات خاکی به روش منشوری داریم:

$$A_m = \left(\frac{\sqrt{A_1}}{۲} + \frac{\sqrt{A_2}}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{\sqrt{۵۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۴۲}}{۲}\right)^۲ = (۳/۶۴ + ۳/۲۴)^۲ = ۴۷/۳۳\ m^۲$$

$$V_F = \frac{(A_1 + ۴A_m + A_2)}{۶} \times L = \frac{(۵۳ + (۴ \times ۴۷/۳۳) + ۴۲)}{۶} \times ۲۰ = ۹۴۷/۷۳\ m$$

۵ با توجه به رابطهٔ تصحیح حجم عملیات خاکی در قوس‌ها و اینکه مرکز عملیات در جهات مقابل هم قرار دارند خواهیم داشت:

فاصلهٔ دو نیمرخ : $L = \dfrac{\pi R \Delta^\circ}{۱۸۰} = \dfrac{\pi \times ۱۴۰ \times ۸}{۱۸۰} = ۱۹/۵۴$

$$C_c = \frac{L}{۲R} |A_1 e_1 \pm A_2 e_2| = \frac{۱۹/۵۴}{۲ \times ۱۴۰} \times |(۳۰ \times ۰/۶) - (۵۵ \times ۰/۸)| = ۱/۸۱\ m^۳$$

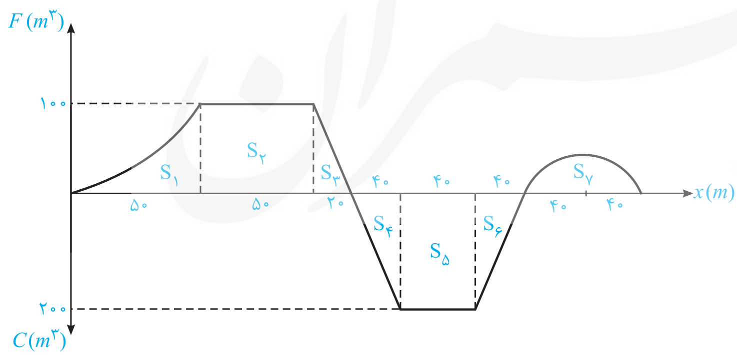
$$V_P = \left(\frac{A_1 + A_2}{۲} \times L\right) - C_c = \left(\frac{۳۰ + ۵۵}{۲}\right)(۱۹/۵۴) - ۱/۸۱ = ۸۲۸/۶۴\ m^۳$$

۶ می‌دانیم که حجم خالص خاک جابه‌جا شده در یک منحنی بروکنر برابر است با تصویر قائم شاخه‌های خاکبرداری (شاخه‌های نزولی) و یا تصویر قائم شاخه‌های خاکریزی (شاخه‌های صعودی)، پس داریم:

$(IJ$ و FG ،CD ،$AB)$ تصویر قائم شاخه‌های صعودی $= ۵۰۰۰ + ۱۰۰۰ + ۲۵۰۰ + ۵۵۰۰ = ۱۴۰۰۰\ m^۳$

$(LM$ و JK ،HI ،DF ،$BC)$ تصویر قائم شاخه‌های نزولی $= ۲۰۰۰ + ۸۰۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰ + ۲۰۰۰ = ۱۴۰۰۰\ m^۳$

۷ برای تعیین فاصلهٔ حمل متوسط می‌بایست مساحت سطح زیر نمودار را به‌دست آورد، پس داریم:



برای مساحت S_1 داریم:

$$S_1 = y = ax^۲ + b \xrightarrow[(۵۰،۱۰۰)]{(۰،۰)} y = \frac{۱۰۰}{۲۵۰۰} x^۲ \Rightarrow S_1 = \int_۰^{۵۰} \left(\frac{۱}{۲۵} x^۲\right) dx = \frac{x^۳}{۷۵}\Bigg|_۰^{۵۰} = ۱۶۶۶/۶۷\ m^۲$$

اکنون برای مساحت S_2 تا S_6 به راحتی می‌توان نوشت:

$$S_3 = \frac{20\times 100}{2} = 1000\ m^2 \qquad S_2 = 50\times 100 = 5000\ m^2$$

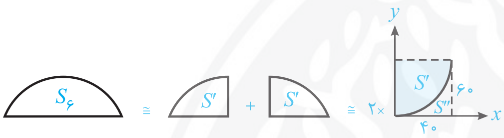
$$S_5 = 40\times 200 = 8000\ m^2 \qquad S_4 = \frac{40\times 200}{2} = 4000\ m^2$$

$$S_6 = \frac{40\times 200}{2} = 4000\ m^2$$

برای مساحت سهمی درجهٔ دوم (S_V) نیز خواهیم داشت:

$$y = ax^2 + b \xrightarrow[(40\,,\,60)]{(0\,,\,0)} 60 = a\times 40^2 \Rightarrow a = \frac{60}{40^2} = \frac{3}{80} \Rightarrow y = \frac{3}{80}x^2$$

$$S'' = \int_0^{40} \left(\frac{3}{80}x^2\right) dx = \frac{3}{80}\times\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{80}\Bigg|_0^{40} = 800\ m^2$$



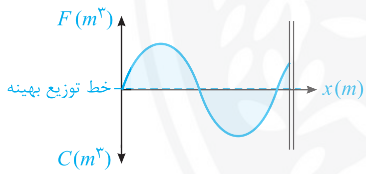
$$= 2\times(40\times 60 - S'')$$

$$\Rightarrow S_7 = 3200\ m^2$$

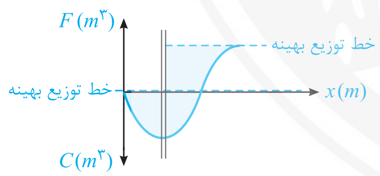
حال با داشتن مساحت‌های S_1 تا S_7 می‌توان فاصلهٔ حمل متوسط را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\bar{d} = \frac{\sum V_i d_i}{\sum V_i} = \frac{1666/67 + 5000 + 1000 + 4000 + 8000 + 4000 + 3200}{100 + 200 + 600} = 29/85\ m$$

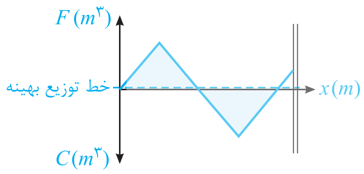
۸ هر یک از منحنی‌های بروکنر را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم:



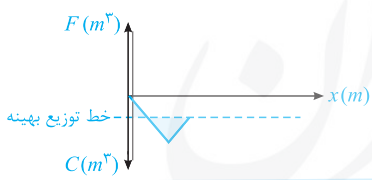
در منحنی بروکنر (۱)، با توجه به اینکه محل قرضه یا دپو در انتهای مسیر است، پس خط اساس به‌عنوان خط توزیع بهینه می‌باشد تا خاک مورد نیاز قرضه در انتهای منحنی بروکنر از آنجا تأمین شود.



در منحنی بروکنر (۲)، با توجه به اینکه محل قرضه یا دپو در میانهٔ منحنی بروکنر است پس خط توزیع به‌صورت پلکانی بوده، بدان معنی که در سمت راست محل قرضه یا دپو، خط پایان به‌عنوان خط توزیع بهینه است و در سمت چپ نیز، خط اساس به‌عنوان خط توزیع بهینه می‌باشد.



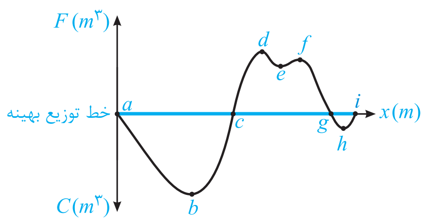
در منحنی بروکنر (۳) نیز مشابه منحنی بروکنر (۱)، با توجه به قرارگیری محل قرضه یا دپو، خط اساس به‌عنوان خط توزیع بهینه می‌باشد.



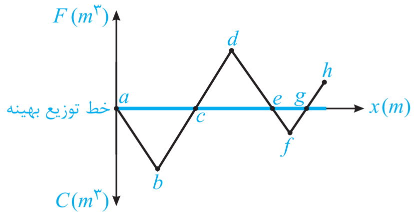
در منحنی بروکنر (۴)، با توجه به اینکه محل دپو یا قرضه در ابتدای مسیر است پس می‌توان با انتخاب خط پایان به‌عنوان خط توزیع بهینه، مقداری خاکبرداری و انتقال به دپو را در ابتدای پروژه ایجاد کرد.

۹ در هر یک از منحنی‌های بروکنر نشان داده شده در سؤال، خط توزیع بهینهٔ آن به‌صورت زیر ترسیم می‌شوند:

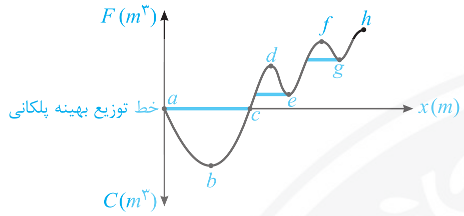
۱) خط اساس



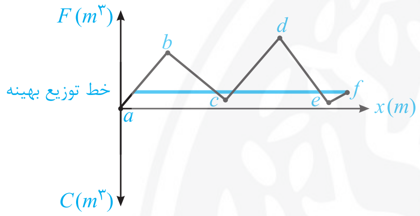
۲) خط اساس



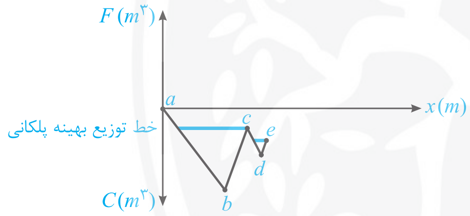
۳) خط افقی پلکانی گذرا از نقاط c، e و g



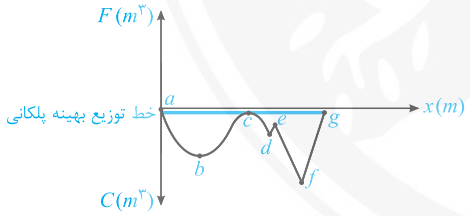
۴) خط پایان



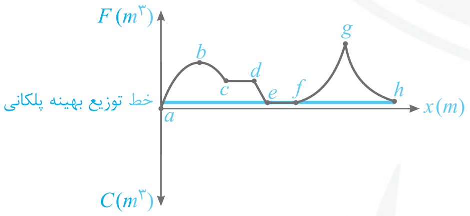
۵) خط افقی پلکانی گذرا از نقاط c و e



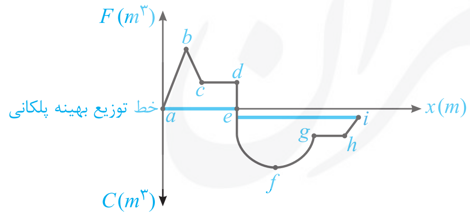
۶) خط پایان



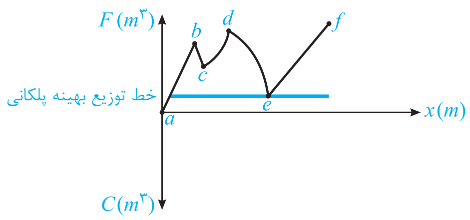
۷) خط پایان



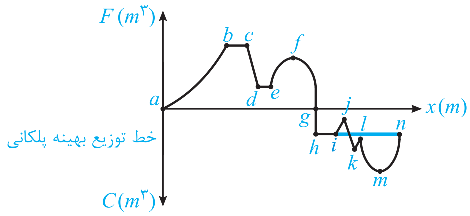
۸) خط پلکانی ae (یا همان اساس) و گذرا از نقطهٔ i (یا همان پایان)



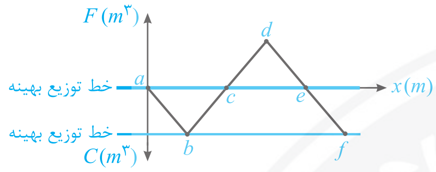
۹) خط افقی گذرا از نقطهٔ e



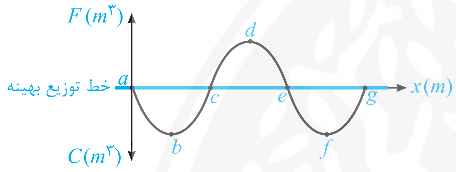
۱۰) خط پلکانی ag و گذرا از نقاط i و n



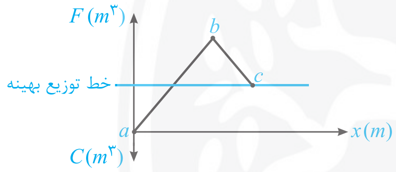
۱۱) خط اساس یا خط پایان



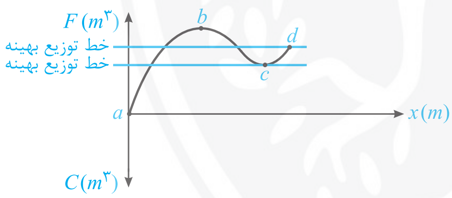
۱۲) خط اساس



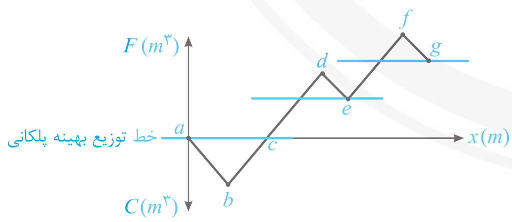
۱۳) خط پایان



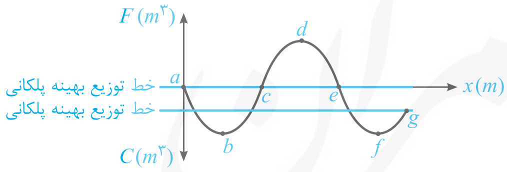
۱۴) خط پایان یا خط افقی گذرا از نقطهٔ c بسته به میزان قرضهٔ مورد نیاز



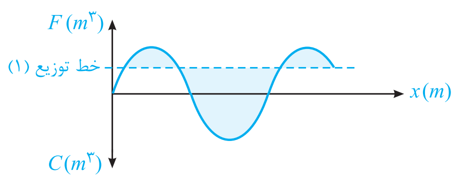
۱۵) خط افقی پلکانی گذرا از نقاط c، e و g



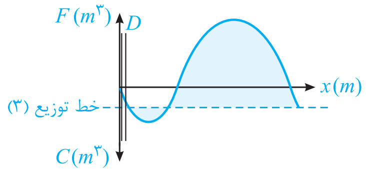
۱۶) خط پلکانی اساس و پایان



۱۰ مطابق شکل، با انتخاب خط پایان، قرضه در انتهای مسیر صفر شده ولی در ابتدای مسیر، مقداری قرضه مورد نیاز است.



۱۱ از آنجاکه فرض شده است محل دپو در ابتدای پروژه قرار گیرد، پس بهترین خط توزیع، خط (۴) می‌باشد که همان خط پایان منحنی بروکنر است.



۱۲ الف) برای به‌دست آوردن حجم کل عملیات خاکی مسیر می‌بایست حجم خاکبرداری و خاکریزی را بین هر دو مقطع متوالی محاسبه کنیم که در نهایت مجموع خاکبرداری و خاکریزی به‌عنوان حجم کل عملیات خاکی معرفی می‌شود. بنابراین برای هر دو نیمرخ متوالی می‌توان نوشت:

برآورد حجم عملیات خاکی بین نیمرخ‌های (۱) و (۲): با توجه به اینکه یک نیمرخ در خاکریزی و نیمرخ دیگر مختلط می‌باشد، پس داریم:

بخش اول :
$$\begin{cases} L_C = \dfrac{A_{C_۱}}{A_{C_۱}+A_{F_۲}}\times L = \dfrac{۲۲}{۲۲+۶۰}\times ۵۰ = ۱۳/۴۱\,m \\ L_F = \dfrac{A_{F_۲}}{A_{C_۱}+A_{F_۲}}\times L = \dfrac{۶۰}{۲۲+۶۰}\times ۵۰ = ۳۶/۵۹\,m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{C_۱} = \dfrac{A_{C_۱}+۰}{۲}\times L_C = \dfrac{۲۲}{۲}\times ۱۳/۴۱ = ۱۴۷/۵۱\,m^{۳} \\ V_{F_۱} = \dfrac{A_{F_۲}+۰}{۲}\times L_F = \dfrac{۶۰}{۲}\times ۳۶/۵۹ = ۱۰۹۷/۷\,m^{۳} \end{cases}$$

بخش دوم :
$$\begin{cases} V_{F_۲} = \dfrac{A_{F_۱}+A_{C_۲}}{۲}\times L = \dfrac{۲۵+۰}{۲}\times ۵۰ = ۶۲۵\,m^{۳} \\ V_{C_۲} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_C = V_{C_۱}+V_{C_۲} = ۱۴۷/۵۱+۰ = ۱۴۷/۵۱\,m^{۳} \\ V_F = V_{F_۱}+V_{F_۲} = ۱۰۹۷/۷+۶۲۵ = ۱۷۲۲/۷\,m^{۳} \end{cases}$$

برآورد حجم عملیات خاکی بین نیمرخ‌های (۲) و (۳): قرارگیری نیمرخ‌ها همانند حالت اول می‌باشد، بنابراین خواهیم داشت:

بخش اول :
$$\begin{cases} V_{C_۱} = ۰ \\ V_{F_۱} = \dfrac{A_{F_۲}+A_{C_۱}}{۲}\times L = \dfrac{۲۷+۰}{۲}\times ۵۰ = ۶۷۵\,m^{۳} \end{cases}$$

بخش دوم :
$$\begin{cases} L_C = \dfrac{A_{C_۲}}{A_{C_۲}+A_{F_۱}}\times L = \dfrac{۲۰}{۲۰+۶۰}\times ۵۰ = ۱۲/۵\,m \\ L_F = \dfrac{A_{F_۱}}{A_{C_۲}+A_{F_۱}}\times L = \dfrac{۶۰}{۲۰+۶۰}\times ۵۰ = ۳۷/۵\,m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{C_۲} = \dfrac{A_{C_۲}+۰}{۲}\times L_C = \dfrac{۲۰+۰}{۲}\times ۱۲/۵ = ۱۲۵\,m^{۳} \\ V_{F_۲} = \dfrac{A_{F_۱}+۰}{۲}\times L_F = \dfrac{۶۰+۰}{۲}\times ۳۷/۵ = ۱۱۲۵\,m^{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_C = V_{C_۱}+V_{C_۲} = ۰+۱۲۵ = ۱۲۵\,m^{۳} \quad , \quad V_F = V_{F_۱}+V_{F_۲} = ۶۷۵+۱۱۲۵ = ۱۸۰۰\,m^{۳}$$

برآورد عملیات خاکی بین نیمرخ‌های (۳) و (۴): نوع قرارگیری نیمرخ‌های متوالی (۳) و (۴) نیز تقریباً مشابه دو حالت قبل است، پس داریم:

بخش اول :
$$\begin{cases} L_C = \dfrac{A_{C_۲}}{A_{F_۱}+A_{C_۲}}\times L = \dfrac{۵۰}{۲۷+۵۰}\times ۳۸ = ۲۴/۶۸\,m \\ L_F = \dfrac{A_{F_۱}}{A_{F_۱}+A_{C_۲}}\times L = \dfrac{۲۷}{۲۷+۵۰}\times ۳۸ = ۱۳/۳۲\,m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{C_۱} = \dfrac{A_{C_۲}+۰}{۲}\times L_C = \dfrac{۵۰}{۲}\times ۲۴/۶۸ = ۶۱۷\,m^{۳} \\ V_{F_۱} = \dfrac{A_{F_۱}+۰}{۲}\times L_F = \dfrac{۲۷}{۲}\times ۱۳/۳۲ = ۱۷۹/۸۲\,m^{۳} \end{cases}$$

بخش دوم :
$$\begin{cases} V_{C_۲} = \dfrac{A_{C_۱}+A_{F_۲}}{۲}\times L = \dfrac{۲۰+۰}{۲}\times ۳۸ = ۳۸۰\,m^{۳} \\ V_{F_۲} = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_C = V_{C_۱}+V_{C_۲} = ۶۱۷+۳۸۰ = ۹۹۷\,m^{۳} \quad , \quad V_F = V_{F_۱}+V_{F_۲} = ۱۷۹/۸۲+۰ = ۱۷۹/۸۲\,m^{۳}$$

برآورد حجم عملیات خاکی بین نیمرخ‌های (۴) و (۵): نحوهٔ قرارگیری نیمرخ‌های متوالی (۴) و (۵) نیز مشابه حالت (۲) و (۳) است، از اینرو می‌توان نوشت:

بخش اول :
$$\begin{cases} V_{C_۱} = \dfrac{A_{F_۱}+A_{C_۲}}{۲}\times L = \dfrac{۰+۲۴}{۲}\times ۲۰ = ۲۴۰\,m^{۳} \\ V_{F_۱} = ۰ \end{cases}$$

بخش دوم :
$$\begin{cases} L_C = \dfrac{A_{C_۱}}{A_{C_۱}+A_{F_۲}}\times L = \dfrac{۵۰}{۵۰+۲۱}\times ۲۰ = ۱۴/۰۸\,m \\ L_F = \dfrac{A_{F_۲}}{A_{C_۱}+A_{F_۲}}\times L = \dfrac{۲۱}{۵۰+۲۱}\times ۲۰ = ۵/۹۲\,m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{C_2} = \dfrac{A_{C_1}+0}{2}\times L_C = \dfrac{50}{2}\times 14/08 = 352\ m^3 \\ V_{F_2} = \dfrac{A_{F_2}+0}{2}\times L_F = \dfrac{21}{2}\times 5/92 = 62/16\ m^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_C = V_{C_1}+V_{C_2} = 240+14/08 = 254/08\ m \quad , \quad V_F = V_{F_1}+V_{F_2} = 0+62/16 = 62/16\ m^3$$

برآورد حجم عملیات خاکی بین نیمرخ‌های (۵) و (۶): با توجه به اینکه نحوهٔ قرارگیری نیمرخ‌های عرضی متوالی به‌صورت مختلط مشابه می‌باشد، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} V_C = \dfrac{A_{C_1}+A_{C_2}}{2}\times L = \dfrac{24+18}{2}\times 20 = 420\ m^3 \\ V_F = \dfrac{A_{F_1}+A_{F_2}}{2}\times L = \dfrac{21+35}{2}\times 20 = 560\ m^3 \end{cases}$$

برآورد حجم عملیات خاکی بین نیمرخ‌های (۶) و (۷): با توجه به اینکه نحوهٔ قرارگیری نیمرخ‌های عرضی متوالی نوع نیمرخ‌ها، مختلط مخالف است، بنابراین داریم:

بخش اول :
$$\begin{cases} L_{F_2} = \dfrac{A_{F_2}}{A_{C_1}+A_{F_2}}\times L = \dfrac{23}{18+23}\times 20 = 11/22\ m \\ L_{C_1} = \dfrac{A_{C_1}}{A_{C_1}+A_{F_2}}\times L = \dfrac{18}{18+23}\times 20 = 8/78\ m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{C_1} = \dfrac{A_{C_1}+0}{2}\times L_{C_1} = \dfrac{18}{2}\times 8/78 = 79/02\ m^3 \\ V_{F_2} = \dfrac{A_{F_2}+0}{2}\times L_{F_2} = \dfrac{23}{2}\times 11/22 = 129/03\ m^3 \end{cases}$$

بخش دوم :
$$\begin{cases} L_{F_1} = \dfrac{A_{F_1}}{A_{C_2}+A_{F_1}}\times L = \dfrac{35}{14+35}\times 20 = 14/29\ m \\ L_{C_2} = \dfrac{A_{C_2}}{A_{C_2}+A_{F_1}}\times L = \dfrac{14}{14+35}\times 20 = 5/71\ m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{C_2} = \dfrac{A_{C_2}+0}{2}\times L_{C_2} = \dfrac{14}{2}\times 5/71 = 39/97\ m^3 \\ V_{F_1} = \dfrac{A_{F_1}+0}{2}\times L_{F_1} = \dfrac{35}{2}\times 14/29 = 250/07\ m^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_C = V_{C_1}+V_{C_2} = 79/02+39/97 = 118/99\ m^3 \\ V_F = V_{F_1}+V_{F_2} = 250/07+129/03 = 379/1\ m^3 \end{cases}$$

برآورد حجم عملیات خاکی بین نیمرخ‌های (۷) و (۸): از آنجاکه نحوهٔ قرارگیری نیمرخ‌های عرضی متوالی به‌صورت مختلط مشابه است، از اینرو می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} V_C = \dfrac{A_{C_1}+A_{C_2}}{2}\times L = \dfrac{14+30}{2}\times 20 = 440\ m^3 \\ V_F = \dfrac{A_{F_1}+A_{F_2}}{2}\times L = \dfrac{23+28}{2}\times 20 = 510\ m^3 \end{cases}$$

برآورد حجم عملیات خاکی بین نیمرخ‌های (۸) و (۹): نحوهٔ قرارگیری نیمرخ‌های متوالی (۸) و (۹) مشابه چهار حالت اول می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

بخش اول :
$$\begin{cases} L_C = \dfrac{A_{C_1}}{A_{C_1}+A_{F_2}}\times L = \dfrac{30}{30+42}\times 17 = 7/08\ m \\ L_F = \dfrac{A_{F_2}}{A_{C_1}+A_{F_2}}\times L = \dfrac{42}{30+42}\times 17 = 9/92\ m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{C_1} = \dfrac{A_{C_1}+0}{2} = \dfrac{30}{2}\times 7/08 = 106/2\ m^3 \\ V_{F_1} = \dfrac{A_{F_2}+0}{2} = \dfrac{42}{2}\times 9/92 = 208/32\ m^3 \end{cases}$$

بخش دوم :
$$\begin{cases} V_{C_2} = 0 \\ V_{F_2} = \dfrac{A_{F_1}+A_{C_2}}{2}\times L = \dfrac{28+0}{2}\times 17 = 238\ m^3 \end{cases}$$

$$V_C = V_{C_1}+V_{C_2} = 106/2+0 = 106/2\ m^3 \quad , \quad V_F = V_{F_1}+V_{F_2} = 208/32+238 = 446/32\ m^2$$

برآورد حجم عملیات خاکی بین نیمرخ‌های (۹) و (۱۰): با توجه به اینکه یک نیمرخ در خاکریزی و نیمرخ دیگر در خاکبرداری (نیمرخ‌های عرضی سادهٔ غیرهمنام) است، خواهیم داشت:

$$L_F = \frac{A_F}{A_C+A_F}\times L = \frac{42}{38+42}\times 50 = 26/25\ m \Rightarrow V_F = \frac{A_F+0}{2}\times L_F = \frac{42}{2}\times 26/25 = 551/25\ m^3$$

$$L_C = \frac{A_C}{A_C+A_F}\times L = \frac{38}{38+42}\times 50 = 23/75\ m \Rightarrow V_C = \frac{A_C+0}{2}\times L_C = \frac{38}{2}\times 23/75 = 451/25\ m^3$$

برآورد حجم عملیات خاکی بین نیمرخ‌های (۱۰) و (۱۱): از آنجاکه هر دو نیمرخ در خاکبرداری (نیمرخ‌های عرضی سادهٔ همنام) می‌باشند، از اینرو داریم:

$$V_F = ۰$$

$$V_C = \frac{A_{C_۱} + A_{C_۲}}{۲} \times L = \frac{۳۸ + ۳۳}{۲} \times ۵۰ = ۱۷۷۵\ m^۳$$

حال پس از به‌دست آوردن احجام خاکبرداری و خاکریزی بین هر دو نیمرخ متوالی می‌توان حجم کل عملیات خاکی در این بخش از مسیر را به‌صورت زیر برآورد کرد:

$$V_{C_{\text{کل}}} = \sum_{i=۱}^{i} V_{C_{i_{\text{بین هر دو نیمرخ متوالی}}}} = ۱۴۷/۵۱ + ۱۲۵ + ۹۹۷ + ۲۵۴/۰۸ + ۴۲۰ + ۱۱۸/۹۹ + ۴۴۰ + ۱۰۶/۲ + ۵۵۱/۲۵ + ۱۷۷۵ = ۴۹۳۵/۰۳\ m^۳$$

$$V_{F_{\text{کل}}} = \sum_{i=۱}^{۱۰} V_{F_{i_{\text{بین هر دو نیمرخ متوالی}}}} = ۱۷۲۲/۷ + ۱۸۰۰ + ۱۷۹/۸۲ + ۶۲/۱۶ + ۵۶۰ + ۳۷۹/۱ + ۵۱۰ + ۴۴۶/۳۲ + ۴۵۱/۲۵ + ۰ = ۶۱۱۱/۳۵\ m^۳$$

$$V_{\text{کل}} = V_{C_{\text{کل}}} + V_{F_{\text{کل}}} = ۴۹۳۵/۰۳ + ۶۱۱۱/۳۵ = ۱۱۰۴۶/۳۸\ m^۳$$

در ادامه جدول عملیات خاکی مربوط به این بخش از مسیر تنظیم شده است:

شمارهٔ ایستگاه یا نیمرخ	کیلومتراژ نیمرخ	سطح مقطع ($m^۲$)		فاصلهٔ بین دو نیمرخ (m)	احجام خاکبرداری ($m^۳$)		احجام خاکریزی ($m^۳$)	
		سطوح خاکبرداری	سطوح خاکریزی		احجام جزئی	احجام کلی	احجام جزئی	احجام کلی
۱	۰+۰۰/۰	۲۲	۲۵	۵۰	۱۴۷/۵۱	۱۴۷/۵۱	۱۷۲۲/۷	۱۷۲۲/۷
۲	۰+۵۰	۰	۶۰	۵۰	۱۲۵	۲۷۲/۵۱	۱۸۰۰	۳۵۲۲/۷
۳	۰+۱۰۰	۲۰	۲۷	۳۸	۹۹۷	۱۲۶۹/۵۱	۱۷۹/۸۲	۳۷۰۲/۵۲
۴	۰+۱۳۸	۵۰	۰	۲۰	۲۵۴/۰۸	۱۵۲۳/۵۹	۶۲/۱۶	۳۷۶۴/۶۸
۵	۰+۱۵۸	۲۴	۲۱	۲۰	۴۲۰	۱۹۴۳/۵۹	۵۶۰	۴۳۲۴/۶۸
۶	۰+۱۷۸	۱۸	۳۵	۲۰	۱۱۸/۹۹	۲۰۶۲/۵۸	۳۷۹/۱	۴۷۰۳/۷۸
۷	۰+۱۹۸	۱۴	۲۳	۲۰	۴۴۰	۲۵۰۲/۵۸	۵۱۰	۵۲۱۳/۷۸
۸	۰+۲۱۸	۳۰	۲۸	۱۷	۱۰۶/۲	۲۶۰۸/۷۸	۴۴۶/۳۲	۵۶۶۰/۱
۹	۰+۲۳۵	۰	۴۲	۵۰	۵۵۱/۲۵	۳۱۶۰/۰۳	۴۵۱/۲۵	۶۱۱۱/۳۵
۱۰	۰+۲۸۵	۳۸	۰	۵۰	۱۷۷۵	۴۹۳۵/۰۳	۰	۶۱۱۱/۳۵
۱۱	۰+۳۳۵	۳۳	۰					

ب) برای ترسیم منحنی بروکنر ابتدا جدول بروکنر را با درصد انقباض ۲۰ درصد به‌صورت زیر تنظیم می‌کنیم:

شمارهٔ ایستگاه	فاصلهٔ بین دو نیمرخ (متر)	حجم خاکبرداری (متر مکعب)	حجم خاکریزی (متر مکعب)	حجم خاکریزی + انقباض (متر مکعب)	اضافه حجم عملیات خاکی		جمع جبری اضافه حجم عملیات خاکی (متر مکعب)
					خاکبرداری (مترمکعب)	خاکریزی (مترمکعب)	
۱	۵۰	۱۴۷/۵۱	۱۷۲۲/۷	۲۰۶۷/۲۴		+۱۹۱۹/۷۳	۱۹۱۹/۷۳
۲	۵۰	۱۲۵	۱۸۰۰	۲۱۶۰		+۲۰۳۵	۳۹۵۴/۷۳
۳	۳۸	۹۹۷	۱۷۹/۸۲	۲۱۵/۷۸	−۷۸۱/۲۲		۳۱۷۳/۵۱
۴	۲۰	۲۵۴/۰۸	۶۲/۱۶	۷۴/۵۹	−۱۷۹/۴۹		۲۹۹۴/۰۲
۵	۲۰	۴۲۰	۵۶۰	۶۷۲		+۲۵۲	۳۲۴۶/۰۲
۶	۲۰	۱۱۸/۹۹	۳۷۹/۱	۴۵۴/۹۲		+۳۳۵/۹۳	۳۵۸۱/۹۵
۷	۲۰	۴۴۰	۵۱۰	۶۱۲		+۱۷۲	۳۷۵۳/۹۵
۸	۱۷	۱۰۶/۲	۴۴۶/۳۲	۵۳۵/۵۸		+۴۲۹/۳۸	۴۱۸۳/۳۳
۹	۵۰	۵۵۱/۲۵	۴۵۱/۲۵	۵۴۱/۵	−۹/۷۵		۴۱۷۳/۵۸
۱۰	۵۰	۱۷۷۵	۰	۰	−۱۷۷۵		۲۳۹۸/۵۸
۱۱							

پس از تنظیم جدول بروکنر می‌توان منحنی بروکنر آن را به‌صورت زیر ترسیم کرد.